3章　積分法

§1　不定積分と定積分　(p.33〜p.37)

BASIC

138　C は積分定数

（1）　与式 $= \dfrac{1}{5+1}x^{5+1}+C$

$= \boldsymbol{\dfrac{1}{6}x^6+C}$

（2）　与式 $= \displaystyle\int x^{-4}\,dx$

$= \dfrac{1}{-4+1}x^{-4+1}$

$= -\dfrac{1}{3}x^{-3}+C$

$= \boldsymbol{-\dfrac{1}{3x^3}+C}$

（3）　与式 $= \displaystyle\int x\cdot x^{\frac{1}{2}}\,dx$

$= \displaystyle\int x^{\frac{3}{2}}\,dx$

$= \dfrac{1}{\frac{3}{2}+1}x^{\frac{3}{2}+1}$

$= \dfrac{1}{\frac{5}{2}}x^{\frac{5}{2}}+C$

$= \dfrac{2}{5}x^2\cdot x^{\frac{1}{2}}+C$

$= \boldsymbol{\dfrac{2}{5}x^2\sqrt{x}+C}$

（4）　与式 $= \displaystyle\int \frac{1}{x^{\frac{2}{3}}}\,dx$

$= \displaystyle\int x^{-\frac{2}{3}}\,dx$

$= \dfrac{1}{-\frac{2}{3}+1}x^{-\frac{2}{3}+1}$

$= \dfrac{1}{\frac{1}{3}}x^{\frac{1}{3}}+C$

$= \boldsymbol{3\sqrt[3]{x}+C}$

139　C は積分定数

（1）　$\displaystyle\int (2x^3-x^2+x-5)\,dx$

$= 2\displaystyle\int x^3\,dx-\int x^2\,dx+\int x-5\int dx$

$= 2\cdot\dfrac{1}{4}x^4-\dfrac{1}{3}x^3+\dfrac{1}{2}x^2-5x+C$

$= \boldsymbol{\dfrac{1}{2}x^4-\dfrac{1}{3}x^3+\dfrac{1}{2}x^2-5x+C}$

（2）　$\displaystyle\int\left(\frac{3}{x}+2e^x\right)dx$

$= 3\displaystyle\int\frac{1}{x}\,dx+2\int e^x\,dx$

$= 3\cdot\log|x|+2e^x+C$

$= \boldsymbol{3\log|x|+2e^x+C}$

（3）　$\displaystyle\int (2\sin x-3\cos x)\,dx$

$= 2\displaystyle\int\sin x\,dx-3\int\cos x\,dx$

$=2(-\cos x)-3\cdot\sin x+C$

$= \boldsymbol{-2\cos x-3\sin x+C}$

（4）　$\displaystyle\int\frac{(2x-3)^2}{x}\,dx$

$= \displaystyle\int\frac{4x^2-12x+9}{x}\,dx$

$= \displaystyle\int\left(4x-12+\frac{9}{x}\right)dx$

$= 4\displaystyle\int x\,dx-12\int dx+9\int\frac{1}{x}\,dx$

$= 4\cdot\dfrac{1}{2}x^2-12x+9\cdot\log|x|+C$

$= \boldsymbol{2x^2-12x+9\log|x|+C}$

140　C は積分定数

（1）　$\displaystyle\int x^5\,dx=\frac{1}{6}x^6+C$ より

与式 $= \dfrac{1}{-2}\cdot\dfrac{1}{6}(3-2x)^6+C$

$= \boldsymbol{-\dfrac{1}{12}(3-2x)^6+C}$

（2）　$\displaystyle\int\cos x\,dx=\sin x+C$ より

与式 $= \dfrac{1}{3}\cdot\sin(3x+4)+C$

$= \boldsymbol{\dfrac{1}{3}\sin(3x+4)+C}$

（3）　$\displaystyle\int e^x\,dx=e^x+C$ より

与式 $= 3\displaystyle\int e^{1-2x}\,dx$

$= 3\cdot\dfrac{1}{-2}\cdot e^{1-2x}+C$

$= \boldsymbol{-\dfrac{3}{2}e^{1-2x}+C}$

（4）　$\displaystyle\int\frac{1}{x}\,dx=\log|x|+C$ より

与式 $= \dfrac{1}{3}\cdot\log|3x-5|+C$

$= \boldsymbol{\dfrac{1}{3}\log|3x-5|+C}$

141 ※ 問題には,「$f(x)$」が定義されていませんが，勝手に $f(x)=x^3$ としておきます.

（1）　$x_k=\dfrac{k}{n}$，　$\Delta x_k=\dfrac{1}{n}$　$(k=1,2,\cdots,n)$ より，

$S_\Delta=\displaystyle\sum_{k=1}^{n}f(x_k)\Delta x_k$

$= \displaystyle\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k}{n}\right)^3\cdot\frac{1}{n}=\frac{1}{n^4}\sum_{k=1}^{n}k^3$

$= \dfrac{1}{n^4}\cdot\dfrac{n^2(n+1)^2}{4}$

$= \dfrac{1}{4}\cdot\dfrac{(n+1)^2}{n^2}$

$= \dfrac{1}{4}\left(\dfrac{n+1}{n}\right)^2$

$= \boldsymbol{\dfrac{1}{4}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^2}$

（2）　$\Delta x_k \to 0$ のとき，$n \to \infty$ であるから

$$\int_0^1 x^3\,dx = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{4}\left(1+\frac{1}{n}\right)^2$$
$$= \frac{1}{4}(1+0)^2 = \frac{1}{4}$$

142（1）　与式 $= 3\int_0^1 x\,dx + 2\int_0^1 1\,dx$

$$= 3\cdot\frac{1}{2} + 2\cdot 1$$
$$= \frac{3}{2} + 2 = \mathbf{\frac{7}{2}}$$

（2）　与式 $= 4\int_0^1 x^3\,dx + \int_0^1 x^2 - 5\int_0^1 x\,dx + 3\int_0^1 1\,dx$

$$= 4\cdot\frac{1}{4} + \frac{1}{3} - 5\cdot\frac{1}{2} + 3\cdot 1$$
$$= 1 + \frac{1}{3} - \frac{5}{2} + 3$$
$$= \frac{6+2-15+18}{6} = \mathbf{\frac{11}{6}}$$

