4章　複素関数

§1　正則関数 (p.47〜p.)

BASIC

172　それぞれの複素数を z とする.

(1)
$$z = 4+4i+i^2 = 4+4i-1 = 3+4i$$
よって, $\mathrm{Re}(z) = \mathbf{3}$, $\mathrm{Im}(z) = \mathbf{4}$
$$|z| = \sqrt{3^2+4^2} = \sqrt{9+16} = \sqrt{25} = \mathbf{5}$$
$$\bar{z} = \overline{3+4i} = \mathbf{3-4}\boldsymbol{i}$$

(2)
$$z = 4+2i-6i-3i^2 = 4-4i+3 = 7-4i$$
よって, $\mathrm{Re}(z) = \mathbf{7}$, $\mathrm{Im}(z) = \mathbf{-4}$
$$|z| = \sqrt{7^2+(-4)^2} = \sqrt{49+16} = \boldsymbol{\sqrt{65}}$$
$$\bar{z} = \overline{7-4i} = \mathbf{7+4}\boldsymbol{i}$$

(3)
$$z = \frac{3-2i}{(3+2i)(3-2i)} = \frac{3-2i}{9-4i^2} = \frac{3-2i}{9+4} = \frac{3-2i}{13} = \frac{3}{13} - \frac{2}{13}i$$
よって, $\mathrm{Re}(z) = \boldsymbol{\frac{3}{13}}$, $\mathrm{Im}(z) = \boldsymbol{-\frac{2}{13}}$
$$|z| = \sqrt{\left(\frac{3}{13}\right)^2 + \left(-\frac{2}{13}\right)^2} = \sqrt{\frac{9}{13^2}+\frac{4}{13^2}} = \sqrt{\frac{13}{13^2}} = \boldsymbol{\frac{1}{\sqrt{13}}}$$
$$\bar{z} = \overline{\frac{3}{13} - \frac{2}{13}i} = \boldsymbol{\frac{3}{13} + \frac{2}{13}i}$$

(4)
$$z = \frac{(2+i)(1+3i)}{(1-3i)(1+3i)} = \frac{2+6i+i+3i^2}{1-9i^2} = \frac{2+7i-3}{1+9} = \frac{-1+7i}{10} = -\frac{1}{10} + \frac{7}{10}i$$
よって, $\mathrm{Re}(z) = \boldsymbol{-\frac{1}{10}}$, $\mathrm{Im}(z) = \boldsymbol{\frac{7}{10}}$
$$|z| = \sqrt{\left(-\frac{1}{10}\right)^2 + \left(\frac{7}{10}\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{10^2}+\frac{49}{10^2}} = \sqrt{\frac{50}{100}} = \sqrt{\frac{1}{2}} = \boldsymbol{\frac{1}{\sqrt{2}}}$$
$$\bar{z} = \overline{-\frac{1}{10} + \frac{7}{10}i} = \boldsymbol{-\frac{1}{10} - \frac{7}{10}i}$$

173　$z = x+yi$, $z_1 = x_1+y_1 i$, $z_2 = x_2+y_2 i$ とおくと,
$\mathrm{Re}(z) = x$, $\mathrm{Im}(z) = y$
$\mathrm{Re}(z_1) = x_1$, $\mathrm{Im}(z_1) = y_1$, 　$\mathrm{Re}(z_2) = x_2$, $\mathrm{Im}(z_2) = y_2$

(1)
$$\text{左辺} = \mathrm{Re}\big((x_1+y_1 i)+(x_2+y_2 i)\big) = \mathrm{Re}\big((x_1+x_2)+(y_1+y_2)i\big) = x_1+x_2 = \mathrm{Re}(z_1)+\mathrm{Re}(z_2) = \text{右辺}$$

(2)
$$\text{左辺} = \mathrm{Im}\big((x_1+y_1 i)-(x_2+y_2 i)\big) = \mathrm{Im}\big((x_1-x_2)+(y_1-y_2)i\big) = y_1-y_2 = \mathrm{Im}(z_1)-\mathrm{Im}(z_2) = \text{右辺}$$

(3)
$$\text{左辺} = \mathrm{Re}\big((x+yi)^2\big) = \mathrm{Re}(x^2+2xyi+y^2i^2) = \mathrm{Re}\big((x^2-y^2)+2xyi\big) = x^2-y^2 = \{\mathrm{Re}(z)\}^2 - \{\mathrm{Im}(z)\}^2 = \text{右辺}$$

