線形代数学入門

このPDFファイルはこれまでの「線形代数学」の講義ノートを加筆・修正したものです．TeXの機能に慣れるためにいろいろ練習する場も兼ねて作成しています．図やグラフはまだ練習中のため，ほとんどありません．基本的に黒板での説明は図が多めなので，このノートを見れば講義に出なくてもよいわけではないことに注意してください．

（学生向けの前書き：使用前に必ず読むこと）
講義で使用していた頃から，このテキストの内容全てを扱ったわけではありません．発展事項を自習したい学生のための資料として作成し始めたので，難易度の高い内容も含まれています．また，自身の備忘録としてさらに数学科向けの内容を加筆したので，全部読むのは結構大変です．そのため，もし私の講義を受けた学生が利用する場合には，定理の証明などの難しそうなところは飛ばしながら，定義・定理の主張・注意・計算例・応用例を取捨選択しつつ読み進める方がよいと思います．索引はありませんが，**節を細かく分けているので学生が参考にしたい部分を探しやすくはしているつもり**です．数学科向けに言うと，実数の構成に関する部分以降，つまり実数全体のなす集合 $\mathbb{R}$ が実ベクトル空間であることを認めた後は厳密な議論をしています．

線形代数が苦手な学生は，まず「計算例」と書かれた節の例題とその解答をしっかり読み込んでください．手を動かして計算を追いつつ，用語や記号の意味および式変形の説明を随時補ってみるのもよいと思います．もし解答が理解できなければ，その前の節に戻って理解していない定義や用語・定理や公式がないかを見直してください．解答に必要な定理や公式は覚えていても，問題文に現れる記号の定義を理解していなかったために『問題を見ても何をすればよいかわからなかった』から解けなかったということはよくあります．
例題の解答が理解できた（と思う）場合には，少し間を空けてから解答を隠して例題を解いてみてください．数学では**『解答を読んで理解すること』と『何も見ずに自力で論理を組み立てて解答を作成できること』には大きなギャップがあります．**解答を読んで納得しても，いざ解答を作成する立場になって初めて「なぜこう考えるのか？」という疑問を抱いたり，意味を勘違いしている概念や公式があったりと，自分が復習すべき箇所に気付くことも少なくありません．
苦手な学生は「自分で計算練習しておくように」と言われると，まず例題の解説を読んでからその下の練習問題に取り組み，答え合わせをしても略解しかないため結局よくわからない…仕方ないから試験前に解答を丸暗記するか…となりがちです．まずは完全な解答がある例題の理解に努め，何も見ずに誰かに解説できるくらいまで理解した内容を少しずつでも増やしていけば，いずれ全体を見渡せるようになるはずです．そうすれば，最初はわからなかった解答例でも，どのような論理に基づいて考えられたものかわかると思います．

線形代数学はどうしても抽象的な内容が多いため，講義を受けているうちはイメージしにくい部分もありますが，現代社会において行列の理論が背景に隠されているものは非常に多いです．行列の応用例については本テキストでも随時紹介していきますが，少なくとも物理学や化学，工学などの理工系科目やプログラミング，統計学など幅広い分野で必須となる知識です．理論が抽象的な分だけ適用できる範囲が広いと考えてもらえればよいかと思います．巻末に参考文献を挙げてあるので，より詳しく学習したい内容についてはそちらを参照してください．

ちなみに月に数回程度数ページずつこっそり更新されます．**この下の最終更新日には注意してください．**

北海道大学 大学院理学研究院 数学部門
黒田 紘敏
最終更新日：2025年4月8日

最近の更新履歴

2018/3/2	過去の講義ノートをもとに作成に着手．全体の構成を再検討
2024/3/10	長期間更新していなかったので，前書きや参考文献から順次修正中
2024/12/24	参考文献を整理して最近のものを追加．第 4 章 2.3 節の最初の F の定義の誤植を修正
2025/3/13	参考文献を整理して最近のものを追加
2025/4/8	体裁や表現を，第 9 章まで内容は変えずに丁寧なものに修正

記号

集合や写像については，本文および北海道大学理学部数学教室の『大学数学のための準備』

`https://www2.sci.hokudai.ac.jp/dept/math/wp/wp-content/uploads/2020/01/GUIDE.pdf`

も参照してください．また

$$A \coloneqq B$$

で A を B で定義するということを表します．例えば

$$S_n \coloneqq \sum_{k=1}^{n} a_k$$

で，記号 S_n を $\sum\limits_{k=1}^{n} a_k$ で定めるという意味です．

実数全体のなす集合を $\mathbb{R}$（Real number の頭文字 R を太文字で書いたもの）で表す．よって,『$x \in \mathbb{R}$』と書けば，これは『x は実数』という意味である．

また，複素数全体のなす集合を $\mathbb{C}$（Complex number の頭文字 C を太文字で書いたもの）で表す．

注意事項

このテキストでは行列式の単元で置換（正確に言えば置換の記号，置換の符号 $\mathrm{sgn}(\sigma)$，積や逆などの群構造）については扱いません．対称群やその符号などを用いずに，行列式の定義から計算法，および行列式のみたす性質まですべてを順列や転倒数を利用して導出しています．

（以下は一個人の意見で，学生に無関係な前書きです）

置換を扱わない個人的な理由については

- 集合や写像を学習する前に扱うには記号に戸惑われやすく，本質的な理解を妨げやすい．同じ記号 σ でも，写像的扱い $\sigma(1)$，置換 $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$，巡回置換や互換 $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix}$ など，1 つの式内で複数の意味をもった記述が多い．
- 実際のところ，具体的に成分が与えられた行列式の値を計算する場合には置換は使わない．
- 教養科目として学習する線形代数の範囲では，2 次形式やジョルダン標準形まで話題を進めても，その説明に置換を絶対に必要とする項目がない．
- 群論に触れる機会とするにしても，かけられる時間的に中途半端になりがち．また，本質的に重要な点である奇置換と偶置換の話題，つまり符号が定義できることの説明は講義内ではほぼ不可能なのが現状．
- 以上の理由に加え，現在のカリキュラムでは行列自身の演算（和とスカラー倍および積，積の非可換性，零因子，行列のべき乗など）が高校数学から大学数学へ移行しているため，置換に関する説明・演習の時間はこれらの内容に充てた方が，他の理工学系科目を履修する際に有効であると思われる．

個人的な願望としては，教養科目に整数環の代数的構造，単項イデアル整域とユークリッドの互除法の証明，剰余環の例として合同式演算の well-defined，一意分解整域（素因数分解の一意性）などと非可換群の代表として対称群をセットにして集合論から代数学の初歩までを学ぶような科目があるといいかなと思っています．高校までで習う整数論との接続を活かしつつ代数学入門的な内容になり，置換自体も単に行列式の公式の一部ではなく，あみだくじなど他の話題と絡めて理解できる機会になるのではないか…と期待するのですが，科目数を増やすのは難しいところです．

目 次

関連図書

[1] 石井 伸郎 他，理工系新課程 線形代数 基礎から応用まで [改訂版]，培風館，2011.

[2] 川添 充 他，理工系新課程 線形代数演習 解き方の手順と例題解説，培風館，2012.

[3] 藤岡 敦，手を動かしてまなぶ 線形代数，裳華房，2015.

[4] 藤岡 敦，手を動かしてまなぶ 続・線形代数，裳華房，2021.

[5] 大久保 潤，線形代数の半歩先 データサイエンス・機械学習に挑む前の 30 話，講談社，2025.

[6] 高松 瑞代，応用がみえる線形代数，岩波書店，2020.

[7] Marc Peter Deisenroth 他著，仲村 智 他訳，機械学習のための数学，共立出版，2024.

[8] Amy N. Langville 他著，岩野 和生 他訳，Google PageRank の数理—最強検索エンジンのランキング手法を求めて—，共立出版，2009.

[9] 川久保 勝夫，新装版 線形代数学，日本評論社，2010.

[10] 長谷川 浩司，線型代数［改訂版］，日本評論社，2015.

[11] 藤岡 敦，これからの線形代数　3 重対角化，特異値分解，一般逆行列，森北出版，2024.

[12] 齋藤 正彦，基礎数学 1 線型代数入門，東京大学出版会，1966.

[13] 笠原 晧司，改訂増補 線型代数と固有値問題〜スペクトル分解を中心に〜，現代科学社，2004.

[14] G. ストラング 著　山口昌哉 監訳　井上昭 訳，線形代数とその応用，産業図書，1978.

[15] 鈴木 晋一，ライブラリ新数学大系 E 1 集合と位相への入門〜ユークリッド空間の位相〜，サイエンス社，2003.

[16] 鈴木 晋一，ライブラリ演習新数学大系 S1 理工基礎 演習 集合と位相，サイエンス社，2005.

[17] 金子 晃，ライブラリ数理・情報系の数学講義-1 数理基礎論講義ー論理・集合・位相ー，サイエンス社，2010.

[18] 田村 篤史・猪股 俊光，はじめて学ぶ集合と位相 データサイエンスへの応用を目指して，共立出版，2024.

[19] 原 隆，手を動かしてまなぶ 群論，裳華房，2024.

[20] 金谷 健一，これなら分かる応用数学教室 最小二乗法からウェーブレットまで，共立出版，2003.

[21] 金谷 健一，これなら分かる最適化数学 基礎原理から計算手法まで，共立出版，2005.

[22] 石井 俊全，まずはこの一冊から 意味が分かる線形代数，ベレ出版，2011.

[23] 川添 充・岡本 真彦，思考ツールとしての数学 第 2 版，共立出版，2021.

[24] 新井 朝雄，現代ベクトル解析の原理と応用，共立出版，2006.

[25] 千葉 逸人，新装版 これならわかる工学部で学ぶ数学，プレアデス出版，2009.

[26] 齋藤 正彦，基礎数学 4 線型代数演習，東京大学出版会，1985.

[27] 鈴木 七緒 他，詳解 線形代数演習，共立出版，1982.

[28] 寺田 文行，新版 演習数学ライブラリ 1 新版 演習線形代数，サイエンス社，2012.

[29] 塹江 誠夫 他，詳説演習 線形代数学，培風館，1981.