143（1）　$\int \frac{dx}{x} = \log|x| + C$ であるから

与式 $= \Big[\log|x|\Big]_1^3$

$$= \log|3| - \log|1|$$
$$= \log 3 - 0 = \mathbf{\log 3}$$

（2）　$\int \cos x\,dx = \sin x + C$ であるから

与式 $= \Big[\sin x\Big]_0^{\frac{\pi}{2}}$

$$= \sin\frac{\pi}{2} - \sin 0$$
$$= 1 - 0 = \mathbf{1}$$

144（1）　与式 $= 2\int_1^2 x^2 -\ dx - \int_1^2 x\,dx + 3\int_1^2 dx$

$$= 2\left[\frac{1}{3}x^3\right]_1^2 - \left[\frac{1}{2}x^2\right]_1^2 + 3\Big[x\Big]_1^2$$
$$= \frac{2}{3}\Big[x^3\Big]_1^2 - \frac{1}{2}\Big[x^2\Big]_1^2 + 3\Big[x\Big]_1^2$$
$$= \frac{2}{3}(2^3-1^3) - \frac{1}{2}(2^2-1^2) + 3(2-1)$$
$$= \frac{2}{3}\cdot 7 - \frac{1}{2}\cdot 3 + 3\cdot 1$$
$$= \frac{14}{3} - \frac{3}{2} + 3$$
$$= \frac{28-9+18}{6} = \mathbf{\frac{37}{6}}$$

〔または〕

与式 $= \left[\frac{2}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + 3x\right]_1^2$

$$= \left(\frac{2}{3}\cdot 2^3 - \frac{1}{2}\cdot 2^2 + 3\cdot 2\right) - \left(\frac{2}{3}\cdot 1^3 - \frac{1}{2}\cdot 1^2 + 3\cdot 1\right)$$
$$= \left(\frac{16}{3} - 2 + 6\right) - \left(\frac{2}{3} - \frac{1}{2} + 3\right)$$
$$= \frac{14}{3} + \frac{1}{2} + 1$$
$$= \frac{28+3+6}{6} = \mathbf{\frac{37}{6}}$$

（2）　与式 $= \int_1^3 \left(1 - \frac{4}{x} + \frac{4}{x^2}\right)\,dx$

$$= \int_1^3 dx - 4\int_1^3 \frac{1}{x}\,dx + 4\int_1^3 \frac{1}{x^2}\,dx$$
$$= \Big[x\Big]_1^3 - 4\Big[\log|x|\Big]_1^3 + 4\left[-\frac{1}{x}\right]_1^3$$
$$= (3-1) - 4(\log|3| - \log|1|) - 4\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{1}\right)$$
$$= 2 - 4(\log 3 - 0) - 4\cdot\left(-\frac{2}{3}\right)$$
$$= 2 - 4\log 3 + \frac{8}{3}$$
$$= \mathbf{\frac{14}{3} - 4\log 3}$$

〔または〕

与式 $= \int_1^3 \left(1 - \frac{4}{x} + \frac{4}{x^2}\right)\,dx$

$$= \left[x - 4\log|x| - \frac{4}{x}\right]_1^3$$
$$= \left(3 - 4\log|3| - \frac{4}{3}\right) - \left(1 - 4\log|1| - \frac{4}{1}\right)$$
$$= \left(\frac{5}{3} - 4\log 3\right) - (-3 - 4\cdot 0)$$
$$= \mathbf{\frac{14}{3} - 4\log 3}$$

（3）　与式 $= 3\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \cos x\,dx + 2\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \sin x\,dx$

$$= 3\Big[\sin x\Big]_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} + 2\Big[-\cos x\Big]_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}$$
$$= 3\left(\sin\frac{\pi}{3} - \sin\frac{\pi}{6}\right) + 2\left(-\cos\frac{\pi}{3} + \cos\frac{\pi}{6}\right)$$
$$= 3\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}\right) + 2\left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$
$$= \frac{3\sqrt{3} - 3 - 2 + 2\sqrt{3}}{2}$$
$$= \mathbf{\frac{5\sqrt{3} - 5}{2}}$$

〔または〕

与式 $= \Big[3\sin x - 2\cos x\Big]_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}$

$$= \left(3\sin\frac{\pi}{3} - 2\cos\frac{\pi}{3}\right) - \left(3\sin\frac{\pi}{6} - 2\cos\frac{\pi}{6}\right)$$
$$= \left(3\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} - 2\cdot\frac{1}{2}\right) - \left(3\cdot\frac{1}{2} - 2\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$
$$= \frac{3\sqrt{3} - 2}{2} - \frac{3 - 2\sqrt{3}}{2}$$
$$= \mathbf{\frac{5\sqrt{3} - 5}{2}}$$

（4） 与式 $= \int_0^1 (e^{2x} + 2e^x \cdot e^{-x} + e^{-2x})\,dx$

$= \int_0^1 (e^{2x} + e^{-2x} + 2)\,dx$

$= \int_0^1 e^{2x}\,dx + \int_0^1 e^{-2x}\,dx + 2\int_0^1 dx$

$= \left[\frac{1}{2}e^x\right]_0^1 + \left[-\frac{1}{2}e^{-2x}\right]_0^1 + 2\left[x\right]_0^1$

$= \frac{1}{2}(e^2 - e^0) - \frac{1}{2}(e^{-2} - e^0) + 2(1-0)$

$= \frac{1}{2}e^2 - \frac{1}{2} - \frac{1}{2}e^{-2} + \frac{1}{2} + 2$

$= \boldsymbol{\frac{1}{2}e^2 - \frac{1}{2}e^{-2} + 2}$

〔または〕

与式 $= \int_0^1 (e^{2x} + 2e^x \cdot e^{-x} + e^{-2x})\,dx$

$= \int_0^1 (e^{2x} + e^{-2x} + 2)\,dx$

$= \left[\frac{1}{2}e^{2x} - \frac{1}{2}e^{-2x} + 2x\right]_0^1$

$= \left(\frac{1}{2}e^2 - \frac{1}{2}e^{-2} + 2\right) - \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2} + 0\right)$