(4)
$$\text{左辺} = \mathrm{Im}\left(\frac{1}{x+yi}\right) = \mathrm{Im}\left(\frac{x-yi}{(x+yi)(x-yi)}\right) = \mathrm{Im}\left(\frac{x-yi}{x^2-y^2i^2}\right) = \mathrm{Im}\left(\frac{x-yi}{x^2+y^2}\right) = \mathrm{Im}\left(\frac{x}{x^2+y^2} - \frac{y}{x^2+y^2}i\right)$$
$$= -\frac{y}{x^2+y^2} = \frac{\mathrm{Im}(z)}{\{\mathrm{Re}(z)\}^2+\{\mathrm{Im}(z)\}^2} = \text{右辺}$$

(5) i) $\Longrightarrow$
z が実数であるから, $z = x$
よって, 　$|z| = |x| = |\mathrm{Re}(z)|$

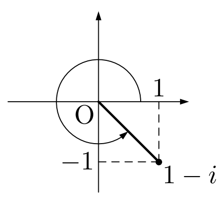
ii) $\Longleftarrow$
$|z| = |\mathrm{Re}(z)|$ より, $|z|^2 = |\mathrm{Re}(z)|^2$
これより, $x^2+y^2 = x^2$ であるから, $y = 0$
したがって, $z = x$ となるから, z は実数である.

(6) i) $\Longrightarrow$
z が純虚数であるから, $z = yi$
よって, 　$|z| = |yi| = |y| = |\mathrm{Im}(z)|$

ii) $\Longleftarrow$
$|z| = |\mathrm{Im}(z)|$ より, $|z|^2 = |\mathrm{Im}(z)|^2$
これより, $x^2+y^2 = y^2$ であるから, $x = 0$
したがって, $z = yi$ となるから, z は純虚数である.

174　それぞれの複素数を $z = r(\cos\theta + i\sin\theta) = re^{i\theta}$ とする.

(1)
$$r = |z| = \sqrt{1^2+(-1)^2} = \sqrt{2}$$
$$\theta = \arg z = \frac{7}{4}\pi$$
よって
$$z = \boldsymbol{\sqrt{2}\left(\cos\frac{7}{4}\pi + i\sin\frac{7}{4}\pi\right)} = \boldsymbol{\sqrt{2}\,e^{\frac{7}{4}\pi i}}$$