私が所持している本のうち，講義準備の際に参考にしているものを紹介します．世の中には「これでわかる」的な本が氾濫していますが，多くの場合はそんなことはありません．本の最後まで簡単な内容しか扱っていないか，難しいところをややいい加減な説明で誤魔化してわかった気分にさせているかのどちらかであることがほとんどのように私は思います．様々な分野に線形代数学を応用するためには，単に簡単な問題を手計算できるだけでなく，概念の理解ややや踏み込んだ内容まで必要なことも多いです．

[1, 2]

大阪府立大学勤務時に用いていた教科書・演習書です．このページ数でこれだけ応用までまとまっている本はほとんど見たことがありません．まずはこの本の内容を理解できるよう努力してください．

[3]〜**[4]**

豊富な計算例と解答をもとに自習できる教科書かつ演習書です．理論を理解するためにも，基本的な計算を実際に実行できることは必要です．一通り内容を理解して計算できるようになるための入門書として適切なので，省略された証明を理解するために並行して他に挙げた本を用いるのもよいかと思います．

[5]〜**[8]**

線形代数学は現代数学の基盤となっているため，様々な分野で有用という話はよく聞きますが，初学者に対しては抽象的な内容が多く，学ぶ動機づけが難しいこともあります．そこで，線形代数学が応用されている事例を概観できる書籍を挙げておきます．教科書と並行して，あるいは応用の先取りとして上手く活用してみてください．

[5] は線形代数学について一通り学んだあとに応用する際の考え方が紹介されています．説明も丁寧なので，学部 1 年生が教科書と並行して読むこともできるかと思います．タイトルにはデータサイエンスとありますが，一般的な線形代数の応用にも共通する部分も多いです．なぜ線形代数学を学ぶのか考える機会をもちたい学生は参考にしてみてください．

[6] は線形代数の応用例を多数挙げてあります．一通り学習が終わった後に読む方が向いていますが，学習中の内容がどう応用されるか興味がある場合にもよいかと思います．

[7] は機械学習分野で現れる数学の基礎事項や応用例をまとめています．微分積分を始めとして学部 1 年で扱う数学がどのように使われているかを概観できます．講義学習時にはイメージしにくいと思いますが，実際にはやや難しめの内容まで応用に現れることが感じ取れるかと思います．なお，ここでは翻訳版を紹介しましたが，英語版なら 2024 年時点では著者の Web から PDF 形式で無料で DL できます．

[8] は線形代数学が利用されている一例として，皆さんがよくなじみのある題材をもとに解説されています．専門的な内容を含みますが，線形代数学に限れば基本的な内容が中心に扱われているので，一通り理解した後に読めば応用例の一端を感じられると思います．

[9]～[14]

教科書の先の進んだ内容や線形代数学の応用を勉強したい人向けの参考書です．[9] は最近書かれた本でこちらも発展事項まで網羅してあります．計算例などは記述の仕方が現代風で読みやすいかもしれませんが，書いてある事柄の順番には違和感もあります．[10] も最近書かれた本でこちらも発展事項まで網羅してあります．高校数学で行列を学習していないことを前提とし，2 次正方行列の例から詳しく説明してあるのが特徴です．[11] は標準的な線形代数学の教科書では扱われないテーマを多く紹介しています．実際に工学や数値計算などの分野でよく必要となる内容について，多くの例を挙げながらまとめられています．学部 1 年で扱われる線形代数学の続きとして読むのに適しています．[12] は東京大学で使われている教科書で，全国の数学科でもよく参考書に指定されています．内容的には発展事項まで書いてあるので，教科書の内容の続きを学習したい場合には良いと思いますが，教科書の内容がわからないまま手を出すと何も理解できず終わるかもしれません．書かれた時期のため表現が古い部分もありますが，50 年近く使われているということは名著であるということです．[13] はタイトルの通り固有値問題とその応用についてかなり詳しく扱っています．この本が読めれば工学部において線形数学で困ることはもうありません．[14] は工学数学の教科書として世界的に使用されている参考書です．最初から工学部向けに書かれているので，数学的な内容を網羅はされていませんが，応用を踏まえて説明してあります．

[15]～[19]

講義ではあまり時間を割けないが，基礎を理解するために必要な内容を補うのに適切な本です．

[15, 16] は集合や写像および命題の基本的な概念から $\mathbb{R}^n$ の開集合・閉集合までを詳しく解説し，さらに発展的な内容として距離空間・位相空間まで説明してある参考書と演習書です．いずれの練習問題にも解説がついているので，自学自習するのにも適切です．

[17] も集合論や位相空間について解説してある本です．これらに加えて論理学についても解説されており，一冊で盛りだくさんの内容を扱っています．とりあえず数学科以外の学生ならばこの一冊があれば大丈夫かもしれません．

[18] は最近出版された本で，集合と位相の基礎事項について網羅されています．書名から想像されるよりもデータサイエンスに関する応用は少なめですが，位相に関する概要を把握するならこれで十分かもしれません．

[19] は群論の教科書かつ演習書です．具体例や演習問題の解答が豊富なので，本ファイルでは扱わない置換や対称群について自習するのに向いています．

[20]～[23]

読み物形式に近く，定理の証明はほとんどありませんが，数学をどのように応用するのかを紹介してあります．[20, 21] は微分積分や線形代数をどう工学で応用するかを解説してある本で，応用例がたくさん載っています．2 回生以降の最適制御問題の講義で教科書指定されることも多いようです．[22] は行列の基本変形や行列式について解説してあるもので，教科書の内容が全く分からない人向けです．基本変形を用いて連立 1 次方程式が解けて，逆行列や行列式が計算できる人には退屈かもしれませんが，それぞれの概念の意味を易しく説明してあります．[23] は数学を実社会で運用するための複数のテーマが丁寧に扱ってあります．

[24]～[25]

[24] は線形数学の知識と微分積分学の知識をうまく融合してベクトル解析の分野を解説してある本です．説明が丁寧なのが特徴です．

[25] は線形代数に限らず，微分方程式やフーリエ・ラプラス変換など工学部で必要となる数学をまとめたもので，2 年以降に学ぶ内容もほぼ網羅されています．自学自習できるよう丁寧に書かれているので，大学院への進学を考えている人はいずれ読んでみることを勧めます．ただし，1 年で習う微分積分は巻末にまとまってはいますが，すでに理解しているという前提で書かれているので注意してください．

[26]〜**[29]**

本格的に問題演習をしたい人向けの演習書です．いずれも難しい問題も載っているので，単純に計算練習だけをしたい場合には [2] や [3] を利用すれば，後は薄い問題集でも大丈夫だと思います．[28] の演習書は 2 色刷りで見やすく解説の内容が丁寧なので，何か一冊通して演習したいならこれを勧めます．計算問題だけでなく論証問題も適切な分量で扱っているので，院試対策にも向いてます．

第1章　数ベクトル空間と空間図形

1　平面ベクトル

1.1　平面ベクトルの長さと内積

高校数学で学習したように，平面ベクトル $\boldsymbol{a}$ は

$$\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$$

のように実数 a_1, a_2 を用いて成分表示できる．高校数学ではベクトルは $\overrightarrow{a}$ のように矢印を用いて表すことになっているが，これからは太文字でベクトルを表すことにする．また，成分は縦に並べる形で書くことにする．

平面ベクトル $\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$，$\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$ と実数 k に対して，ベクトルの和と実数倍を

$$\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} \coloneqq \begin{pmatrix} a_1 + b_1 \\ a_2 + b_2 \end{pmatrix}, \qquad k\boldsymbol{a} \coloneqq \begin{pmatrix} ka_1 \\ ka_2 \end{pmatrix}$$

と定める．また，すべての成分が 0 であるベクトルを**零ベクトル**といい，$\boldsymbol{0} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ で表す．さらに，平面ベクトル全体のなす集合を

$$\mathbb{R}^2 = \left\{ \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \,\middle|\, a_1, a_2 \in \mathbb{R} \right\}$$

とおく．

平面ベクトル $\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ の長さ $\|\boldsymbol{a}\|$ は

$$\|\boldsymbol{a}\| \coloneqq \sqrt{a_1^2 + a_2^2}$$

で定義される．高校数学ではベクトルの長さは $|\overrightarrow{a}|$ のように絶対値記号を用いて表すことになっているが，これからは実数の絶対値と区別するためにこのような記号を用いる．

定義 1.1.（内積）
2 つの平面ベクトル $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ のなす角を θ $(0 \leqq \theta \leqq \pi)$ とするとき，$\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ の内積を次で定義する．

$$(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) \coloneqq \|\boldsymbol{a}\|\|\boldsymbol{b}\| \cos\theta$$

高校数学ではベクトルの内積は $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v}$ のように点を用いて表すことになっているが，これからは通常の積との混同を避けるためにこのような記号を用いる．

平面ベクトル $\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$，$\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$ の内積を成分で表すと

$$(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = a_1 b_1 + a_2 b_2$$

となることはよく知られている．

内積については次の基本性質が成り立つことを高校で学習した．

命題 1.2. （内積の性質）
任意の平面ベクトル $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ と実数 k に対して，以下が成り立つ．

(1) $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}) = (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{c}) + (\boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}), \quad (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}) = (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) + (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{c})$

(2) $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = (\boldsymbol{b}, \boldsymbol{a})$

(3) $(k\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = (\boldsymbol{a}, k\boldsymbol{b}) = k(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$

(4) $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{a}) \geqq 0$ であり，$(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{a}) = 0 \iff \boldsymbol{a} = \boldsymbol{0}$

命題 1.3. （垂直であるための条件）
$\boldsymbol{0}$ でない平面ベクトル $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ が垂直であるための必要十分条件は

$$(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = 0$$

となることである．このとき，$\boldsymbol{a} \perp \boldsymbol{b}$ で表し，$\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ は**直交する**という．

また，次の不等式が成り立つことはよく知られている．

命題 1.4. （有名な不等式）
任意の平面ベクトル $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ に対して，次の不等式が成り立つ．

(1) （三角不等式） $\|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}\| \leqq \|\boldsymbol{a}\| + \|\boldsymbol{b}\|$

(2) （シュワルツの不等式） $|(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})| \leqq \|\boldsymbol{a}\|\|\boldsymbol{b}\|$

1.2　座標平面における直線の方程式

xy 平面上の直線は，直線が通る 1 点とその直線に平行なベクトルを 1 つ決めれば定まる．

例 1.5.　点 $(1,2)$ を通り，ベクトル $\begin{pmatrix}3\\5\end{pmatrix}$ に平行な直線の方程式は $y=\dfrac{5}{3}x+\dfrac{1}{3}$ である．実際，このような直線上の点 (x,y) はパラメータ t を用いて

$$\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}3\\5\end{pmatrix}$$

と表せる．これより，$x=1+3t,\ y=2+5t$ であるから，t を消去すれば直線の方程式が得られる．

定義 1.6.（平面内の直線のベクトル方程式）

平面における直線上の点を表すベクトル $\boldsymbol{x}$ は，直線上のある 1 点を表すベクトル $\boldsymbol{a}$ と方向を表す $\boldsymbol{0}$ でないベクトル $\boldsymbol{v}$ を用いて

$$\boldsymbol{x}=\boldsymbol{a}+t\boldsymbol{v}$$

と表せる．ここで，t は実数全体を動く**パラメータ（媒介変数）**である．これを直線の**パラメータ表示**といい，$\boldsymbol{v}$ をこの直線の**方向ベクトル**という．