$= \boldsymbol{\frac{1}{2}e^2 - \frac{1}{2}e^{-2} + 2}$

145（1）　x^3, x は奇関数，x^2, 3 は偶関数であるから

与式 $= 2\int_0^3 (x^2+3)\,dx$

$= 2\left[\frac{1}{3}x^3 + 3x\right]_0^3$

$= 2\left\{\left(\frac{1}{3}\cdot 3^3 + 3\cdot 3\right) - 0\right\}$

$= 2\cdot 18 = \mathbf{36}$

（2）　$\sin x$ は奇関数，$\cos x$ は偶関数であるから

与式 $= 2\int_0^{\frac{\pi}{6}} (-4\cos x)\,dx$

$= -8\left[\sin x\right]_0^{\frac{\pi}{6}}$

$= -8\left(\sin\frac{\pi}{6} - \sin 0\right)$

$= -8\cdot\frac{1}{2} = \mathbf{-4}$

146（1）　区間 $[0,\ 2]$ において，$x^2 \geqq 0$ であるから，求める図形の面積を S とすると

$S = \int_0^2 x^2\,dx$

$= \left[\frac{1}{3}x^3\right]_0^2$

$= \frac{1}{3}(2^3 - 0^3)$

$= \frac{1}{3}\cdot 8 = \boldsymbol{\frac{8}{3}}$

（2）　区間 $\frac{\pi}{6} \leqq x \leqq \frac{\pi}{2}$ において，$\sin x > 0$ であるから，求める図形の面積を S とすると

$S = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \sin x\,dx$

$= \left[-\cos x\right]_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}$

$= -\cos\frac{\pi}{2} - \left(-\cos\frac{\pi}{6}\right)$

$= 0 + \frac{\sqrt{3}}{2} = \boldsymbol{\frac{\sqrt{3}}{2}}$

147（1）曲線と x 軸との交点を求めると

$x^2 - 1 = 0$

$(x+1)(x-1) = 0$

よって，$x = -1,\ 1$

区間 $[-1,\ 1]$ において，$x^2 - 1 \leqq 0$ であり，$x^2 - 1$ は偶関数であるから，求める図形の面積を S とすると

$S = -\int_{-1}^1 (x^2-1)\,dx$

$= -2\int_0^1 (x^2-1)\,dx$

$= -2\left[\frac{1}{3}x^3 - x\right]_0^1$

$= -2\left\{\left(\frac{1}{3} - 1\right) - 0\right\}$

$= -2\cdot\left(-\frac{2}{3}\right) = \boldsymbol{\frac{4}{3}}$

（2）$-\pi \leqq x \leqq 0$，すなわち，$-\frac{\pi}{2} \leqq \frac{x}{2} \leqq 0$ における，曲線と x 軸との交点を求めると

$\sin\frac{x}{2} = 0$

$\frac{x}{2} = 0$

よって，$x = 0$

$-\pi \leqq x \leqq 0$ において，$\sin\frac{x}{2} \leqq 0$ であるから，求める図形の面積を S とすると

$S = -\int_{-\frac{\pi}{2}}^0 \sin\frac{x}{2}\,dx$

$= -\left[\frac{1}{\frac{1}{2}}\cdot\left(-\cos\frac{x}{2}\right)\right]_{-\frac{\pi}{2}}^0$

$= 2\left[\cos\frac{x}{2}\right]_{-\frac{\pi}{2}}^0$

$= 2\left(\cos 0 - \cos\frac{-\frac{\pi}{2}}{2}\right)$

$= 2\left\{1 - \cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right\}$

$= 2\left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \mathbf{2 - \sqrt{2}}$

148　C は積分定数

（1）　与式 $= \int\left(\sin x + \frac{1}{\sin^2 x}\right)dx$

$= -\cos x + (-\cot x) + C$

$= \boldsymbol{-\cos x - \cot x + C}$

（2）　与式 $= \int\left(\frac{1}{\sin^2 x} - \frac{1}{\cos^2 x}\right)dx$

$= \boldsymbol{-\cot x - \tan x + C}$

149　C は積分定数

（1）　与式 $= \int \frac{dx}{\sqrt{5^2 - x^2}}$

$= \boldsymbol{\sin^{-1} \frac{x}{5} + C}$

（2）　与式 $= \boldsymbol{\log \left| x + \sqrt{x^2 - 3} \right| + C}$

（3）　与式 $= \int \frac{2(x^2+1)+1}{x^2+1}\, dx$

$= \int \left\{ \frac{2(x^2+1)}{x^2+1} + \frac{1}{x^2+1} \right\} dx$

$= \int \left(2 + \frac{1}{x^2+1^2} \right) dx$

$= \boldsymbol{2x + \tan^{-1} x + C}$

150（1）　与式 $= \int_0^3 \frac{dx}{\sqrt{6^2 - x^2}}\, dx$

$= \left[\sin^{-1} \frac{x}{6} \right]_0^3$

$= \sin^{-1} \frac{1}{2} - \sin^{-1} 0$

$= \frac{\pi}{6} - 0 = \boldsymbol{\frac{\pi}{6}}$

（2）　与式 $= \left[\log \left| x + \sqrt{x^2+9} \right| \right]_0^{\sqrt{3}}$

$= \log \left| \sqrt{3} + \sqrt{(\sqrt{3})^2 + 9} \right| - \log \left| 0 + \sqrt{0+9} \right|$

$= \log(\sqrt{3} + \sqrt{12}) - \log 3$

$= \log(\sqrt{3} + 2\sqrt{3}) - \log 3$

$= \log \frac{3\sqrt{3}}{3}$

$= \log \sqrt{3} = \log 3^{\frac{1}{2}} = \boldsymbol{\frac{1}{2} \log 3}$

（3）　与式 $= \int_{\frac{1}{3}}^1 \frac{1}{x^2 + \frac{1}{3}}\, dx$

$= \int_{\frac{1}{3}}^1 \frac{1}{x^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{3}} \right)^2}\, dx$

$= \left[\frac{1}{\frac{1}{\sqrt{3}}} \tan^{-1} \frac{x}{\frac{1}{\sqrt{3}}} \right]_{\frac{1}{3}}^1$

$= \left[\sqrt{3} \tan^{-1} \sqrt{3}x \right]_{\frac{1}{3}}^1$

$= \sqrt{3} \left(\tan^{-1} \sqrt{3} - \tan^{-1} \frac{\sqrt{3}}{3} \right)$

$= \sqrt{3} \left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{6} \right)$

$= \sqrt{3} \cdot \frac{\pi}{6} = \boldsymbol{\frac{\sqrt{3}}{6}\pi}$

CHECK

151　C は積分定数

（1）　与式 $= 2 \cdot \frac{1}{4}x^4 + 3 \cdot \frac{1}{3}x^3 - 4 \cdot \frac{1}{2}x^2 + 5x + C$

$= \boldsymbol{\frac{1}{2}x^4 + x^3 - 2x^2 + 5x + C}$

（2）　与式 $= \int \left\{ (x\sqrt{x})^2 + 2x\sqrt{x} \cdot \frac{1}{\sqrt{x}} + \left(\frac{1}{\sqrt{x}} \right)^2 \right\} dx$