（2） $r = |z| = \sqrt{(-\sqrt{3})^2 + 1^2}$

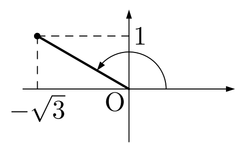
$= \sqrt{4} = 2$

$\theta = \arg z = \dfrac{5}{6}\pi$

よって

$z = \boldsymbol{2\left(\cos\dfrac{5}{6}\pi + i\,\sin\dfrac{5}{6}\pi\right)}$

$= \boldsymbol{2\,e^{\frac{5}{6}\pi i}}$



（3） $r = |z| = \sqrt{0^2 + (-3)^2}$

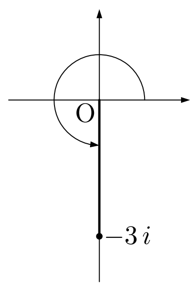
$= \sqrt{9} = 3$

$\theta = \arg z = \dfrac{3}{2}\pi$

よって

$z = \boldsymbol{3\left(\cos\dfrac{3}{2}\pi + i\,\sin\dfrac{3}{2}\pi\right)}$

$= \boldsymbol{3\,e^{\frac{3}{2}\pi i}}$



（4） $r = |z| = \sqrt{(-2)^2 + 0^2}$

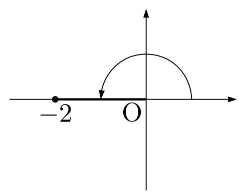
$= \sqrt{4} = 2$

$\theta = \arg z = \pi$

よって

$z = \boldsymbol{2(\cos\pi + i\,\sin\pi)}$

$= \boldsymbol{2\,e^{\pi i}}$



175（1）　左辺 $= \left|e^{i(-\theta)}\right|$

$= |\cos(-\theta) + i\,\sin(-\theta)|$

$= \sqrt{\cos^2(-\theta) + \sin^2(-\theta)}$

$= \sqrt{1} = 1 =$ 右辺

（2）　左辺 $= \overline{e^{i(-\theta)}}$

$= \overline{\cos(-\theta) + i\,\sin(-\theta)}$

$= \cos(-\theta) - i\,\sin(-\theta)$

$= \cos\theta + i\,\sin\theta$

$= e^{i\,\theta} =$ 右辺

176（1） $|(-2+i) - (2+4\,i)| = |-2+i-2-4\,i|$

$= |-4-3\,i|$

$= \sqrt{(-4)^2 + 3^2}$

$= \sqrt{25} = \mathbf{5}$

（2） $|(-5) - (12\,i)| = |-5-12\,i|$

$= \sqrt{(-5)^2 + (-12)^2}$

$= \sqrt{25+144} = \sqrt{169} = \mathbf{13}$

177　$|z_1 + z_2| \leqq |z_1| + |z_2|$ において，$z_1 = z_1$，$z_2 = -z_2$ とおくと

$|z_1 + (-z_2)| \leqq |z_1| + |-z_2|$

$|z_1 - z_2| \leqq |z_1| + |z_2|$

178（1） $|-i| = 1$，$\arg(-i) = -\dfrac{\pi}{2}$ であるから

$|-iz| = |-i|\,|z|$

$= 1\cdot|z| = |z|$

$\arg(-iz) = \arg(-i) + \arg z$

$= \arg z - \dfrac{\pi}{2}$

したがって，$-iz$ は，点 z を原点のまわりに $-\dfrac{\pi}{2}$ 回転した点を表す．

（2） $|1+i| = \sqrt{1^2+1^2} = \sqrt{2}$，$\arg(1+i) = \dfrac{\pi}{4}$ であるから

$|(1+i)z| = |1+i|\,|z|$

$= \sqrt{2}|z|$

$\arg(1+i)z = \arg(1+i) + \arg z$

$= \arg z + \dfrac{\pi}{4}$

したがって，$(1+i)z$ は，点 z を原点のまわりに $\dfrac{\pi}{4}$ 回転した点を z_2 とし，線分 $\mathrm{O}z_2$ を $\sqrt{2}$ 倍に拡大した端の点を表す．

（3） $|\sqrt{3}+i| = \sqrt{(\sqrt{3})^2+1^2} = 2$，$\arg(\sqrt{3}+i) = \dfrac{\pi}{6}$ であるから

$\left|\dfrac{z}{\sqrt{3}+i}\right| = \dfrac{|x|}{|\sqrt{3}+i|}$

$= \dfrac{z}{2}$

$\arg\left(\dfrac{z}{\sqrt{3}+i}\right) = \arg z - \arg(\sqrt{3}+i)$

$= \arg z - \dfrac{\pi}{6}$

したがって，$\dfrac{z}{\sqrt{3}+i}$ は，点 z を原点のまわりに $-\dfrac{\pi}{6}$ 回転した点を z_3 とし，線分 $\mathrm{O}z_3$ を $\dfrac{1}{2}$ 倍に拡大した端の点を表す．

179　ド・モアブルの公式より

左辺 $= \cos n(-\theta) + i\,\sin n(-\theta)$

$= \cos(-n\theta) + i\,\sin(-n\theta)$

$= \cos n\theta - i\,\sin n\theta =$ 右辺

〔別解〕

左辺 $= \left(e^{i(-\theta)}\right)^n$

$= e^{in(-\theta)}$

$= e^{i(-n\theta)}$

$= \cos(-n\theta) + i\,\sin(-n\theta)$

$= \cos n\theta - i\,\sin n\theta =$ 右辺

180（1） $|1+i| = \sqrt{1^2+1^2} = \sqrt{2}$，$\arg(1+i) = \dfrac{\pi}{4}$ であるから

与式 $= \left(\sqrt{2}e^{\frac{\pi}{4}i}\right)^8$

$= (\sqrt{2})^8 \cdot e^{\frac{\pi}{4}i\cdot 8}$

$= 16\cdot e^{2\pi i}$

$= 16(\cos 2\pi + i\,\sin 2\pi)$

$= 16(1 + i\cdot 0) = \mathbf{16}$

（2） $|1+i| = \sqrt{1^2+1^2} = \sqrt{2}$，$\arg(1+i) = \dfrac{\pi}{4}$ であるから

与式 $= (1+i)^{-7}$

$= \left(\sqrt{2}e^{\frac{\pi}{4}i}\right)^{-7}$

$= (\sqrt{2})^{-7}\cdot e^{\frac{\pi}{4}i\cdot(-7)}$

$= \dfrac{1}{8\sqrt{2}}\cdot e^{-\frac{7}{4}\pi i}$

$= \dfrac{\sqrt{2}}{16}\left\{\cos\left(-\dfrac{7}{4}\pi\right) + i\,\sin\left(-\dfrac{7}{4}\pi\right)\right\}$

$= \dfrac{\sqrt{2}}{16}\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}} + \dfrac{1}{\sqrt{2}}i\right)$

$= \boldsymbol{\dfrac{1}{16}(1+i)}$

181（1）$z = re^{i\theta}\ (0 \leqq \theta < 2\pi)$ とおくと，$z^6 = r^6 e^{6i\theta} = -1$