また，このような表示を**直線のベクトル方程式**ともいう．

直線のパラメータ表示 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{a}+t\boldsymbol{v}$ に $\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{a}=\begin{pmatrix}a_1\\a_2\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{v}=\begin{pmatrix}v_1\\v_2\end{pmatrix}$ を代入すると

$$\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_1\\a_2\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}v_1\\v_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_1+tv_1\\a_2+tv_2\end{pmatrix}$$

となる．これより t を消去すれば

$$v_2x-v_1y=a_1v_2-a_2v_1$$

となるので，$a=v_2,\ b=-v_1,\ c=-a_1v_2+a_2v_1$ とおけば

$$ax+by+c=0$$

と表せる．つまり平面内の直線の方程式は x と y の 1 次方程式となる．

練習問題 1.1.　2 点 $\mathrm{A}(-2,1),\ \mathrm{B}(1,5)$ を通る直線のパラメータ表示を求めよ．

定義 1.7.（平面内の直線のベクトル方程式）

平面における直線上の点を表すベクトル $\boldsymbol{x}$ は，直線上のある 1 点を表すベクトル $\boldsymbol{a}$ と直線と垂直な $\boldsymbol{0}$ でないベクトル $\boldsymbol{n}$ を用いて

$$(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{a},\boldsymbol{n})=0$$

と表せる．$\boldsymbol{n}$ をこの直線の**法線ベクトル**という．

ベクトル方程式 $(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{a},\boldsymbol{n})=0$ に $\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{a}=\begin{pmatrix}a_1\\a_2\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{n}=\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}$ を代入すると

$$0=(x-a_1)a+(y-a_2)b=ax+by-a_1a-a_2b$$

となるので，$c=-a_1a-a_2b$ とおけば

$$ax+by+c=0$$

と表せる．よって，直線の方程式の x と y の係数が，直線の法線ベクトルの成分となっていることがわかる．

2　空間ベクトル

2.1　空間ベクトルの長さと内積

高校数学で学習したように，空間ベクトル $\boldsymbol{a}$ は

$$\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$$

のように実数 a_1, a_2, a_3 を用いて成分表示できる．

空間ベクトル $\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$，$\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$ と実数 k に対して，和と実数倍を

$$\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} \coloneqq \begin{pmatrix} a_1 + b_1 \\ a_2 + b_2 \\ a_3 + b_3 \end{pmatrix}, \qquad k\boldsymbol{a} \coloneqq \begin{pmatrix} ka_1 \\ ka_2 \\ ka_3 \end{pmatrix}$$

と定める．また，すべての成分が 0 であるベクトルを**零ベクトル**といい，$\mathbf{0} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ で表す．さらに，空間ベクトル全体のなす集合を

$$\mathbb{R}^3 = \left\{ \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \middle| \ a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R} \right\}$$

とおく．

空間ベクトル $\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$ の長さ $\|\boldsymbol{a}\|$ は

$$\|\boldsymbol{a}\| \coloneqq \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$$

で定義される．

定義 2.1. （内積）
2 つの空間ベクトル $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ のなす角を θ $(0 \leqq \theta \leqq \pi)$ とするとき，$\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ の内積を次で定義する．

$$(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) \coloneqq \|\boldsymbol{a}\| \|\boldsymbol{b}\| \cos\theta$$

空間ベクトル $\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$，$\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$ の内積を成分で表すと

$$(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3$$

となることはよく知られている．

空間ベクトルの内積についても，次の基本性質が成り立つことを高校で学習した．

命題 2.2. （内積の性質）
任意の空間ベクトル $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ と実数 k に対して，以下が成り立つ．

(1) $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}) = (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{c}) + (\boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}), \quad (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}) = (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) + (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{c})$

(2) $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = (\boldsymbol{b}, \boldsymbol{a})$

(3) $(k\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = (\boldsymbol{a}, k\boldsymbol{b}) = k(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$

(4) $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{a}) \geqq 0$ であり，$(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{a}) = 0 \iff \boldsymbol{a} = \boldsymbol{0}$

命題 2.3. （垂直であるための条件）
$\boldsymbol{0}$ でない空間ベクトル $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ が垂直であるための必要十分条件は

$$(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = 0$$

となることである．このとき，$\boldsymbol{a} \perp \boldsymbol{b}$ で表し，$\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ は**直交する**という．

また，平面ベクトルと同様に次の不等式が成り立つ．

命題 2.4. （有名な不等式）
任意の空間ベクトル $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ に対して，次の不等式が成り立つ．

(1) **（三角不等式）** $\|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}\| \leqq \|\boldsymbol{a}\| + \|\boldsymbol{b}\|$

(2) **（シュワルツの不等式）** $|(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})| \leqq \|\boldsymbol{a}\|\|\boldsymbol{b}\|$

証明は平面ベクトルの場合と全く同様である．

練習問題 2.1. $\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ とするとき，$\|\boldsymbol{a}+t\boldsymbol{b}\|$ の最小値とそのときの実数 t の値を求めよ．

練習問題 2.2. $\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$ のなす角 θ を求めよ．

練習問題 2.3. 3 点 $\mathrm{A}(1,2,4)$, $\mathrm{B}(2,5,6)$, $\mathrm{C}(m,n,10)$ が同一直線上にあるときの m,n の値を求めよ．

練習問題 2.4. 2 点 $\mathrm{A}(0,3,7)$, $\mathrm{B}(3,-3,1)$ があるとき，線分 AB を $4:3$ に内分する点 M，外分する点 N の座標を求めよ．

練習問題 2.5. 2 点 $\mathrm{A}(0,1,1)$, $\mathrm{B}(1,3,0)$ を通る直線を l とする．原点 O から直線 l に下ろした垂線と l との交点 P の座標を求めよ．

2.2　座標空間における直線の方程式

定義 2.5.（空間内の直線のベクトル方程式）
　空間における直線上の点を表すベクトル $\boldsymbol{x}$ は，直線上のある 1 点を表すベクトル $\boldsymbol{a}$ と方向を表す $\boldsymbol{0}$ でないベクトル $\boldsymbol{v}$ を用いて

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{a} + t\boldsymbol{v}$$

と表せる．ここで，t は実数全体を動くパラメータである．これを直線の**パラメータ表示**といい，$\boldsymbol{v}$ をこの直線の**方向ベクトル**という．

　ベクトル方程式 $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{a} + t\boldsymbol{v}$ に $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$，$\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$，$\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$ を代入すると

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 + tv_1 \\ a_2 + tv_2 \\ a_3 + tv_3 \end{pmatrix}$$

となる．これよりパラメータ t を消去すれば，$v_1v_2v_3 \fallingdotseq 0$ のときには直線の方程式は

$$\frac{x - a_1}{v_1} = \frac{y - a_2}{v_2} = \frac{z - a_3}{v_3}$$

と表せる．ただし，この形は扱いにくいことが多い．そのため，パラメータ表示

$$\begin{cases} x = a_1 + tv_1 \\ y = a_2 + tv_2 \\ z = a_3 + tv_3 \end{cases}$$

の方が便利である．

例題 2.6.　2 点 $\mathrm{A}(1, 2, 3)$, $\mathrm{B}(-1, 3, 5)$ を通る直線 AB のパラメータ表示と方程式を求めよ．

（解答）　直線 AB のパラメータ表示は

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \overrightarrow{\mathrm{OA}} + t\overrightarrow{\mathrm{AB}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \qquad (t \in \mathbb{R})$$

となる．これより

$$x = 1 - 2t, \qquad y = 2 + t, \qquad z = 3 + 2t$$

であるから，t を消去すれば直線 AB の方程式は

$$\frac{x-1}{-2} = y - 2 = \frac{z-3}{2}$$

である．

（解答終）

　上の例題で直線のパラメータ表示は

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \overrightarrow{\mathrm{OB}} + t\overrightarrow{\mathrm{BA}} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix} \qquad (t \in \mathbb{R})$$

などでもよい．解答は 1 通りではないので注意すること．

2.3 座標空間における平面の方程式

空間内の平面は同一直線上にはない 3 点を与えると，その 3 点を通る平面が 1 通りに定まる．

定義 2.7.（空間内の平面のベクトル方程式）
空間内の平面 H 上のある 1 点 A の位置ベクトル $\boldsymbol{a}$ をとり，点 A とは異なる H 上の 2 点 B, C を $\boldsymbol{u} = \overrightarrow{\mathrm{AB}}$ と $\boldsymbol{v} = \overrightarrow{\mathrm{AC}}$ が互いに平行でないようにとる．このとき，H 上の点 P の位置ベクトル $\boldsymbol{x} = \overrightarrow{\mathrm{OP}}$ は

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{a} + s\boldsymbol{u} + t\boldsymbol{v}$$

と表せる．ここで，s と t は実数全体を動くパラメータである．これを平面 H の**パラメータ表示**という．

例題 2.8. 3 点 $\mathrm{A}(1, 2, 3)$, $\mathrm{B}(-2, 5, 3)$, $\mathrm{C}(3, -1, 2)$ を通る平面 H のパラメータ表示を求めよ．

（解答） $\overrightarrow{\mathrm{AB}} = \begin{pmatrix} -3 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{\mathrm{AC}} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ -1 \end{pmatrix}$ であり，これらは平行ではない．よって，H のパラメータ表示は

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \overrightarrow{\mathrm{OA}} + s\overrightarrow{\mathrm{AB}} + t\overrightarrow{\mathrm{AC}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} -3 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ -1 \end{pmatrix} \qquad (s, t \in \mathbb{R})$$

（解答終）

上の例題で平面のパラメータ表示は 1 通りではなく，いろいろな表現が考えられる．例えば，上の解答で $s' = 3s$ とおいて

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + s'\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ -1 \end{pmatrix} \qquad (s', t \in \mathbb{R})$$

を答えとしてもよい．

空間内の直線の方程式を求めたときのように，平面を表す方程式を考えてみる．平面のベクトル方程式には 2 つのパラメータ s, t があるので，これらを消去して平面の方程式を求めるのはやや面倒である．そこで，その代わりに法線ベクトルを利用した平面の方程式の表示法を紹介する．