$= \int \left(x^3 + 2x + \frac{1}{x} \right) dx$

$= \frac{1}{4}x^3 + 2 \cdot \frac{1}{2}x^2 + \log |x| + C$

$= \boldsymbol{\frac{1}{4}x^4 + x^2 + \log x + C}$

※ $\frac{1}{\sqrt{x}}$ が被積分関数に含まれるので，$x > 0$ であるから，
$\log |x| = \log x$

（3）　与式 $= \int (2x+3)^{-\frac{1}{3}}\, dx$

$= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\frac{2}{3}} (2x+3)^{\frac{2}{3}} + C$

$= \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2} \sqrt[3]{(2x+3)^2} + C$

$= \boldsymbol{\frac{3}{4} \sqrt[3]{(2x+3)^2} + C}$

（4）　与式 $= 2 \cdot \frac{1}{4} \sin(4x+1) - \frac{1}{2} \cdot (-\cos 2x) + C$

$= \boldsymbol{\frac{1}{2} \sin(4x+1) + \frac{1}{2} \cos 2x + C}$

（5）　与式 $= 2\int (1-3x)^{-1}\, dx$

$= 2 \cdot \frac{1}{-3} \cdot \log |1-3x| + C$

$= \boldsymbol{-\frac{2}{3} \log |1-3x| + C}$

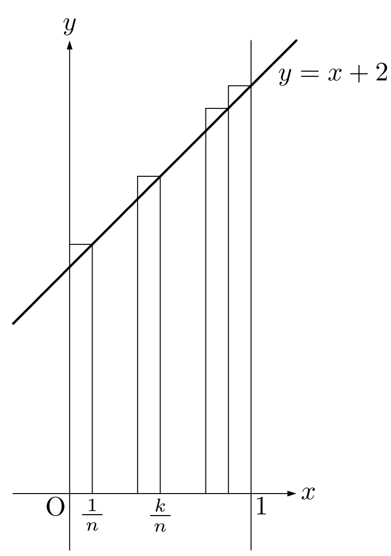
（6）　与式 $= \int \left(\frac{e^{2x}}{e^x} + \frac{e^{-2x}}{e^x} \right) dx$

$= \int (e^x + e^{-3x})\, dx$

$= e^x + \frac{1}{-3} e^{-3x} + C$

$= \boldsymbol{e^x - \frac{1}{3} e^{-3x} + C}$

152



$f(x) = x + 2$ とおく．区間 $[0,\ 1]$ を n 等分して
$x_k = \frac{k}{n},\ \Delta x_k = \frac{1}{n} (k = 1, 2, \cdots, n)$ とすると

$$S_\Delta = \sum_{k=1}^{n} f(x_k)\Delta x_k$$
$$= \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k}{n}+2\right)\cdot\frac{1}{n} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k}{n}+2\right)$$
$$= \frac{1}{n}\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n}+\sum_{k=1}^{n}2\right)$$
$$= \frac{1}{n}\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}k+2n\right)$$
$$= \frac{1}{n}\left\{\frac{1}{n}\cdot\frac{1}{2}n(n+1)+2n\right\}$$
$$= \frac{n+1}{2n}+2 = \frac{1}{2}+\frac{1}{2n}+2$$
$$= \frac{5}{2}+\frac{1}{2n}$$

$\Delta x_k \to 0$ のとき，$n \to \infty$ であるから

$$\int_0^1 (x+2)\,dx = \lim_{n\to\infty} S_\Delta$$
$$= \lim_{n\to\infty}\left(\frac{5}{2}+\frac{1}{2n}\right) = \frac{5}{2}+0 = \boldsymbol{\frac{5}{2}}$$

153（1） 与式 $= \left[\frac{1}{4}x^4-\frac{2}{3}x^3-\frac{3}{2}x^2+x\right]_{-1}^{3}$

$$= \left(\frac{1}{4}\cdot 3^4-\frac{2}{3}\cdot 3^3-\frac{3}{2}\cdot 3^2+3\right)$$
$$-\left\{\frac{1}{4}\cdot(-1)^4-\frac{2}{3}\cdot(-1)^3-\frac{3}{2}\cdot(-1)^2+(-1)\right\}$$
$$= \left(\frac{81}{4}-18-\frac{27}{2}+3\right)-\left(\frac{1}{4}+\frac{2}{3}-\frac{3}{2}-1\right)$$
$$= \frac{80}{4}-\frac{2}{3}-\frac{24}{2}-14$$
$$= 20-\frac{2}{3}-12-14$$
$$= -6-\frac{2}{3} = \boldsymbol{-\frac{20}{3}}$$

（2） 与式 $= \int_1^4\left(x^{\frac{1}{2}}+\frac{1}{x}\right)dx$

$$= \left[\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}+\log|x|\right]_1^4$$
$$= \left[\frac{2}{3}x\sqrt{x}+\log|x|\right]_1^4$$
$$= \left(\frac{2}{3}\cdot 4\sqrt{4}+\log|4|\right)-\left(\frac{2}{3}\cdot 1\sqrt{1}+\log|1|\right)$$
$$= \left(\frac{2}{3}\cdot 8+\log 4\right)-\left(\frac{2}{3}\cdot 1+\log 1\right)$$
$$= \left(\frac{16}{3}+2\log 2\right)-\left(\frac{2}{3}+0\right)$$
$$= \boldsymbol{\frac{14}{3}+2\log 2}$$

（3） 与式 $= \int_{\frac{1}{3}}^{3}(3x-1)^{\frac{1}{3}}\,dx$

$$= \left[\frac{1}{3}\cdot\frac{3}{4}(3x-1)^{\frac{4}{3}}\right]_{\frac{1}{3}}^{3}$$
$$= \frac{1}{4}\left[(3x-1)\sqrt[3]{3x-1}\right]_{\frac{1}{3}}^{3}$$
$$= \frac{1}{4}\left\{(3\cdot 3-1)\sqrt[3]{3\cdot 3-1}-\left(3\cdot\frac{1}{3}-1\right)\sqrt[3]{3\cdot\frac{1}{3}-1}\right\}$$
$$= \frac{1}{4}(8\sqrt[3]{8}-0)$$
$$= \frac{1}{4}\cdot 8\cdot 2 = \mathbf{4}$$