両辺の絶対値を比較すると，$r^6 = 1$ であるから，$r = \pm 1$

よって，$e^{6i\theta} = \cos 6\theta + i\sin 6\theta = -1$ となるので

$\cos 6\theta = -1,\quad \sin 6\theta = 0$

$0 \leqq 6\theta < 12\pi$ であるから

$6\theta = \pi,\ 3\pi,\ 5\pi,\ 7\pi,\ 9\pi,\ 11\pi$

$\theta = \frac{\pi}{6},\ \frac{\pi}{2},\ \frac{5}{6}\pi,\ \frac{7}{6}\pi,\ \frac{3}{2}\pi,\ \frac{11}{6}\pi$

これより，$z = e^{\frac{\pi}{6}i},\ e^{\frac{\pi}{2}i},\ e^{\frac{5}{6}\pi i},\ e^{\frac{7}{6}\pi i},\ e^{\frac{3}{2}\pi i},\ e^{\frac{11}{6}\pi i}$

よって，
$$z = \cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i,$$
$$\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2} = i,$$
$$\cos\frac{5}{6}\pi + i\sin\frac{5}{6}\pi = -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i,$$
$$\cos\frac{7}{6}\pi + i\sin\frac{7}{6}\pi = -\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i,$$
$$\cos\frac{3}{2}\pi + i\sin\frac{3}{2}\pi = -i,$$
$$\cos\frac{11}{6}\pi + i\sin\frac{11}{6}\pi = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i,$$

まとめると，$z = \boldsymbol{\pm i,\ \frac{\sqrt{3}}{2} \pm \frac{1}{2}i,\ -\frac{\sqrt{3}}{2} \pm \frac{1}{2}i}$

（2）$z = re^{i\theta}\ (0 \leqq \theta < 2\pi)$ とおくと，$z^3 = r^3 e^{3i\theta} = -8i$

両辺の絶対値を比較すると，$r^3 = 8$ であるから，$r = 2$

よって，$e^{3i\theta} = \cos 3\theta + i\sin 3\theta = -i$ となるので

$\cos 3\theta = 0,\quad \sin 3\theta = -1$

$0 \leqq 3\theta < 6\pi$ であるから

$3\theta = \frac{3}{2}\pi, \frac{7}{2}\pi,\ \frac{11}{2}\pi$

$\theta = \frac{\pi}{2},\ \frac{7}{6}\pi,\ \frac{11}{6}\pi$

これより，$z = 2e^{\frac{\pi}{2}i},\ 2e^{\frac{7}{6}\pi i},\ 2e^{\frac{11}{6}\pi i}$

よって，
$$z = 2\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right) = 2i,$$
$$2\left(\cos\frac{7}{6}\pi + i\sin\frac{7}{6}\pi\right) = -\sqrt{3} - i,$$
$$2\left(\cos\frac{11}{6}\pi + i\sin\frac{11}{6}\pi\right) = \sqrt{3} - i$$

まとめると，$z = \boldsymbol{2i,\ \pm\sqrt{3} - i}$

182（1）与式 $= e^0 \cdot e^{-\pi i}$
$$= 1 \cdot \{\cos(-\pi) + i\sin(-\pi)\}$$
$$= -1 + i \cdot 0 = \boldsymbol{-1}$$

（2）与式 $= e^1 \cdot e^{\pi i}$
$$= e \cdot (\cos\pi + i\sin\pi)$$
$$= e(-1 + i \cdot 0) = \boldsymbol{-e}$$

（3）与式 $= e^0 \cdot e^{1\cdot i}$
$$= 1 \cdot (\cos 1 + i\sin 1)$$
$$= \boldsymbol{\cos 1 + i\sin 1}$$

183　$z = x + yi$ とおく．

（1）左辺 $= \overline{e^{x+yi}}$
$$= \overline{e^x(\cos y + i\sin y)}$$
$$= e^x(\cos y - i\sin y)$$
$$= e^x\{\cos(-y) + i\sin(-y)\}$$
$$= e^{x+(-y)i}$$
$$= e^{x-yi} = e^{\bar{z}} = \text{右辺}$$

（2）左辺 $= |e^{iy}|$
$$= |\cos y + i\sin y|$$
$$= \sqrt{\cos^2 y + \sin^2 y}$$
$$= \sqrt{1} = 1 = \text{右辺}$$

184（1）　第 1 式

$$\text{左辺} = \frac{e^{i(z+\pi)} + e^{-i(z+\pi)}}{2}$$
$$= \frac{e^{iz+i\pi} + e^{-iz+i\pi}}{2}$$
$$= \frac{e^{iz}e^{i\pi} + e^{-iz}e^{i\pi}}{2}$$
$$= \frac{e^{iz}\cdot(-1) + e^{-iz}\cdot(-1)}{2}$$
$$= \frac{-e^{iz} - e^{-iz}}{2}$$
$$= -\frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} = -\cos z = \text{右辺}$$