定義 2.9. （空間内の平面のベクトル方程式）

空間における平面 H 上の点 P の位置ベクトル $\boldsymbol{x} = \overrightarrow{\mathrm{OP}}$ は，H 上のある 1 点 A の位置ベクトル $\boldsymbol{a}$ をとり，平面 H に垂直な $\mathbf{0}$ でないベクトル $\boldsymbol{n}$ をとれば

$$(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{a}, \boldsymbol{n}) = 0$$

と表せる．$\boldsymbol{n}$ をこの平面 H の**法線ベクトル**という．

点 A と点 P が平面 H 上にあれば，ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{AP}}$ は平面 H 上にあるので，法線ベクトル $\boldsymbol{n}$ との内積は 0 である．この関係を数式化したものが

$$(\overrightarrow{\mathrm{AP}}, \boldsymbol{n}) = (\boldsymbol{x} - \boldsymbol{a}, \boldsymbol{n}) = 0$$

である．成分を $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$，$\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$，$\boldsymbol{n} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ とおき，上式に代入すると

$$(x - a_1)a + (y - a_2)b + (z - a_3)c = ax + by + cz - a_1a - a_2b - a_3c = 0$$

となるので，$d = -a_1a - a_2b - a_3c$ とおけば

$$ax + by + cz + d = 0$$

と表せる．この計算は逆にたどることもできるので，次の定理が成り立つ．

定理 2.10. （空間内の平面の方程式）

$\boldsymbol{n} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \fallingdotseq \mathbf{0}$ とする．

(1) 点 (x_0, y_0, z_0) を通り，ベクトル $\boldsymbol{n}$ に垂直な平面の方程式は次で与えられる．

$$a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0$$

(2) 1 次方程式 $ax + by + cz + d = 0$ は $\boldsymbol{n}$ を法線ベクトルとする平面の方程式である．

例題 2.11. 点 $(1, 2, 3)$ を通り，ベクトル $\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}$ に垂直な平面 H の方程式を求めよ．

（解答） H の法線ベクトルが $\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}$ であるから，H の方程式は

$$3(x - 1) - 2(y - 2) + 4(z - 3) = 0 \qquad \therefore\ 3x - 2y + 4z - 11 = 0$$

（解答終）

これらの事実を用いることにより，平面が与えられたときにパラメータ表示から方程式を求めたり，逆に方程式からパラメータ表示を求めたりすることができる．

例題 2.12. 次の平面 H の方程式を求めよ．

(1) パラメータ表示

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ 3 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \qquad (s, t \in \mathbb{R})$$

で表される平面

(2) 3 点 $\mathrm{A}(1,-3,0)$, $\mathrm{B}(-1,4,-1)$, $\mathrm{C}(3,2,1)$ を通る平面

(3) 直線 l: $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ を含み，点 $\mathrm{A}(1,0,1)$ を通る平面．

（解答）

(1) H の法線ベクトルを $\boldsymbol{n} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ とおけば，これは $\boldsymbol{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ と垂直であるから

$$(\boldsymbol{n}, \boldsymbol{u}) = a - 3b + 2c = 0, \qquad (\boldsymbol{n}, \boldsymbol{v}) = 3a + b - 2c = 0$$

となる．よって，$b = 2a$, $c = \dfrac{5a}{2}$ であるから，法線ベクトルの 1 つは $\boldsymbol{n} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}$ である．平面 H は点 $(2,-4,3)$ を通るので，H の方程式は

$$2(x-2) + 4(y+4) + 5(z-3) = 0 \qquad \therefore\ 2x + 4y + 5z = 3$$

(2) H の法線ベクトルを $\boldsymbol{n} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ とおけば，これは $\overrightarrow{\mathrm{AB}} = \begin{pmatrix} -2 \\ 7 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{\mathrm{AC}} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}$ と垂直であるから

$$(\boldsymbol{n}, \overrightarrow{\mathrm{AB}}) = -2a + 7b - c = 0, \qquad (\boldsymbol{n}, \overrightarrow{\mathrm{AC}}) = 2a + 5b + c = 0$$

となる．よって，$b = 0$, $c = -2a$ であるから，法線ベクトルの 1 つは $\boldsymbol{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$ である．平面 H は点 $(1,-3,0)$ を通るので，H の方程式は

$$1(x-1) - 0(y+3) - 2(z-0) = 0 \qquad \therefore\ x - 2z = 1$$

(3) H の法線ベクトルを $\boldsymbol{n} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ とおく．このとき，l が通る点 $\mathrm{B}(-2,1,1)$ について，$\boldsymbol{n}$ は直線 l の方向ベクトル $\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ および $\overrightarrow{\mathrm{AB}} = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ と垂直である．よって

$$(\boldsymbol{n}, \boldsymbol{v}) = 3a + b - 2c = 0, \qquad (\boldsymbol{n}, \overrightarrow{\mathrm{AB}}) = -3a + b = 0$$

であるから，$b = 3a$, $c = 3a$ となる．ゆえに，法線ベクトルの 1 つとして $\boldsymbol{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}$ をとることができるから，平面 H の方程式は

$$1(x-1) + 3(y-0) + 3(z-1) = 0 \qquad \therefore\ x + 3y + 3z = 4$$

（解答終）

例題 2.13. 平面 $H: 2x-3y+6z=5$ のパラメータ表示を求めよ．

（解答 1） 平面 H の法線ベクトル $\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 6 \end{pmatrix}$ と直交するベクトルとして $\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ がとれて，この 2 本のベクトルは平行ではない．また，H は点 $(1,-1,0)$ を通るから，H のパラメータ表示は

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad (s,t\in\mathbb{R})$$

（解答 2） 平面 H は 3 点 $\mathrm{A}(1,-1,0)$, $\mathrm{B}(1,1,1)$, $\mathrm{C}(4,1,0)$ を通り

$$\overrightarrow{\mathrm{AB}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad \overrightarrow{\mathrm{AC}} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

は平行ではないから，H のパラメータ表示は

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \overrightarrow{\mathrm{OA}} + s\overrightarrow{\mathrm{AB}} + t\overrightarrow{\mathrm{AC}} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad (s,t\in\mathbb{R})$$

（解答終）

例題 2.14. 平面 $x+y+z-1=0$ と平面 $2x-y+z+1=0$ が交わってできる直線のパラメータ表示を求めよ．

（解答） 交わってできる直線は連立方程式

$$\begin{cases} x+y+z-1=0 \\ 2x-y+z+1=0 \end{cases}$$

の解の集合である．これを解けば，t を任意の実数として

$$x=2t, \qquad y=1+t, \qquad z=-3t$$

が得られるから，求める直線のパラメータ表示は

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2t \\ 1+t \\ -3t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} \qquad (t\in\mathbb{R})$$

（解答終）

高校数学において，平面内の点と直線の距離公式を学習した．同様の公式が空間内の点と平面の距離についても成り立つ．

空間内の点 $\mathrm{A}(x_0, y_0, z_0)$ から平面 $H\colon ax + by + cz + d = 0$ に下ろした垂線の足を B とおくとき，線分 AB の長さを点 A と平面 H の距離という．

定理 2.15. （点と平面の距離公式）
点 $\mathrm{A}(x_0, y_0, z_0)$ と平面 $H\colon ax + by + cz + d = 0$ の距離は

$$\frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

で与えられる．

注意 2.16. $a^2 + b^2 + c^2 = 0$ となることはない．実際，このとき $a = b = c = 0$ となり，方程式が $d = 0$ となって，これは平面を表さない．

証明. 平面 H の法線ベクトルは

$$\boldsymbol{n} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$$

である．点 A から平面 H に下ろした垂線の足を B とおくとき，直線 AB は H と垂直だから $\boldsymbol{n}$ と平行である．よって，ある実数 k を用いて

$$\overrightarrow{\mathrm{AB}} = k\boldsymbol{n}$$

と表せる．ゆえに

$$\overrightarrow{\mathrm{OB}} = \overrightarrow{\mathrm{OA}} + \overrightarrow{\mathrm{AB}} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} + k \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 + ka \\ y_0 + kb \\ z_0 + kc \end{pmatrix}$$

となるから，垂線の足の座標は $\mathrm{B}(x_0 + ka, y_0 + kb, z_0 + kc)$ である．

この点 B が平面 H 上にあるから，平面の方程式に代入して

$$\begin{aligned} a(x_0 + ka) + b(y_0 + kb) + c(z_0 + kc) + d = 0 \\ (a^2 + b^2 + c^2)k + ax_0 + by_0 + cz_0 + d = 0 \end{aligned}$$

より

$$k = -\frac{ax_0 + by_0 + cz_0 + d}{a^2 + b^2 + c^2}$$

が得られる．したがって，求める距離は線分 AB の長さだから

$$\|\overrightarrow{\mathrm{AB}}\| = |k|\,\|\boldsymbol{n}\| = \left| -\frac{ax_0 + by_0 + cz_0 + d}{a^2 + b^2 + c^2} \right| \cdot \sqrt{a^2 + b^2 + c^2} = \frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

が成り立つ． □

これにより，点と平面の距離が簡単に計算できるため，例えば高校数学のときよりも容易に四面体などの体積が求められる．

3　数ベクトル空間の定義と性質

定義 3.1.（数ベクトル空間）

(1) n 個の実数 $a_1, a_2, \ldots, a_n$ の組を縦に並べて書いた

$$\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$$

を n **次元数ベクトル**とよぶ．また，n 次元数ベクトル全体の集合を n 次元数ベクトル空間といい，$\mathbb{R}^n$ で表す．また，a_i を数ベクトル $\boldsymbol{a}$ の第 i 成分という．a_i が実数であることを強調して，実 n 次元数ベクトル空間とよぶこともある．集合の記号を用いて表せば

$$\mathbb{R}^n = \left\{ \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \,\middle|\, a_i \in \mathbb{R}\ (1 \leqq i \leqq n) \right\}$$

となる．2 つの n 次元数ベクトル $\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$，$\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$ に対して，$a_i = b_i\ (1 \leqq i \leqq n)$ となるとき，$\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ は等しいといい，$\boldsymbol{a} = \boldsymbol{b}$ で表す．

(2) $\mathbb{R}$ の要素を**スカラー**とよぶ．

(3) n 次元数ベクトル $\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$，$\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$ とスカラー α に対して，和 $\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}$ とスカラー倍 $\alpha\boldsymbol{a}$ を

$$\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} \coloneqq \begin{pmatrix} a_1 + b_1 \\ a_2 + b_2 \\ \vdots \\ a_n + b_n \end{pmatrix}, \qquad \alpha\boldsymbol{a} \coloneqq \begin{pmatrix} \alpha a_1 \\ \alpha a_2 \\ \vdots \\ \alpha a_n \end{pmatrix}$$