（4） 与式 $= \int_{-1}^{1}(3x+5)^{-2}\,dx$

$$= \left[\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{-1}(3x-5)^{-1}\right]_{-1}^{1}$$
$$= -\frac{1}{3}\left[\frac{1}{3x-5}\right]_{-1}^{1}$$
$$= -\frac{1}{3}\left\{\frac{1}{3\cdot 1-5}-\frac{1}{3\cdot(-1)-5}\right\}$$
$$= -\frac{1}{3}\left(-\frac{1}{2}+\frac{1}{8}\right)$$
$$= -\frac{1}{3}\left(-\frac{4}{8}+\frac{1}{8}\right)$$
$$= -\frac{1}{3}\cdot\left(-\frac{3}{8}\right) = \boldsymbol{\frac{1}{8}}$$

（5） 与式 $= \left[2\cdot(-\cos x)-\frac{1}{2}\sin 2x\right]_0^{\frac{\pi}{3}}$

$$= -\left[2\cos x+\frac{1}{2}\sin 2x\right]_0^{\frac{\pi}{3}}$$
$$= -\left\{\left(2\cos\frac{\pi}{3}+\frac{1}{2}\sin\frac{2}{3}\pi\right)-\left(2\cos 0+\frac{1}{2}\sin 0\right)\right\}$$
$$= -\left\{\left(2\cdot\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\right)-(2\cdot 1+0)\right\}$$
$$= -\left(1+\frac{\sqrt{3}}{4}-2\right)$$
$$= -\left(-1+\frac{\sqrt{3}}{4}\right) = \boldsymbol{1-\frac{\sqrt{3}}{4}}$$

（6） 与式 $= \int_0^1(e^{2x}+2e^x+1)\,dx$

$$= \left[\frac{1}{2}e^{2x}+2e^x+x\right]_0^1$$
$$= \left(\frac{1}{2}\cdot e^2+2\cdot e^1+1\right)-\left(\frac{1}{2}e^0+2\cdot e^0+0\right)$$
$$= \frac{1}{2}e^2+2e+1-\frac{1}{2}-2$$
$$= \boldsymbol{\frac{1}{2}e^2+2e-\frac{3}{2}}$$

154（1） $2x^3$，$-3x$ は奇関数，$-x^2$，$+1$ は偶関数であるから

与式 $= 2\int_0^3(-x^2+1)\,dx$

$$= 2\left[-\frac{1}{3}x^3+x\right]_0^3$$
$$= 2\left\{\left(-\frac{1}{3}\cdot 3^3+3\right)-0\right\}$$
$$= 2(-9+3) = 2\cdot(-6) = \mathbf{-12}$$

（2） $\sin 2x$ は奇関数，$\cos 3x$ は偶関数であるから

与式 $= 2\int_0^{\frac{\pi}{6}}(3\cos 3x)\,dx$

$$= 6\left[\frac{1}{3}\sin 3x\right]_0^{\frac{\pi}{6}}$$
$$= 2\left(\sin\frac{\pi}{2}-\sin 0\right)$$
$$= 2\cdot 1 = \mathbf{2}$$

（3）　$f(x) = e^x - e^{-x}$ とおくと

$$f(-x) = e^{-x} - e^{-(-x)}$$
$$= e^{-x} - e^x$$
$$= -(e^x - e^{-x}) = -f(x)$$

よって，$f(x)$ は奇関数であるから，与式 $= \mathbf{0}$

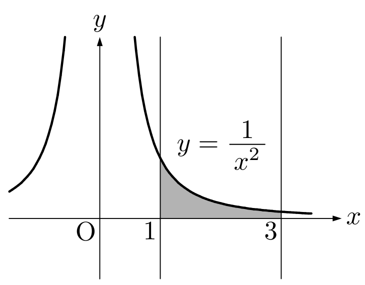
（4）　$f(x) = (e^x - e^{-x})^2$ とおくと

$$f(-x) = \{e^{-x} - e^{-(-x)}\}^2$$
$$= (e^{-x} - e^x)^2$$
$$= \{-(e^x - e^{-x})\}^2$$
$$= (e^x - e^{-x})^2 = f(x)$$

よって，$f(x)$ は偶関数であるから

$$与式 = 2\int_0^{\frac{1}{2}} (e^x - e^{-x})^2\,dx$$
$$= 2\int_0^{\frac{1}{2}} (e^{2x} - 2 + e^{-2x})\,dx$$
$$= 2\left[\frac{1}{2}e^{2x} - 2x - \frac{1}{2}e^{-2x}\right]_0^{\frac{1}{2}}$$
$$= 2\left\{\left(\frac{1}{2}e^1 - 2\cdot\frac{1}{2} - \frac{1}{2}e^{-1}\right) - \left(\frac{1}{2}e^0 - 0 - \frac{1}{2}e^0\right)\right\}$$
$$= 2\left(\frac{1}{2}e - 1 - \frac{1}{2}e^{-1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\right)$$
$$= 2\left(\frac{1}{2}e - 1 - \frac{1}{2}e^{-1}\right)$$
$$= \boldsymbol{e - \frac{1}{e} - 2}$$

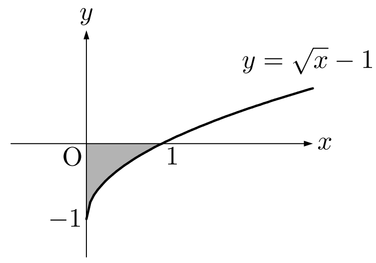
155（1）　区間 $[1,\ 3]$ において，$\dfrac{1}{x^2} \geqq 0$ であるから，求める図形の面積を S とすると



$$S = \int_1^3 \frac{1}{x^2}\,dx$$
$$= \int_1^3 x^{-2}\,dx$$
$$= \left[\frac{1}{-1}x^{-1}\right]_1^3$$
$$= \left[-\frac{1}{x}\right]_1^3$$
$$= -\frac{1}{3} - \left(-\frac{1}{1}\right)$$
$$= -\frac{1}{3} + 1 = \boldsymbol{\frac{2}{3}}$$

（2）　曲線と x 軸との交点の x 座標は，$y = \sqrt{x} - 1$ において，$y = 0$ とすれば

$$0 = \sqrt{x} - 1$$
$$\sqrt{x} = 1$$
$$x = 1$$



区間 $[0,\ 1]$ において，$\sqrt{x} - 1 \leqq 0$ であるから，求める図形の面積を S とすると

$$S = -\int_0^1 (\sqrt{x} - 1)\,dx$$
$$= -\int_0^1 (x^{\frac{1}{2}} - 1)\,dx$$
$$= -\left[\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} - x\right]_0^1$$
$$= -\left[\frac{2}{3}x\sqrt{x} - x\right]_0^1$$
$$= -\left\{\left(\frac{2}{3}\cdot 1\sqrt{1} - 1\right) - 0\right\}$$
$$= -\left(\frac{2}{3} - 1\right) = -\left(-\frac{1}{3}\right) = \boldsymbol{\frac{1}{3}}$$