第 2 式

$$\text{左辺} = \frac{e^{i(z+\pi)} - e^{-i(z+\pi)}}{2i}$$
$$= \frac{e^{iz+i\pi} - e^{-iz+i\pi}}{2i}$$
$$= \frac{e^{iz}e^{i\pi} + e^{-iz}e^{i\pi}}{2i}$$
$$= \frac{e^{iz}\cdot(-1) - e^{-iz}\cdot(-1)}{2i}$$
$$= \frac{-e^{iz} + e^{-iz}}{2i}$$
$$= -\frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} = -\sin z = \text{右辺}$$

（2）
$$\text{右辺} = \frac{e^{iz_1} - e^{-iz_1}}{2i} \cdot \frac{e^{iz_2} + e^{-iz_2}}{2} - \frac{e^{iz_1} + e^{-iz_1}}{2} \cdot \frac{e^{iz_2} - e^{-iz_2}}{2i}$$
$$= \frac{(e^{iz_1} - e^{-iz_1})(e^{iz_2} + e^{-iz_2})}{4i} - \frac{(e^{iz_1} + e^{-iz_1})(e^{iz_2} - e^{-iz_2})}{4i}$$
$$= \frac{e^{i(z_1+z_2)} + e^{i(z_1-z_2)} - e^{-i(z_1-z_2)} - e^{-i(z_1+z_2)}}{4i} - \frac{e^{i(z_1+z_2)} - e^{i(z_1-z_2)} + e^{-i(z_1-z_2)} - e^{-i(z_1+z_2)}}{4i}$$
$$= \frac{2e^{i(z_1-z_2)} - 2e^{-i(z_1-z_2)}}{4i}$$
$$= \frac{e^{i(z_1-z_2)} - e^{-i(z_1-z_2)}}{2i}$$
$$= \sin(z_1 - z_2) = \text{左辺}$$