で定義する．

(4) 成分がすべて 0 の数ベクトル $\boldsymbol{0} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ を**零ベクトル**という．

なお後半の章では，成分として複素数を並べた『複素ベクトル』（通常は単にこれも数ベクトルという）も自然に現れる．その際には，実数に限定せずに複素数をスカラーと呼ぶようになる．

記号として，$-\boldsymbol{a} = (-1)\boldsymbol{a}$ と定義する．また，$\boldsymbol{a} + (-\boldsymbol{b})$ を単に $\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b}$ と書く．

数ベクトルの和とスカラー倍に関して，次が成り立つ．

(i) $(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}) + \boldsymbol{c} = \boldsymbol{a} + (\boldsymbol{b} + \boldsymbol{c})$ （結合法則）

(ii) $\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} = \boldsymbol{b} + \boldsymbol{a}$ （交換法則）

(iii) 任意の $\boldsymbol{a}$ に対して，$\boldsymbol{a} + \boldsymbol{0} = \boldsymbol{0} + \boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}$

(iv) $\boldsymbol{a} + (-\boldsymbol{a}) = \boldsymbol{0}$

さらに，α と β をスカラーとすれば

(v) $(\alpha\beta)\boldsymbol{a} = \alpha(\beta\boldsymbol{a})$ （結合法則）

(vi) $1\boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}$

(vii) $\alpha(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}) = \alpha\boldsymbol{a} + \alpha\boldsymbol{b}$ （ベクトルの分配法則）

(viii) $(\alpha + \beta)\boldsymbol{a} = \alpha\boldsymbol{a} + \beta\boldsymbol{a}$ （スカラーの分配法則）

が成り立つ．これらの性質を満たすものを**ベクトル空間**という．詳しくは第 8 章で扱う．

定義 3.2. （基本ベクトル）
第 i 成分だけが 1 で他の成分がすべて 0 であるような n 次元数ベクトルを $\boldsymbol{e}_i$，すなわち

$$\boldsymbol{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \cdots, \qquad \boldsymbol{e}_n = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$$

と定義し，これらを $\mathbb{R}^n$ の**基本ベクトル**という．このとき，任意の n 次元数ベクトル $\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$ は

$$\boldsymbol{a} = a_1\boldsymbol{e}_1 + a_2\boldsymbol{e}_2 + \cdots + a_n\boldsymbol{e}_n$$

とただ 1 通りに表せる．この右辺の形のベクトルを $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \ldots, \boldsymbol{e}_n$ の **1 次結合**という．

例 3.3. 空間ベクトルの集合 $\mathbb{R}^3$ では，基本ベクトルは

$$\boldsymbol{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{e}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

の 3 個であり，任意の空間ベクトル $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$ は

$$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = a\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = a\boldsymbol{e}_1 + b\boldsymbol{e}_2 + c\boldsymbol{e}_3$$

と基本ベクトルの 1 次結合で表せる．

第2章　行列の定義とその演算

1　行列の定義

1.1　基本的な用語

ベクトルとは数を一列に並べたものだが，それを一般化して数を縦横に並べたものを行列という．

定義 1.1.（行列）

(1) 自然数 m, n に対して，m 行 n 列に実数を並べた

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

の形のものを $m \times n$ 行列という．このとき，$m \times n$ をこの行列の型またはサイズといい，実数を成分にもつ $m \times n$ 行列全体のなす集合を $M_{m\times n}(\mathbb{R})$ で表す．

(2) 行列

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mj} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

において，$\begin{pmatrix} a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \end{pmatrix}$ を A の第 i 行，$\begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{pmatrix}$ を A の第 j 列といい，a_{ij} を A の (i, j) 成分という．この行列を単に $A = (a_{ij})$ や $A = (a_{ij})_{ij}$ とも表す．

(3) 2 個の行列 $A = (a_{ij})$ と $B = (b_{ij})$ が等しいとは，サイズが同じであって，すべての i, j に対して $a_{ij} = b_{ij}$ が成り立つことである．このとき，$A = B$ と書く．

(4) 成分がすべて 0 である行列を**零行列**といい，$m \times n$ のサイズの零行列を $O_{m,n}$ で表す．サイズを明記する必要がない場合には単に O と書く．

注意 1.2.　複素数を成分にもつ行列も同様に定義でき，複素数を成分にもつ $m \times n$ 行列全体のなす集合を $M_{m\times n}(\mathbb{C})$ で表す．以下で述べる行列の性質の大部分は複素数を成分にもつ場合にも成立する．簡単のため実数の場合を中心に説明し，複素数特有の性質がある場合には別途注意することにする．

例えば

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 4 & \sqrt{3} & \pi \\ e & \log 2 & \sin 1 \end{pmatrix}, \qquad C = \begin{pmatrix} x^2 & 2x+1 & -x^3 \end{pmatrix}, \qquad D = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

は行列である．A は 2×2 行列，B は 2×3 行列，C は 1×3 行列，D は 4×1 行列である．このように成分として文字式を考えることもある．また，A の第 1 行は

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix}$$

である．これを（横向きの）ベクトルと思うときには**第 1 行ベクトル**と呼ぶ．同様に，A の第 2 列は

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}$$

であり，ベクトルと思うときには**第 2 列ベクトル**と呼ぶ．他の行や列についても同様である．また，D は 4 次元数ベクトルと考えることもできる．この意味で，行列はベクトルの一般化と考えられる．

なお，行列は数を長方形の形に並べること．

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ -2 & \\ 9 & -4 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ & 7 \end{pmatrix}$$

のように空欄がある場合には行列とは呼ばない．

また，零行列を具体的に書いてみると

$$O_{2,2} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad O_{2,3} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad O_{3,2} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad O_{3,1} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

のようになる．ここで，$O_{3,1}$ とは零ベクトルのことであるから，$\mathbf{0}$ と書くことも多い．また，次節で述べるように $O_{2,2}$ のように行の数と列の数が同じ場合には O_2 と書くのが普通である．

注意 1.3. 行列の記法についていくつか注意しておく．

(1) 行列は大文字のアルファベットを用いて表すこと．**ベクトルのように太字で書く必要はない．**

(2) 高校数学とは異なり，**成分の切れ目にコンマを打ってはいけない．**スペースを空けて成分を区別すること．

(3) (15) のような 1×1 行列は，普通は単に 15 と書くことが多い．

例題 1.4.　次の行列

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \end{pmatrix}$$

について，以下のものを答えよ．

(1) 型（サイズ）　(2) $(3,1)$ 成分　(3) 第 3 行ベクトル　(4) 第 2 列ベクトル

（解答）

(1) 3×4 行列　(2) 9　(3) $\begin{pmatrix} 9 & 10 & 11 & 12 \end{pmatrix}$

(4) $\begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ 10 \end{pmatrix}$

（解答終）

例題 1.5.　次の等式が成り立つような a と b の値を求めよ．

$$\begin{pmatrix} a+3 & a+1 \\ b+4 & b-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}$$

（解答）　サイズが同じだから，行列が等しいのは各成分がすべて一致するときである．よって

$$\begin{cases} a+3=5 & \cdots ① \\ a+1=3 & \cdots ② \\ b+4=4 & \cdots ③ \\ b-1=-1 & \cdots ④ \end{cases}$$

となる．① より $a=2$ であり，③ より $b=0$ である．これらは確かに残りの方程式 ② と ④ をみたすから，求める答えは $a=2,\ b=0$ となる．

（解答終）

1.2 正方行列

ここでは特に行の数と列の数の等しい行列について考える．

定義 1.6. （正方行列）
行列 A の行の数と列の数が等しいとき，A は**正方行列**であるという．また，$n \times n$ 行列を n 次正方行列といい，n 次正方行列全体の集合を $M_n(\mathbb{R})$ と表す．
すべての成分が 0 である n 次正方行列を O_n と書き，n **次零行列**という．単に O で表すこともある．

例 1.7. （正方行列の例）

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}, \qquad C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \\ 13 & 14 & 15 & 16 \end{pmatrix}$$

とおけば，A は 2 次正方行列，B は 3 次正方行列，C は 4 次正方行列である．また，2 次零行列，3 次零行列，4 次零行列はそれぞれ

$$O_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad O_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad O_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

となる．考えている状況からサイズが明らかな場合には，添え字を省略して単に O と書く．

定義 1.8. （対角行列）
n 次正方行列 $A = (a_{ij})_{ij}$ について，成分 a_{ii} $(i = 1, 2, \ldots, n)$ を A の**対角成分**とよぶ．また，対角成分以外の成分がすべて 0 である正方行列を**対角行列**という．

例 1.9. （対角行列の例）

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad C = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}$$

とおけば，A は 2 次の対角行列，B は 3 次の対角行列，C は 4 次の対角行列である．C のように対角成分には 0 があってもよい．よって，特に零行列は対角行列である．

定義 1.10. （単位行列）
対角成分がすべて 1 である n 次対角行列を E_n と書き，n **次単位行列**という．単に E や I で表すこともある．

2 次単位行列，3 次単位行列，4 次単位行列を具体的に書けば，それぞれ

$$E_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad E_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad E_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

となる．考えている状況からサイズが明らかな場合には，添え字を省略して単に E と書く．

定義 1.11. （三角行列）

n 次正方行列 $A = (a_{ij})_{ij}$ について，対角成分より左下の成分がすべて 0 であるとき，つまり $a_{ii} = 0\ (i > j)$ であるとき，A は**上三角行列**であるという．同様に，対角成分より右上の成分がすべて 0 であるとき，つまり $a_{ii} = 0\ (i < j)$ であるとき，A は**下三角行列**であるという．上三角行列と下三角行列をあわせて**三角行列**という．

例 1.12. （三角行列の例）

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \qquad B_1 = \begin{pmatrix} -2 & 6 & 3 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}, \qquad C_1 = \begin{pmatrix} 9 & -7 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

とおけば，A_1 は 2 次の上三角行列，B_1 は 3 次の上三角行列，C_1 は 4 次の上三角行列である．対角成分より左下がすべて 0 ならば，対角成分や右上の部分に 0 があってもよい．

$$A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -5 & 2 \end{pmatrix}, \qquad B_2 = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 4 & 3 & 0 \\ 8 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad C_2 = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 \\ -6 & 7 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ -1 & 5 & 9 & 15 \end{pmatrix}$$

とおけば，A_2 は 2 次の下三角行列，B_2 は 3 次の下三角行列，C_2 は 4 次の下三角行列である．対角成分より右上がすべて 0 ならば，対角成分や左下の部分に 0 があってもよい．