156　C は積分定数

（1）

$$与式 = \int \frac{dx}{\sqrt{3\left(\frac{4}{3} - x^2\right)}}$$
$$= \frac{1}{\sqrt{3}}\int \frac{dx}{\sqrt{\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^2 - x^2}}$$
$$= \frac{1}{\sqrt{3}}\sin^{-1}\frac{x}{\frac{2}{\sqrt{3}}} + C$$
$$= \boldsymbol{\frac{1}{\sqrt{3}}\sin^{-1}\frac{\sqrt{3}}{2}x + C}$$

（2）

$$与式 = \log\left|x + \sqrt{x^2 + 3}\right| + C$$
$$= \boldsymbol{\log(x + \sqrt{x^2 + 3}) + C}$$

（3）

$$与式 = \int \frac{\sin^2 2x}{\cos^2 2x}\,dx$$
$$= \int \frac{1 - \cos^2 2x}{\cos^2 2x}\,dx$$
$$= \int \left(\frac{1}{\cos^2 2x} - 1\right)dx$$
$$= \boldsymbol{\frac{1}{2}\tan 2x - x + C}$$

（4）

$$与式 = \int \frac{x(x^2 + 1) + 4}{x^2 + 1}\,dx$$
$$= \int \left\{\frac{x(x^2 + 1)}{x^2 + 1} + \frac{4}{x^2 + 1}\right\}dx$$
$$= \int \left(x + \frac{4}{x^2 + 1^2}\right)dx$$
$$= \boldsymbol{\frac{1}{2}x^2 + 4\tan^{-1}x + C}$$

157（1）

$$与式 = \int_1^{\sqrt{3}} \frac{dx}{\sqrt{2^2 - x^2}}\,dx$$

$$= \left[\sin^{-1}\frac{x}{2}\right]_1^{\sqrt{3}}$$

$$= \sin^{-1}\frac{\sqrt{3}}{2} - \sin^{-1}\frac{1}{2}$$

$$= \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{6} = \boldsymbol{\frac{\pi}{6}}$$

（2）

$$与式 = \int_0^1 \frac{dx}{x^2 + (\sqrt{3})^2}\,dx$$

$$= \left[\frac{1}{\sqrt{3}}\tan^{-1}\frac{x}{\sqrt{3}}\right]_0^1$$

$$= \frac{1}{\sqrt{3}}\left(\tan^{-1}\frac{1}{\sqrt{3}} - \tan 0\right)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{3}}\left(\frac{\pi}{6} - 0\right) = \boldsymbol{\frac{\pi}{6\sqrt{3}}}$$

（3）

$$与式 = \left[\log\left|x + \sqrt{x^2+1}\right|\right]_0^1$$

$$= \log\left|1 + \sqrt{1^2+1}\right| - \log\left|0 + \sqrt{0+1}\right|$$

$$= \log(1+\sqrt{2}) - \log 1$$

$$= \log(1+\sqrt{2}) - 0 = \boldsymbol{\log(1+\sqrt{2})}$$

（4）

$$与式 = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \left(\frac{3}{\sin^2 x} - \sin x\right)dx$$

$$= \left[-3\cot x + \cos x\right]_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}}$$

$$= \left(-3\cot\frac{\pi}{4} + \cos\frac{\pi}{4}\right) - \left(-3\cot\frac{\pi}{6} + \cos\frac{\pi}{6}\right)$$

$$= \left(-3\cdot 1 + \frac{1}{\sqrt{2}}\right) - \left(-3\cdot\sqrt{3} + \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

$$= -3 + \frac{1}{\sqrt{2}} + 3\sqrt{3} - \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$= \boldsymbol{-3 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{5\sqrt{3}}{2}}$$

STEP UP

158　C は積分定数

（1）

$$与式 = \int \frac{\sqrt{x+1} + \sqrt{x}}{(\sqrt{x+1} - \sqrt{x})(\sqrt{x+1} + \sqrt{x})}\,dx$$

$$= \int \frac{\sqrt{x+1} + \sqrt{x}}{(x+1) - x}\,dx$$

$$= \int (\sqrt{x+1} + \sqrt{x})\,dx$$

$$= \int \{(x+1)^{\frac{1}{2}} + x^{\frac{1}{2}}\}\,dx$$

$$= \frac{2}{3}(x+1)^{\frac{3}{2}} + \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} + C$$

$$= \frac{2}{3}\sqrt{(x+1)^3} + \frac{2}{3}\sqrt{x^3} + C$$

$$= \boldsymbol{\frac{2}{3}\{(x+1)\sqrt{x+1} + x\sqrt{x}\} + C}$$

（2）

$$与式 = \int \frac{(\sqrt[3]{x})^3 - 1^3}{\sqrt[3]{x} - 1}\,dx$$

$$= \int \frac{(\sqrt[3]{x} - 1)\{(\sqrt[3]{x})^2 + \sqrt[3]{x} + 1\}}{\sqrt[3]{x} - 1}\,dx$$

$$= \int \{(\sqrt[3]{x})^2 + \sqrt[3]{x} + 1\}\,dx$$

$$= \int (x^{\frac{2}{3}} + x^{\frac{1}{3}} + 1)\,dx$$

$$= \frac{3}{5}x^{\frac{5}{3}} + \frac{3}{4}x^{\frac{4}{3}} + x + C$$

$$= \frac{3}{5}\sqrt[3]{x^5} + \frac{3}{4}\sqrt[3]{x^4} + x + C$$

$$= \boldsymbol{\frac{3}{5}x\sqrt[3]{x^2} + \frac{3}{4}x\sqrt[3]{x} + x + C}$$

（3）

$$与式 = \int \frac{x(1 - \sqrt{x+1})}{(1 + \sqrt{x+1})(1 - \sqrt{x+1})}\,dx$$

$$= \int \frac{x(1 - \sqrt{x+1})}{1 - (x+1)}\,dx$$

$$= \int \frac{x(1 - \sqrt{x+1})}{-x}\,dx$$

$$= \int (\sqrt{x+1} - 1)\,dx$$

$$= \int ((x+1)^{\frac{1}{2}} - 1)\,dx$$

$$= \frac{2}{3}(x+1)^{\frac{3}{2}} - x + C$$

$$= \frac{2}{3}\sqrt{(x+1)^3} - x + C$$

$$= \boldsymbol{\frac{2}{3}(x+1)\sqrt{x+1} - x + C}$$

（4）

$$与式 = \int \frac{x(\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x})}{(\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x})(\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x})}\,dx$$