（3） 右辺 $= \dfrac{e^{iz_1}+e^{-iz_1}}{2}\cdot\dfrac{e^{iz_2}+e^{-iz_2}}{2}$

$+\dfrac{e^{iz_1}-e^{-iz_1}}{2i}\cdot\dfrac{e^{iz_2}-e^{-iz_2}}{2i}$

$=\dfrac{(e^{iz_1}+e^{-iz_1})(e^{iz_2}+e^{-iz_2})}{4}$

$+\dfrac{(e^{iz_1}-e^{-iz_1})(e^{iz_2}-e^{-iz_2})}{4i^2}$

$=\dfrac{e^{i(z_1+z_2)}+e^{i(z_1-z_2)}+e^{-i(z_1-z_2)}+e^{-i(z_1+z_2)}}{4}$

$-\dfrac{e^{i(z_1+z_2)}-e^{i(z_1-z_2)}-e^{-i(z_1-z_2)}+e^{-i(z_1+z_2)}}{4}$

$=\dfrac{2e^{i(z_1-z_2)}+2e^{-i(z_1-z_2)}}{4}$

$=\dfrac{e^{i(z_1-z_2)}+e^{-i(z_1-z_2)}}{2}$

$=\cos(z_1-z_2)=$ 左辺

185　$f(z)=\cos z\sin z$ とおく．

$f(z+\pi)=\cos(z+\pi)\sin(z+\pi)$

$=(\cos z\cos\pi-\sin z\sin\pi)(\sin z\cos\pi+\cos z\sin\pi)$

$=(-\cos z)(-\sin z)$

$=\cos z\sin z=f(z)$

よって，$f(z)$ は周期 π の周期関数である．

186　z の絶対値は r，偏角は θ である．

$z^2=(re^{i\theta})^2=r^2\,e^{i(2\theta)}$

よって，z^2 は**絶対値が r^2，偏角が 2θ の点**である．

187　$w=\dfrac{1}{z+i}$ より，$z=\dfrac{1}{w}-i$

$z=x+y\,i,\ w=u+v\,i$ とおくと

$x+y\,i=\dfrac{1}{u+v\,i}-i$

$=\dfrac{u-v\,i}{(u+v\,i)(u-v\,i)}-i$

$=\dfrac{u-v\,i}{u^2+v^2}-i$

$=\dfrac{u}{u^2+v^2}-\dfrac{v\,i}{u^2+v^2}-i$

$=\dfrac{u}{u^2+v^2}+\left(-1-\dfrac{v}{u^2+v^2}\right)i$

よって，$x=\dfrac{u}{u^2+v^2},\ y=-1-\dfrac{v}{u^2+v^2}$　$\cdots$①

（1）　$|z|=2$ の両辺を 2 乗して，$|z|^2=4$

これより，$x^2+y^2=4$

これに ① を代入して

$$\left(\frac{u}{u^2+v^2}\right)^2+\left(-1-\frac{v}{u^2+v^2}\right)^2=4$$

$$\frac{u^2}{(u^2+v^2)^2}+1+\frac{2v}{u^2+v^2}+\frac{v^2}{(u^2+v^2)^2}=4$$

$$\frac{u^2}{(u^2+v^2)^2}+\frac{2v}{u^2+v^2}+\frac{v^2}{(u^2+v^2)^2}=3$$

$$\frac{u^2+v^2}{(u^2+v^2)^2}+\frac{2v}{u^2+v^2}=3$$

$$\frac{1}{u^2+v^2}+\frac{2v}{u^2+v^2}=3$$

これより，$1+2v=3(u^2+v^2)$

$u^2+v^2-\dfrac{2}{3}v=\dfrac{1}{3}$

$u^2+\left(v-\dfrac{1}{3}\right)^2-\dfrac{1}{9}=\dfrac{1}{3}$

$u^2+\left(v-\dfrac{1}{3}\right)^2=\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{9}$

$u^2+\left(v-\dfrac{1}{3}\right)^2=\dfrac{4}{9}$

よって，**中心が $\left(0,\ \dfrac{1}{3}\right)$，すなわち，$\dfrac{i}{3}$ で，半径が $\dfrac{2}{3}$ の円に移る．**

（2）　$\mathrm{Im}(z)=2$ より，$y=2$

これに ① を代入して

$-1-\dfrac{v}{u^2+v^2}=2$

$\dfrac{v}{u^2+v^2}=-3$

これより，$v=-3(u^2+v^2)$

$u^2+v^2+\dfrac{1}{3}v=0$

$u^2+\left(v+\dfrac{1}{6}\right)^2-\dfrac{1}{36}=0$

$u^2+\left(v+\dfrac{1}{6}\right)^2=\dfrac{1}{36}$

よって，**中心が $\left(0,-\dfrac{1}{6}\right)$，すなわち，$-\dfrac{i}{6}$ で，半径が $\dfrac{1}{6}$ の円に移る．**

ただし，$u^2+v^2\neq 0$ より，原点を除く．

188（1） 与式 $=\dfrac{(2+i)^2}{(2+i)-2}$

$=\dfrac{4+4i+i^2}{i}=\dfrac{3+4i}{i}$

$=\dfrac{i(3+4i)}{i^2}$

$=-(3\,i+4i^2)=\mathbf{4-3\,i}$

（2） 与式 $=\displaystyle\lim_{z\to -i}\frac{(z+i)(z-i)}{(z+i)(2z-i)}$

$=\displaystyle\lim_{z\to -i}\frac{z-i}{2z-i}$

$=\dfrac{-i-i}{-2\,i-i}=\dfrac{-2\,i}{-3\,i}=\mathbf{\dfrac{2}{3}}$

（3） 与式 $=\{(1+i)+(1-i)\}^2$

$=2^2=\mathbf{4}$

189（1） $w'=(2z)(z^2+iz-1)+(z^2+i)(2z+i)$

$=2z^3+2iz^2-2z+2z^3+iz^2+2iz+i^2$

$=\mathbf{4z^3+3iz^2+(-2+2\,i)z-1}$

（2） $w'=\dfrac{(z-i)-z}{(z-i)^2}$

$=\mathbf{-\dfrac{i}{(z-i)^2}}$

（3） $w'=6(z^2-iz-1)^5(z^2-iz-1)'$

$=\mathbf{6(z^2-iz-1)^5(2z-i)}$

190（1） $u+v\,i=\dfrac{1}{(x+y\,i)+1}$

$=\dfrac{1}{(x+1)+y\,i}$

$=\dfrac{(x+1)-y\,i}{\{(x+1)+y\,i\}\{(x+1)-y\,i\}}$

$=\dfrac{(x+1)-y\,i}{(x+1)^2-y^2\,i^2}$

$=\dfrac{(x+1)-y\,i}{(x+1)^2+y^2}$

$=\dfrac{x+1}{(x+1)^2+y^2}-\dfrac{y}{(x+1)^2+y^2}i$

よって，$\boldsymbol{u=\dfrac{x+1}{(x+1)^2+y^2}}$，$\boldsymbol{v=-\dfrac{y}{(x+1)^2+y^2}}$