定義より，正方行列 A が上三角行列かつ下三角行列ならば対角行列となる．各自確かめてみよ．

2　行列の和とスカラー倍

行列の和とスカラー倍を次で定める．

定義 2.1. （行列の和とスカラー倍）

(1) $m \times n$ 行列 $A = (a_{ij}),\ B = (b_{ij})$ に対して，$m \times n$ 行列 $A + B$ を

$$A + B \coloneqq (a_{ij} + b_{ij})$$

と定義する．なお，サイズの違う行列の和は定義されない．

(2) $m \times n$ 行列 $A = (a_{ij})$ とスカラー α に対して，$m \times n$ 行列 αA を

$$\alpha A \coloneqq (\alpha a_{ij})$$

と定義する．

つまり，行列の和についてはサイズが同じ場合には

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 & 4 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 7 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$$

のように同じ成分どうしの和を計算する．次のようにサイズが違う場合

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 & 4 & 3 \\ 0 & 1 & 5 \end{pmatrix}$$

には和は定義されない（このような和は考えない）．

また，スカラー倍については

$$3\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 9 \\ 6 & 12 \end{pmatrix}$$

とすべての成分にかければよい．

定義からわかるように，<u>行列の和やスカラー倍で行列のサイズが変わることはない</u>．

$m \times n$ 行列 A, B, C とスカラー α, β に対して，次が成り立つ．

- $(A + B) + C = A + (B + C)$　　（結合法則）
- $A + B = B + A$　　（交換法則）
- $(\alpha\beta)A = \alpha(\beta A)$　　（結合法則）
- $\alpha(A + B) = \alpha A + \alpha B$　　（分配法則）
- $(\alpha + \beta)A = \alpha A + \beta A$　　（分配法則）
- $A + O_{m,n} = A$

簡単にまとめれば，行列の和やスカラー倍は高校数学で学習したベクトルのように行ってよいということである．

行列の計算は単純だが計算量が多いので，ミスがないようにしっかり練習すること．

例題 2.2. 次の計算をせよ．

(1) $2\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} + 3\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & -6 \end{pmatrix}$

(2) $\dfrac{3}{2}\begin{pmatrix} 6 & 8 \\ 2 & -4 \end{pmatrix} - 4\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$

(3) $4\begin{pmatrix} 6 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & -2 \end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix} 1 & 6 & -5 \\ 3 & -8 & 2 \end{pmatrix}$

(4) $2\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 0 \\ 5 & -4 \end{pmatrix} + 3\begin{pmatrix} 8 & 1 \\ -4 & 2 \\ 7 & 0 \end{pmatrix}$

（解答）

(1) $2\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} + 3\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & -6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & -2 \\ 4 & 10 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & 12 \\ 6 & -18 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & 10 \\ 10 & -8 \end{pmatrix}$

(2) $\dfrac{3}{2}\begin{pmatrix} 6 & 8 \\ 2 & -4 \end{pmatrix} - 4\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & 12 \\ 3 & -6 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 & -8 \\ -12 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 20 \\ 15 & -14 \end{pmatrix}$

(3) $4\begin{pmatrix} 6 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & -2 \end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix} 1 & 6 & -5 \\ 3 & -8 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 24 & 4 & 8 \\ 12 & 0 & -8 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 12 & -10 \\ 6 & -16 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 22 & -8 & 18 \\ 6 & 16 & -12 \end{pmatrix}$

(4) $2\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 0 \\ 5 & -4 \end{pmatrix} + 3\begin{pmatrix} 8 & 1 \\ -4 & 2 \\ 7 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & -2 \\ 4 & 0 \\ 10 & -8 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 24 & 3 \\ -12 & 6 \\ 21 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 30 & 1 \\ -8 & 6 \\ 31 & -8 \end{pmatrix}$

（解答終）

例題 2.3. $A = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 5 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$ とおく．次の等式をみたす行列 C, X, Y を求めよ．

(1) $8C + A = 3\{2B - (4A - C)\}$

(2) $2X - 3Y = A,\ X - 2Y = B$

（解答）

(1) 与式より

$$8C + A = 3\{2B - (4A - C)\} = 6B - 12A + 3C$$

なので，$5C = -13A + 6B$ となる．よって

$$5C = -13\begin{pmatrix} 5 & 0 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} + 6\begin{pmatrix} 0 & 5 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -65 & 30 \\ 45 & -25 \end{pmatrix} \qquad \therefore\ C = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} -65 & 30 \\ 45 & -25 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -13 & 6 \\ 9 & -5 \end{pmatrix}$$

(2) $2X - 3Y = A\ \cdots$ ①, $X - 2Y = B\ \cdots$ ② とおく．

① $\times 2 -$ ② $\times 3$ より

$$X = 2A - 3B = 2\begin{pmatrix} 5 & 0 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} - 3\begin{pmatrix} 0 & 5 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & -15 \\ -9 & 8 \end{pmatrix}$$

① $-$ ② $\times 2$ より

$$Y = A - 2B = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix} 0 & 5 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & -10 \\ -5 & 5 \end{pmatrix}$$

（解答終）

3　行列の積

3.1　行列の積の定義

行列の積は次で定義される．

定義 3.1. （行列の積）
$m \times n$ 行列 $A = (a_{ik})$ と $n \times l$ 行列 $B = (b_{kj})$ に対して，$m \times l$ 行列 $AB = (c_{ij})$ を

$$c_{ij} := \sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj} = a_{i1}b_{1j} + \cdots + a_{in}b_{nj}$$

で定義し，これを A と B の積という．なお，積 AB は A の列の数と B の行の数が一致するときのみ定義される．

和やスカラー倍と比べると，これだけでは計算法がややわかりにくいかもしれない．左側の行列の行ベクトル（横ベクトル）と右側の行列の列ベクトル（縦ベクトル）の内積をとる形になっているので，いくつかの具体例を通して計算できるようになってほしい．なお，最初なので途中計算を丁寧に書くが，慣れてくれば省略してよい．むしろ丁寧に書く方が転記ミスや計算ミスを誘発しやすいかもしれない．

さまざまなサイズの行列の積の計算例を列挙する．左側の行列の列の数と右側の行列の行の数が一致していることは確認すること．

基本となる 1×2 行列と 2×1 行列の積は

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix} = 3 \cdot 4 + (-1) \cdot 2 = 12 - 2 = 10$$

であり，1×1 行列なので普通の数字となる．これは後でも述べるように，左側の列ベクトルと右側の行ベクトルの内積と考えられる．

1×2 行列と 2×2 行列の積は

$$\begin{pmatrix} 7 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 8 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \cdot 2 + (-2) \cdot 8 & 7 \cdot 1 + (-2) \cdot 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & -1 \end{pmatrix}$$

であり，1×2 行列となる．また，左側の行ベクトルと右側の第 1 列ベクトルの内積が積の行列の $(1, 1)$ 成分になっている（赤字の部分）．同様に，左側の行ベクトルと右側の第 2 列ベクトルの内積が積の行列の $(1, 2)$ 成分となる．

2×2 行列と 2×1 行列の積は

$$\begin{pmatrix} 3 & 5 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \cdot 4 + 5 \cdot 7 \\ (-2) \cdot 4 + 1 \cdot 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 47 \\ -1 \end{pmatrix}$$

であり，2×1 行列となる．また，左側の第 1 行ベクトルと右側の列ベクトルの内積が積の行列の $(1, 1)$ 成分になっている（赤字の部分）．同様に，左側の第 2 行ベクトルと右側の列ベクトルの内積が積の行列の $(2, 1)$ 成分となる．

2×2 行列と 2×2 行列の積は

$$\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 0 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \cdot 1 + (-2) \cdot 0 & 4 \cdot 6 + (-2) \cdot (-3) \\ 3 \cdot 1 + 1 \cdot 0 & 3 \cdot 6 + 1 \cdot (-3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 30 \\ 3 & 15 \end{pmatrix}$$

であり，2×2 行列となる．また，左側の第 1 行ベクトルと右側の第 2 列ベクトルの内積が積の行列の $(1, 2)$ 成分になっている（赤字の部分）．同様に，左側の第 1 行ベクトルと右側の第 1 列ベクトルの内積が積の行列の $(1, 1)$ 成分などのように対応する．

2×1 行列と 1×2 行列の積は

$$\begin{pmatrix} 6 \\ 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \cdot 2 & 6 \cdot (-3) \\ 5 \cdot 2 & 5 \cdot (-3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 & -18 \\ 10 & -15 \end{pmatrix}$$

であり，2×2 行列となる．今回は，左側の行ベクトルと右側の列ベクトルがすべてスカラーなので，左側の第 1 行と右側の第 2 列の積が積の行列の $(1, 2)$ 成分になっている（赤字の部分）．

一方，次の行列の積

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}$$

は定義されない．実際，左側の行列は 1×2 行列であり，右側の行列は 3×1 行列なので，左側の行列の列の数 2 と右側の行列の行の数 3 が異なるからである．このような場合には左の列ベクトルと右の行ベクトルで内積がとれないので，行列の積は考えられない．

同様に次の行列の積

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 5 & 7 \end{pmatrix}$$

は定義されない．実際，左側の行列は 2×3 行列であり，右側の行列は 2×2 行列なので，左側の行列の列の数 3 と右側の行列の行の数 2 が異なるからである．

実数の掛け算と違って，そもそも積を考えられない場合があるので注意すること．

いくつかの具体例で説明したが，その他のサイズの行列の積についても同様である．例えば

$$\begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 8 \\ 4 \end{pmatrix} = 1 \cdot 3 + (-3) \cdot 8 + 2 \cdot 4 = -13$$

などのようになる．後で説明する計算例も参照し，確実に計算できるようにしておくこと．

注意 3.2. 行列の積についていくつか注意を述べる．

- 行列 A と B の積を $A \times B$ や $A \cdot B$ と書いてはいけない．行列の積を書くときに実数における掛け算の記号を用いないこと．
- このように行列の積を定義する理由は第 3 章で説明する．
- ここでは行列の積を定めたが，行列の割り算は考えない．

行列の積について次の性質が成り立つ．この証明はやや抽象的なうえに，シグマ記号 Σ の計算に慣れていないと難しい．具体的に 2 次正方行列どうしの積の場合を考えたり，とりあえず後で証明を見直すという形でもよいが，定理の内容は使えるようにしておくこと．