$$= \int \frac{x(\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x})}{(1+x) - (1-x)}\,dx$$

$$= \int \frac{x(\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x})}{2x}\,dx$$

$$= \int \frac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}{2}\,dx$$

$$= \frac{1}{2}\int (\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x})\,dx$$

$$= \frac{1}{2}\int \{(1+x)^{\frac{1}{2}} - (1-x)^{\frac{1}{2}}\}\,dx$$

$$= \frac{1}{2}\left\{\frac{2}{3}(1+x)^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{-1}\cdot\frac{2}{3}(1-x)^{\frac{3}{2}}\right\} + C$$

$$= \frac{1}{3}\{\sqrt{(1+x)^3} + \sqrt{(1-x)^3}\} + C$$

$$= \boldsymbol{\frac{1}{3}\{(1+x)\sqrt{(1+x)} + (1-x)\sqrt{(1-x)}\} + C}$$

（5）

$$与式 = \int \frac{(\sqrt{x})^2 - 1}{\sqrt{x} + 1}\,dx$$

$$= \int \frac{(\sqrt{x} + 1)(\sqrt{x} - 1)}{\sqrt{x} + 1}\,dx$$

$$= \int (\sqrt{x} - 1)\,dx$$

$$= \int (x^{\frac{1}{2}} - 1)\,dx$$

$$= \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} - x + C = \boldsymbol{\frac{2}{3}x\sqrt{x} - x + C}$$

（6）

$$\text{与式} = \int \frac{(e^x)^2 - (e^{-x})^2}{e^x - e^{-x}}\,dx$$
$$= \int \frac{(e^x - e^{-x})(e^x + e^{-x})}{e^x - e^{-x}}\,dx$$
$$= \int (e^x + e^{-x})\,dx$$
$$= e^x + \frac{1}{-1}\cdot e^{-x} + C$$
$$= \boldsymbol{e^x - e^{-x} + C}$$

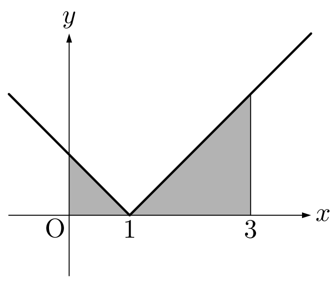
159（1）　積分区間 $0 \leqq x \leqq 3$ において

$x - 1 \leqq 0$，すなわち，$0 \leqq x \leqq 1$ のとき

$|\,x-1\,| = -(x-1)$

$x - 1 \geqq 0$，すなわち，$1 \leqq x \leqq 3$ のとき

$|\,x-1\,| = x-1$



よって

$$\text{与式} = \int_0^1 \{-(x-1)\}\,dx + \int_1^3 (x-1)\,dx$$
$$= -\int_0^1 (x-1)\,dx + \int_1^3 (x-1)\,dx$$
$$= -\left[\frac{1}{2}x^2 - x\right]_0^1 + \left[\frac{1}{2}x^2 - x\right]_1^3$$
$$= -\left\{\left(\frac{1}{2} - 1\right) - 0\right\} + \left\{\left(\frac{9}{2} - 3\right) - \left(\frac{1}{2} - 1\right)\right\}$$
$$= \frac{1}{2} + \left(\frac{3}{2} + \frac{1}{2}\right)$$
$$= \frac{1+3+1}{2} = \boldsymbol{\frac{5}{2}}$$

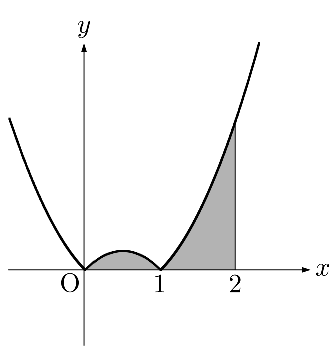
（2）　$|\,x^2 - x\,| = |\,x(x-1)\,|$ であるから，積分区間 $0 \leqq x \leqq 2$ において

$x(x-1) \leqq 0$，すなわち，$0 \leqq x \leqq 1$ のとき

$|\,x^2 - x\,| = -(x^2 - x)$

$x(x-1) \geqq 0$，すなわち，$1 \leqq x \leqq 2$ のとき

$|\,x^2 - x\,| = x^2 - x$



よって

$$\text{与式} = \int_0^1 \{-(x^2 - x)\}\,dx + \int_1^2 (x^2 - x)\,dx$$
$$= -\int_0^1 (x^2 - x)\,dx + \int_1^2 (x^2 - x)\,dx$$
$$= -\left[\frac{1}{3}x^2 - \frac{1}{2}x^2\right]_0^1 + \left[\frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2\right]_1^2$$
$$= -\left\{\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{2}\right) - 0\right\}$$
$$+ \left\{\left(\frac{8}{3} - 2\right) - \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{2}\right)\right\}$$
$$= \frac{1}{6} + \left(\frac{2}{3} + \frac{1}{6}\right)$$
$$= \frac{1+4+1}{6} = \boldsymbol{1}$$

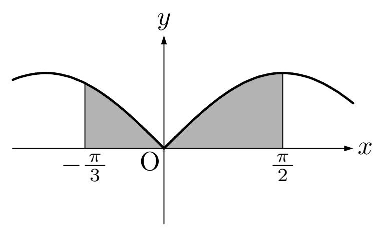
（3）　積分区間 $-\frac{\pi}{3} \leqq x \leqq \frac{\pi}{2}$ において

$\sin x \leqq 0$，すなわち，$-\frac{\pi}{3} \leqq x \leqq 0$ のとき

$|\,\sin x\,| = -(\sin x)$

$\sin x \geqq 0$，すなわち，$0 \leqq x \leqq \frac{\pi}{2}$ のとき

$|\,\sin x\,| = \sin x$



よって

$$\text{与式} = \int_{-\frac{\pi}{3}}^0 (-\sin x)\,dx + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x\,dx$$
$$= \Big[\cos x\Big]_{-\frac{\pi}{3}}^0 - \Big[\cos x\Big]_0^{\frac{\pi}{2}}$$
$$= \left(1 - \frac{1}{2}\right) - (0 - 1)$$
$$= \frac{1}{2} + 1 = \boldsymbol{\frac{3}{2}}$$

（4）

$$|\,\cos x - \sin 2x\,| = |\,\cos x - 2\sin x\cos x\,|$$
$$= |\,\cos x(1 - 2\sin x)\,|$$