（2） $u+v\,i=\{(x+y\,i)+i\}^2$

$=\{x+(y+1)i\}^2$

$=x^2+2x(y+1)i+(y+1)^2i^2$

$=\{x^2-(y+1)^2\}+2x(y+1)i$

よって，$\boldsymbol{u=x^2-(y+1)^2}$，$\boldsymbol{v=2x(y+1)}$

（3） $u+v\,i=\{(x+y\,i)-2(x-y\,i)\}^2$

$=(-x+3y\,i)^2$

$=x^2-6xy\,i+9y^2\,i^2$

$=(x^2-9y^2)-6xy\,i$

よって，$\boldsymbol{u=x^2-9y^2}$，$\boldsymbol{v=-6xy}$

191（1） $f(z)=u+v\,i$ とすると，$u=-y$，$v=x$

$u_x=0$

$v_y=0$

また，

$u_y=-1$

$v_x=1$

よって，$u_x=v_y$，$u_y=-v_x$ が成り立つので，$f(z)$ は**正則**であり，

$f'(z)=u_x+v_x\,i=0+1\,i=\boldsymbol{i}$

（2） $g(z)=u+v\,i$ とすると，$u=x^3-3xy^2$，$v=3x^2y-y^3$

$u_x=3x^2-3y^2$

$v_y=3x^2-3y^2$

また，

$u_y=-6xy$

$v_x=6xy$

よって，$u_x=v_y$，$u_y=-v_x$ が成り立つので，$g(z)$ は**正則**であり，

$g'(z)=u_x+v_x\,i=\boldsymbol{(3x^2-3y^2)+6xy\,i}$

192 $g'(z)=f'(z)$ より，$g'(z)-f'(z)=0$

$h(z)=g(z)-f(z)$ とおくと

$h'(z)=g'(z)-f'(z)=0$

よって，$h(z)$ は定数となるから

$h(z)=C$ （C は複素数の定数)

とおくことができる．

したがって，$g(z)-f(z)=C$ となるので

$g(z)=f(z)+C$

$=2z^2+3\,iz+4+C$

ここで，$g(i)=2$ より

$2\cdot i^2+3\,i\cdot i+4+C=2$

$-2+3\,i^2+4+C=2$

$-2-3+4+C=2$

$C=3$

よって，$g(z)=2z^2+3\,iz+4+3=\boldsymbol{2z^2+3\,iz+7}$

193 $(\cot z)'=\left(\dfrac{\cos z}{\sin z}\right)'=\dfrac{-\sin z\cdot\sin z-\cos z\cdot\cos z}{\sin^2 z}$

$=\dfrac{-\sin^2 z-\cos^2 z}{\sin^2 z}$

$=\dfrac{-(\sin^2 z+\cos^2 z)}{\sin^2 z}$

$=\boldsymbol{-\dfrac{1}{\sin^2 z}}$

〔別解〕

$\cot z=\dfrac{\cos z}{\sin z}=\dfrac{\dfrac{e^{iz}+e^{-iz}}{2}}{\dfrac{e^{iz}-e^{-iz}}{2\,i}}=\dfrac{i(e^{iz}+e^{-iz})}{e^{iz}-e^{-iz}}$

よって

$(\cot z)'=\left\{\dfrac{i(e^{iz}+e^{-iz})}{e^{iz}-e^{-iz}}\right\}'$

$=\dfrac{i(ie^{iz}-ie^{-iz})(e^{iz}-e^{-iz})-i(e^{iz}+e^{-iz})(ie^{iz}+ie^{-iz})}{(e^{iz}-e^{-iz})^2}$

$=\dfrac{i^2(e^{iz}-e^{-iz})(e^{iz}-e^{-iz})-i^2(e^{iz}+e^{-iz})(e^{iz}+e^{-iz})}{(e^{iz}-e^{-iz})^2}$

$=\dfrac{-(e^{iz}-e^{-iz})^2+(e^{iz}+e^{-iz})^2}{(e^{iz}-e^{-iz})^2}$

$=\dfrac{(e^{iz}+e^{-iz})^2-(e^{iz}-e^{-iz})^2}{(e^{iz}-e^{-iz})^2}$

$=\dfrac{\{(e^{iz}+e^{-iz})+(e^{iz}-e^{-iz})\}\{(e^{iz}+e^{-iz})-(e^{iz}-e^{-iz})\}}{(e^{iz}-e^{-iz})^2}$

$=\dfrac{2e^{iz}\cdot 2e^{-iz}}{(e^{iz}-e^{-iz})^2}=\dfrac{4}{(e^{iz}-e^{-iz})^2}$

$=\dfrac{1}{\dfrac{(e^{iz}-e^{-iz})^2}{4}}=-\dfrac{1}{\dfrac{(e^{iz}-e^{-iz})^2}{-4}}$

$=-\dfrac{1}{\left(\dfrac{e^{iz}-e^{-iz}}{2\,i}\right)^2}=\boldsymbol{-\dfrac{1}{\sin^2 z}}$