定理 3.3. （行列の演算の性質）

A, B, C を行列とし，α をスカラーとするとき，以下が成り立つ．ただし，積は定義できるとする．

(1) $(AB)C = A(BC)$ （結合法則） (2) $\alpha(AB) = (\alpha A)B = A(\alpha B)$

(3) $A(B+C) = AB + AC$ （分配法則） (4) $(A+B)C = AC + BC$ （分配法則）

証明． (2) の一部と (4) は他と同様に証明できるので演習問題とする．

(1) $A = (a_{ij})$ を $m \times n$ 行列，$B = (b_{ij})$ を $n \times p$ 行列，$C = (c_{ij})$ を $p \times q$ 行列とする．

まず，積 AB の (i, j) 成分を $(AB)_{ij}$ と表すことにすれば

$$(AB)_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj}$$

である．よって，$m \times p$ 行列 AB と $p \times q$ 行列 C の積 $(AB)C$ の (i, j) 成分は

$$\sum_{l=1}^{p} (AB)_{il} c_{lj} = \sum_{l=1}^{p} \left(\sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kl} \right) c_{lj} = \sum_{k=1}^{n} \sum_{l=1}^{p} a_{ik} b_{kl} c_{lj}$$

となる．

一方，積 BC の (i, j) 成分を $(BC)_{ij}$ と表すことにすれば

$$(BC)_{ij} = \sum_{l=1}^{p} b_{il} c_{lj}$$

である．よって，$m \times n$ 行列 A と $n \times q$ 行列 BC の積 $A(BC)$ の (i, j) 成分は

$$\sum_{k=1}^{n} a_{ik} (BC)_{kj} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} \left(\sum_{l=1}^{p} b_{kl} c_{lj} \right) = \sum_{k=1}^{n} \sum_{l=1}^{p} a_{ik} b_{kl} c_{lj}$$

となる．

よって，$1 \leqq i \leqq m,\ 1 \leqq j \leqq q$ に対して，$(AB)C$ の (i, j) 成分と $A(BC)$ の (i, j) 成分がすべて一致するから，$(AB)C = A(BC)$ が成り立つ．

(2) $A = (a_{ij})$ を $m \times n$ 行列，$B = (b_{ij})$ を $n \times p$ 行列とする．

まず，積 AB の (i, j) 成分を $(AB)_{ij}$ と表すことにすれば

$$(AB)_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj}$$

である．よって，$m \times p$ 行列 AB のスカラー倍 $\alpha(AB)$ の (i, j) 成分は

$$\alpha(AB)_{ij} = \alpha \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj}$$

となる．

一方，スカラー倍 αA の (i,j) 成分を $(\alpha A)_{ij}$ と表すことにすれば

$$(\alpha A)_{ij} = \alpha a_{ij}$$

である．よって，$m \times n$ 行列 αA と $n \times q$ 行列 B の積 $(\alpha A)B$ の (i,j) 成分は

$$\sum_{k=1}^{n} (\alpha A)_{ik} b_{kj} = \sum_{k=1}^{n} (\alpha a_{ik}) b_{kj} = \alpha \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj}$$

となる．

よって，$1 \leqq i \leqq m$, $1 \leqq j \leqq p$ に対して，$\alpha(AB)$ の (i,j) 成分と $(\alpha A)B$ の (i,j) 成分がすべて一致するから，$\alpha(AB) = (\alpha A)B$ が成り立つ．

$\alpha(AB) = A(\alpha B)$ についても同様なので演習問題とする．

(3) $A = (a_{ij})$ を $m \times n$ 行列，$B = (b_{ij})$ と $C = (c_{ij})$ を $n \times p$ 行列とする．

まず，和 $B + C$ の (i,j) 成分を $(B + C)_{ij}$ と表すことにすれば

$$(B + C)_{ij} = b_{ij} + c_{ij}$$

である．よって，$m \times n$ 行列 A と $n \times p$ 行列 $B + C$ の積 $A(B + C)$ の (i,j) 成分は

$$\sum_{k=1}^{n} a_{ik}(B + C)_{kj} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}(b_{kj} + c_{kj}) = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj} + \sum_{k=1}^{n} a_{ik} c_{kj}$$

となる．ここで，右辺の第 1 項は積 AB の (i,j) 成分であり，第 2 項は積 AC の (i,j) 成分である．よって，右辺は行列の和 $AB + AC$ の (i,j) 成分である．

ゆえに，$1 \leqq i \leqq m$, $1 \leqq j \leqq p$ に対して，$A(B + C)$ の (i,j) 成分と $AB + AC$ の (i,j) 成分がすべて一致するから，$A(B + C) = AB + AC$ が成り立つ．

(4) (3) と同様なので演習問題とする．

□

練習問題 3.1. 定理 3.3 の (2) の後半および (4) を証明せよ．

行列の積が定義できるならば，定理 3.3(1) より結合法則が成り立つので，3 つの行列の積は左から順にかけても右から順にかけてもよい．よって，3 つの行列の積は単に ABC のようにかっこをつけずに書いて，左からと右からのどちらから計算してもよい．4 個以上の行列の積についても同様である．

また，n 次正方行列 A と B に対しては，常に積 AB と BA が定義され，それらもまた n 次正方行列となる．そこで，正方行列 A のベキ乗を

$$A^2 = AA, \quad A^3 = AAA, \quad A^4 = AAAA = AA^3, \quad \ldots, \quad A^m = AA^{m-1}$$

のように表す．このとき，自然数 k, l に対して

$$A^k A^l = A^{k+l}, \qquad (A^k)^l = A^{kl}$$

のように指数法則が成り立つ．

行列の積が計算できなければ，行列に関する問題はまず解けない．計算ミスをしないようにすることが望ましいが，少なくとも自分がどのようなミスをしやすいか把握できるまでは練習すること．

例題 3.4. 次の行列の積を計算せよ．

(1) $\begin{pmatrix} 2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}$　(2) $\begin{pmatrix} 1 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$　(3) $\begin{pmatrix} -2 \\ 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 4 \end{pmatrix}$

(4) $\begin{pmatrix} -4 \\ 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -3 \end{pmatrix}$　(5) $\begin{pmatrix} 2 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -4 & 0 \\ -5 & 2 \end{pmatrix}$　(6) $\begin{pmatrix} -5 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$

(7) $\begin{pmatrix} -5 & 0 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix}$　(8) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -4 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 \\ -2 \end{pmatrix}$

（解答）

(1) $\begin{pmatrix} 2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix} = 11$　(2) $\begin{pmatrix} 1 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} = -7$

(3) $\begin{pmatrix} -2 \\ 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -8 \\ -5 & 20 \end{pmatrix}$　(4) $\begin{pmatrix} -4 \\ 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & 12 \\ 3 & -9 \end{pmatrix}$

(5) $\begin{pmatrix} 2 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -4 & 0 \\ -5 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & -6 \end{pmatrix}$　(6) $\begin{pmatrix} -5 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 & 9 \end{pmatrix}$

(7) $\begin{pmatrix} -5 & 0 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ -9 \end{pmatrix}$　(8) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -4 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -30 \end{pmatrix}$

（解答終）

例題 3.5. 次の行列の積を計算せよ．

(1) $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$　(2) $\begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$　(3) $\begin{pmatrix} 7 & 2 \\ -5 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & -6 \\ -2 & -8 \end{pmatrix}$

(4) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}^2$　(5) $\begin{pmatrix} 1 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 \\ 5 \end{pmatrix}$　(6) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 & 5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$

（解答）

(1) $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13 & 5 \\ 20 & 8 \end{pmatrix}$　(2) $\begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -9 \\ -1 & 6 \end{pmatrix}$

(3) $\begin{pmatrix} 7 & 2 \\ -5 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & -6 \\ -2 & -8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 17 & -58 \\ -17 & 22 \end{pmatrix}$　(4) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 10 \\ 15 & 22 \end{pmatrix}$

(5) $\begin{pmatrix} 1 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 \\ 5 \end{pmatrix} = -35$　(6) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 & 5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 36 & 27 \\ 5 & -19 \end{pmatrix}$

（解答終）

例題 3.6.　次の等式をみたす a, b, c, d の値を求めよ．

$$\begin{pmatrix} 3 & a \\ -2 & -7 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 7 & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

（解答）　左辺を計算すれば

$$\begin{pmatrix} 3 & a \\ -2 & -7 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 7 & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 21+ac & 3b+ad \\ -14-7c & -2b-7d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

となるから，両辺の成分を比較して

$$\begin{cases} ac+21=1 & \cdots ① \\ 3b+ad=0 & \cdots ② \\ -7c-14=0 & \cdots ③ \\ -2b-7d=1 & \cdots ④ \end{cases}$$

が成り立つ．

まず ③ より

$$c=-2$$

である．これを ① に代入すれば

$$-2a=-20 \qquad \therefore\ a=10$$

となる．さらに，$a=10$ を ② に代入すれば

$$3b+10d=0$$

が得られるので，④ と連立して解けば

$$b=10, \qquad d=-3$$

である．

（解答終）

例題 3.7.　$k \fallingdotseq 0$ とする．このとき

$$A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ k & 0 \end{pmatrix}$$

となる 2 次正方行列 A は存在しないことを示せ．

（解答）　与えられた等式を行列 $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ がみたすと仮定する．このとき

$$A^2 = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2+bc & ab+bd \\ ac+cd & bc+d^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ k & 0 \end{pmatrix}$$

となるから，両辺の成分を比較して

$$\begin{cases} a^2+bc=0 & \cdots ① \\ b(a+d)=0 & \cdots ② \\ c(a+d)=k & \cdots ③ \\ bc+d^2=0 & \cdots ④ \end{cases}$$

が成り立つ．

ここで，③ と $k \fallingdotseq 0$ より，$a+d \fallingdotseq 0$ である．よって，② より $b=0$ となる．これを ① と ④ に代入すれば，$a^2=0,\ d^2=0$ より，$a=d=0$ が得られる．しかし，これは $a+d \fallingdotseq 0$ に矛盾する．したがって，上の連立方程式をみたす (a, b, c, d) の組は存在しないから，与えられた等式をみたす行列 A は存在しない．

（解答終）

例題 3.8.　次の等式

$$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 9 \end{pmatrix}$$

をみたすような 2 次正方行列 A をすべて求めよ．

（解答）　$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ とおく．このとき

$$A^2 = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2+bc & ab+bd \\ ac+cd & bc+d^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 9 \end{pmatrix}$$

となるから，両辺の成分を比較して

$$\begin{cases} a^2+bc = 1 & \cdots ① \\ b(a+d) = 0 & \cdots ② \\ c(a+d) = 4 & \cdots ③ \\ bc+d^2 = 9 & \cdots ④ \end{cases}$$