積分区間 $0 \leqq x \leqq \frac{\pi}{2}$ において，$\cos x \geqq 0$ であるから

$1 - 2\sin x \leqq 0$ より，$\sin x \geqq \frac{1}{2}$ のとき，

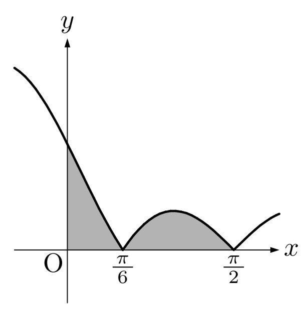
すなわち，$\frac{\pi}{6} \leqq x \leqq \frac{\pi}{2}$ のとき

$|\,\cos x - \sin 2x\,| = -(\cos x - \sin 2x)$

$1 - 2\sin x \geqq 0$ より，$\sin x \leqq \frac{1}{2}$ のとき，

すなわち，$0 \leqq x \leqq \frac{\pi}{6}$ のとき

$|\,\cos x - \sin 2x\,| = \cos x - \sin 2x$



よって

$$与式 = \int_0^{\frac{\pi}{6}} (\cos x - \sin 2x)\,dx + \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \{-(\cos x - \sin 2x)\}\,dx$$

$$= \left[\sin x + \frac{1}{2}\cos 2x\right]_0^{\frac{\pi}{6}} - \left[\sin x + \frac{1}{2}\cos 2x\right]_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= \left\{\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\right) - \left(0 + \frac{1}{2}\right)\right\} - \left\{\left(1 + \frac{1}{2}\cdot(-1)\right) - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\right)\right\}$$

$$= \left(\frac{3}{4} - \frac{1}{2}\right) - \left(\frac{1}{2} - \frac{3}{4}\right)$$

$$= \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \mathbf{\frac{1}{2}}$$

160（1）　$0 \leqq \sin^2 x \leqq 1$ より，$1 + 0 \leqq 1 + \sin^2 x \leqq 1 + 1$

すなわち，$1 \leqq 1 + \sin^2 x \leqq 2$ であるから

$$1 \geqq \frac{1}{1+\sin^2 x} \geqq \frac{1}{2}$$

これより，$\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{2}\,dx \leqq \int_0^1 \frac{1}{1+\sin^2 x}\,dx \leqq \int_0^1 1\,dx$

$0 \leqq x \leqq 1$ において，$\dfrac{1}{2}$，$\dfrac{1}{1+\sin^2 x}$，1 は連続であり

$\dfrac{1}{2} < \dfrac{1}{1+\sin^2 x} < 1$ となる点があるから

$$\int_0^1 \frac{1}{2}\,dx < \int_0^1 \frac{1}{1+\sin^2 x}\,dx < \int_0^1 dx$$

ここで

$$\int_0^1 \frac{1}{2}\,dx = \left[\frac{1}{2}x\right]_0^1 = \frac{1}{2} - 0 = \frac{1}{2}$$

$$\int_0^1 dx = \Big[\,x\,\Big]_0^1 = 1 - 0 = 1$$

以上より，$\dfrac{1}{2} < \displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{1+\sin^2 x} < 1$

（2）　$0 \leqq x \leqq \dfrac{1}{2}$ において，$0 \leqq x^3 \leqq x^2$ であるから

$$0 \geqq -x^3 \geqq -x^2$$

これより，$1 \geqq 1 - x^3 \geqq 1 - x^2$

さらに，$\sqrt{1} \geqq \sqrt{1-x^3} \geqq \sqrt{1-x^2}$ より

$$1 \leqq \frac{1}{\sqrt{1-x^3}} \leqq \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

これより

$$\int_0^{\frac{1}{2}} 1\,dx \leqq \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{\sqrt{1-x^3}}\,dx \leqq \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$$

$0 \leqq x \leqq \dfrac{1}{2}$ において，1，$\dfrac{1}{\sqrt{1+x^3}}$，$\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ は連続であり

$1 < \dfrac{1}{\sqrt{1+x^3}} < \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ となる点があるから

$$\int_0^{\frac{1}{2}} dx < \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{\sqrt{1-x^3}}\,dx < \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$$

ここで

$$\int_0^{\frac{1}{2}} dx = \Big[\,x\,\Big]_0^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} - 0 = \frac{1}{2}$$

$$\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \Big[\sin^{-1} x\Big]_0^{\frac{1}{2}} = \sin^{-1}\frac{1}{2} - \sin^{-1} 0 = \frac{\pi}{6} - 0 = \frac{\pi}{6}$$

以上より，$\dfrac{1}{2} < \displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{\sqrt{1-x^3}} < \frac{\pi}{6}$

161（1）　$\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(t)\,dt$ は定数となるから，$\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(t)\,dt = c$　$\cdots$① とおくと

$$f(x) = \cos x + c \quad \cdots②$$

これを，① に代入すると，$\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos t + c)\,dt = c$

よって

$$c = \Big[\sin t + ct\Big]_0^{\frac{\pi}{2}} = \sin\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2}c - 0 = 1 + \frac{\pi}{2}c$$

これより，$c(\pi - 2) = -2$

$\pi - 2 \fallingdotseq 0$ より，$c = -\dfrac{2}{\pi - 2}$

したがって，② より，$\boldsymbol{f(x) = \cos x - \dfrac{2}{\pi - 2}}$

（2）　$\displaystyle\int_{-1}^1 x^2 f(t)\,dt$ において，x は，変数 t に依らない定数として扱えるので

$$\int_{-1}^1 x^2 f(t)\,dt = x^2\int_{-1}^1 f(t)\,dt$$

$\displaystyle\int_{-1}^1 f(t)\,dt$ は定数となるから，$\displaystyle\int_{-1}^1 f(t)\,dt = c$　$\cdots$① とおくと

$$f(x) = 1 + x^2 \cdot c = cx^2 + 1 \quad \cdots②$$

これを，① に代入すると，$\displaystyle\int_{-1}^1 (ct^2 + 1)\,dt = c$

よって

$$c = 2\int_0^1 (ct^2 + 1)\,dt = 2\left[\frac{1}{3}ct^3 + t\right]_0^1 = 2\left\{\left(\frac{1}{3}c + 1\right) - 0\right\} = \frac{2}{3}c + 2$$

これより，$\dfrac{1}{3}c = 2$，すなわち，$c = 6$

したがって，② より，$\boldsymbol{f(x) = 6x^2 + 1}$

■