194（1） $\varphi_x=6xy$

$\varphi_{xx}=6y$

$\varphi_y=3x^2-3y^2$

$\varphi_{yy}=-6y$

よって，$\varphi_{xx}+\varphi_{yy}=6y+(-6y)=0$ であるから，$\varphi(x,\ y)$ は調和関数である．

（2） $\varphi_x=-e^{-x}\sin y$

$\varphi_{xx}=e^{-x}\sin y$

$\varphi_y=e^{-x}\cos y$

$\varphi_{yy}=e^{-x}(-\sin y)=-e^{-x}\sin y$

よって，$\varphi_{xx}+\varphi_{yy}=e^{-x}\sin y+(-e^{-x}\sin y)=0$ であるから，$\varphi(x,\ y)$ は調和関数である．

195（1） $|-i|=1$，$\arg(-i)=-\dfrac{\pi}{2}$ より

$\sqrt{-i}=\pm\sqrt{1}\,e^{-i\frac{\pi}{2}}$

$=\pm\left\{\cos\left(-\dfrac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(-\dfrac{\pi}{4}\right)\right\}$

$=\pm\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}-\dfrac{1}{\sqrt{2}}i\right)$

$=\boldsymbol{\pm\dfrac{1}{\sqrt{2}}(1-i)}$

（2） $|1-i|=\sqrt{1^2+(-1)^2}=\sqrt{2}$，$\arg(1-i)=-\dfrac{\pi}{4}$ より

$\sqrt{1-i}=\pm\sqrt{\sqrt{2}}\,e^{-i\frac{\pi}{8}}$

$=\pm\sqrt[4]{2}\left\{\cos\left(-\dfrac{\pi}{8}\right)+i\sin\left(-\dfrac{\pi}{8}\right)\right\}$

$=\boldsymbol{\pm\sqrt[4]{2}\left(\cos\dfrac{\pi}{8}-i\sin\dfrac{\pi}{8}\right)}$

（3） $|9i|=9$，$\arg(9i)=\dfrac{\pi}{2}$ より

$$\sqrt{9i} = \pm\sqrt{9}\,e^{i\frac{\pi}{4}}$$
$$= \pm 3\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)$$
$$= \pm 3\left(\frac{1}{\sqrt{2}} + i\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$
$$= \pm\boldsymbol{\frac{3}{\sqrt{2}}(1+i)}$$

（4）　$|1+\sqrt{3}\,i| = \sqrt{1^2+(\sqrt{3})^2} = 2$,　$\arg(1+\sqrt{3}\,i) = \dfrac{\pi}{3}$ より

$$\sqrt{1+\sqrt{3}\,i} = \pm\sqrt{2}\,e^{i\frac{\pi}{6}}$$
$$= \pm\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right)$$
$$= \pm\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2}\right)$$
$$= \pm\boldsymbol{\frac{\sqrt{2}}{2}(\sqrt{3}+i)}$$

196（1）　$|1-i| = \sqrt{2}$ より，$\log|1-i| = \log\sqrt{2} = \dfrac{1}{2}\log 2$

また，$\arg(1-i) = -\dfrac{\pi}{4} + 2n\pi$　(n は整数)

よって

$\log(1-i) = \boldsymbol{\dfrac{1}{2}\log 2 + \left(-\dfrac{\pi}{4} + 2n\pi\right)i}$　(n は整数)

（2）　$|3i| = 3$ より，$\log|3i| = \log 3$

また，$\arg 3i = \dfrac{\pi}{2} + 2n\pi$　(n は整数)

よって

$\log 3i = \boldsymbol{\log 3 + \left(\dfrac{\pi}{2} + 2n\pi\right)i}$　(n は整数)

（3）　$|i| = 1$ より，$\log|i| = \log 1 = 0$

また，$-\pi < \arg i \leqq \pi$ とすれば，$\arg i = \dfrac{\pi}{2}$

よって

$\mathrm{Log}\, i = 0 + \dfrac{\pi}{2}i = \boldsymbol{\dfrac{\pi}{2}i}$

（4）　$|\sqrt{3}-i| = \sqrt{(\sqrt{3})^2+(-1)^2} = 2$ より，$\log|\sqrt{3}-1| = \log 2$

また，$-\pi < \arg(\sqrt{3}-i) \leqq \pi$ とすれば，$\arg(\sqrt{3}-i) = -\dfrac{\pi}{6}$

よって

$\mathrm{Log}(\sqrt{3}-i) = \boldsymbol{\log 2 - \dfrac{\pi}{6}i}$

197　値域を適当に制限して，1 価関数としたとき，$w = \sqrt[3]{z}$ より，$w^3 = z$

これより，$\dfrac{dz}{dw} = 3w^2$

$$= 3(\sqrt[3]{z})^2$$
$$= 3\sqrt[3]{z^2}$$

よって，$z \neq 0$ のとき，$(\sqrt[3]{z})' = \dfrac{dw}{dz} = \dfrac{1}{\frac{dz}{dw}} = \dfrac{1}{3\sqrt[3]{z^2}}$

∎