が成り立つ．

ここで，③ より $a+d \fallingdotseq 0$ である．よって，② より

$$b = 0$$

となる．これを ① と ④ に代入すれば

$$a^2 = 1, \qquad d^2 = 9$$

より

$$(a,d) = (1,3),\ (-1,3),\ (1,-3),\ (-1,-3)$$

が得られる．さらに，③ より

$$c = \frac{4}{a+d}$$

であるから

(i) $(a,d) = (1,3)$ のとき，$c = 1$ より

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

(ii) $(a,d) = (-1,3)$ のとき，$c = 2$ より

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$$

(iii) $(a,d) = (1,-3)$ のとき，$c = -2$ より

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & -3 \end{pmatrix}$$

(iv) $(a,d) = (-1,-3)$ のとき，$c = -1$ より

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -1 & -3 \end{pmatrix}$$

となる．よって，求める行列 A はこれら 4 個である．

（解答終）

例題 3.9.　次の等式

$$A^2 = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$$

をみたすような 2 次正方行列 A をすべて求めよ．

（解答）　$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ とおく．このとき

$$A^2 = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2+bc & ab+bd \\ ac+cd & bc+d^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$$

となるから，両辺の成分を比較して

$$\begin{cases} a^2+bc = 2 & \cdots ① \\ b(a+d) = 2 & \cdots ② \\ c(a+d) = 2 & \cdots ③ \\ bc+d^2 = 2 & \cdots ④ \end{cases}$$

が成り立つ．

ここで，② より $a+d \fallingdotseq 0$ である．よって，② と ③ より

$$b = c = \frac{2}{a+d}$$

となる．また，① から ④ を引けば

$$a^2 - d^2 = 0 \qquad \therefore\ (a+d)(a-d) = 0$$

より，$a+d \fallingdotseq 0$ から

$$a - d = 0 \qquad \therefore\ a = d$$

となる．さらに ① と ② に $d = a,\ c = b$ を代入して

$$a^2 + b^2 = 2, \qquad 2ab = 2$$

であるから

$$(a-b)^2 = a^2 + b^2 - 2ab = 2 - 2 = 0$$

より，$a = b$ が得られる．よって，まとめると

$$a = b = c = d$$

が成り立つ．ゆえに，再度 ① より

$$2a^2 = 2 \qquad \therefore\ a^2 = 1$$

であるから

(i) $a = 1$ のとき，$b = c = d = 1$ より

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

(i) $a = -1$ のとき，$b = c = d = -1$ より

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$$

となる．よって，求める行列 A はこれら 2 個である．

（解答終）

例題 3.10. 次の行列の積を計算せよ.

(1) $\begin{pmatrix} -1 & -2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

(2) $\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -5 & 6 \end{pmatrix}$

(3) $\begin{pmatrix} -3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ -2 & 2 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}$

(4) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -4 \\ -2 & 3 & 2 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}$

(5) $\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 4 & 2 \\ 5 & -3 & 0 \end{pmatrix}$

(6) $\begin{pmatrix} 1 & 4 & -2 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -1 & 0 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$

(7) $\begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ -3 & 4 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 1 & 4 \\ 1 & 0 & -3 \\ 1 & -2 & 4 \end{pmatrix}$

(8) $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 3 & -1 \\ 4 & 1 & 7 \\ -2 & 0 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 7 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$

（解答）

(1) $\begin{pmatrix} -1 & -2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = 8$

(2) $\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -5 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & -10 & 12 \\ -9 & 15 & -18 \\ 12 & -20 & 24 \end{pmatrix}$

(3) $\begin{pmatrix} -3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ -2 & 2 \\ 5 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 & -5 \end{pmatrix}$

(4) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -4 \\ -2 & 3 & 2 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -14 \\ -5 \\ -2 \end{pmatrix}$

(5) $\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 4 & 2 \\ 5 & -3 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -13 & 18 & 6 \\ 1 & 13 & 8 \end{pmatrix}$

(6) $\begin{pmatrix} 1 & 4 & -2 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -1 & 0 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -12 & 5 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}$

(7) $\begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ -3 & 4 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 1 & 4 \\ 1 & 0 & -3 \\ 1 & -2 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & -7 & 2 \\ 3 & -4 & 5 \\ 10 & -3 & -24 \end{pmatrix}$

(8) $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 3 & -1 \\ 4 & 1 & 7 \\ -2 & 0 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 7 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} = -17$

（解答終）

例題 3.11.　次の行列について積が定義できる場合にはその積を計算し，定義できない場合にはその理由を述べよ．

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -3 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ -1 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}, \qquad C = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 6 \end{pmatrix}, \qquad D = \begin{pmatrix} 4 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

(1) AB　(2) BA　(3) CD　(4) DC

(5) AA　(6) AD　(7) AC　(8) $(AB)C$

（解答）　A は 2×3 行列，B は 3×2 行列，C は 3×1 行列，D は 1×3 行列である．

(1)　2×3 行列 A の列の数 3 と 3×2 行列 B の行の数 3 が一致するから，積 AB は定義できて 2×2 行列となる．よって

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ -1 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 5 \\ -1 & -13 \end{pmatrix}$$

(2)　3×2 行列 B の列の数 2 と 2×3 行列 A の行の数 2 が一致するから，積 BA は定義できて 3×3 行列となる．よって

$$BA = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ -1 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -3 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -13 & 9 & 10 \\ -1 & -2 & 0 \\ 0 & 7 & 2 \end{pmatrix}$$

(3)　3×1 行列 C の列の数 1 と 1×3 行列 D の行の数 1 が一致するから，積 CD は定義できて 3×3 行列となる．よって

$$CD = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 1 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 & 3 & -6 \\ -8 & -2 & 4 \\ 24 & 6 & -12 \end{pmatrix}$$

(4)　1×3 行列 D の列の数 3 と 3×1 行列 C の行の数 3 が一致するから，積 DC は定義できて 1×1 行列（スカラー）となる．よって

$$DC = \begin{pmatrix} 4 & 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 6 \end{pmatrix} = -2$$

(5)　2×3 行列 A の列の数 3 と 2×3 行列 A の行の数 2 が一致しないから，積 AA は定義できない．

(6)　2×3 行列 A の列の数 3 と 1×3 行列 D の行の数 1 が一致しないから，積 AD は定義できない．

(7)　2×3 行列 A の列の数 3 と 3×1 行列 C の行の数 3 が一致するから，積 AC は定義できて 2×1 行列となる．よって

$$AC = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

(8)　(1) より AB は 2×2 行列である．よって，2×2 行列 AB の列の数 2 と 3×1 行列 C の行の数 3 が一致しないから，積 $(AB)C$ は定義できない．

（解答終）

3.2 行列の積の非可換性と零因子

行列の積には，実数の掛け算と異なる点がいくつかあり，次の例題を通して説明する．以下で述べる積に関する特徴を強く認識することは，今後の行列に関する学習において非常に重要である．

例題 3.12. 次の行列 A と B に対して，積 AB と BA が定義される場合には計算し，定義されない場合にはその理由を述べよ．

(1) $A = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$，$B = \begin{pmatrix} 3 & -1 \end{pmatrix}$

(2) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$，$B = \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \end{pmatrix}$

(3) $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}$，$B = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}$

(4) $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$，$B = \begin{pmatrix} 3 & 8 \\ 4 & 7 \end{pmatrix}$

(5) $A = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -2 & 6 \end{pmatrix}$，$B = \begin{pmatrix} 3 & -3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$

（解答）

(1) $AB = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 6 & -2 \end{pmatrix}$，$BA = 1$

(2) $AB = \begin{pmatrix} 17 \\ 39 \end{pmatrix}$，$B$ の列の数は 1 で A の行の数は 2 と一致しないため BA は定義されない．

(3) $AB = \begin{pmatrix} 7 & 3 \\ 9 & 33 \end{pmatrix}$，$BA = \begin{pmatrix} 6 & -13 \\ 0 & 34 \end{pmatrix}$

(4) $AB = \begin{pmatrix} 19 & 36 \\ 18 & 37 \end{pmatrix}$，$BA = \begin{pmatrix} 19 & 36 \\ 18 & 37 \end{pmatrix}$

(5) $AB = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = O$，$BA = \begin{pmatrix} 9 & -27 \\ 3 & -9 \end{pmatrix}$

（解答終）

行列の積は AB が定義できても BA も定義されるとは限らないので注意すること．また，AB と BA の両方が定義されたとしてもサイズが異なることもある．

また，(3) では AB と BA のサイズは同じだが $AB \neq BA$ となっている．このように，普通は**行列の積について交換法則 $AB = BA$ は成り立たない**．これは実数の掛け算との大きな違いの 1 つである．(4) のように特別な場合には $AB = BA$ となることもあり，この性質には名前がついている．

定義 3.13. （可換）
n 次正方行列 A と B が $AB = BA$ をみたすとき，A と B は**交換可能**または**可換**であるという．

さらに，(5) では $A \neq O$ かつ $B \neq O$ だが，$AB = O$ となっている．つまり A と B がともに零行列でなくても，積 AB が零行列になることがある．言い換えれば，**積 $AB = O$ であっても，$A = O$ または $B = O$ とすることはできない**．これも実数の掛け算との大きな違いの 1 つである．このように $AB = O$ かつ零行列でない A や B を**零因子**と呼ぶ．

特に n 次正方行列 A と n 次単位行列 E_n，n 次零行列 O_n に対して

$$AE_n = E_nA = A, \qquad AO_n = O_nA = O_n$$

が成り立つ．各自で確かめてみよ．これより，n 次単位行列はすべての n 次正方行列 A と可換である．また，実数の掛け算における 1 と 0 には，行列の積では単位行列と零行列が対応していることがわかる．

他によく知られた事実として，n 次対角行列どうしは可換である．

次の例題は行列の積の練習問題として重要である．

例題 3.14. 行列 A と B が

$$A+B=\begin{pmatrix}1 & -2\\ 0 & -3\end{pmatrix}, \qquad A-B=\begin{pmatrix}-1 & 2\\ -4 & 1\end{pmatrix}$$

をみたすとき，A^2-B^2 を求めよ．

（解答） 与えられた条件式を辺々加えれば

$$2A=\begin{pmatrix}0 & 0\\ -4 & -2\end{pmatrix} \qquad \therefore\ A=\begin{pmatrix}0 & 0\\ -2 & -1\end{pmatrix}$$

辺々引けば

$$2B=\begin{pmatrix}2 & -4\\ 4 & -4\end{pmatrix} \qquad \therefore\ B=\begin{pmatrix}1 & -2\\ 2 & -2\end{pmatrix}$$

となる．よって

$$A^2=\begin{pmatrix}0 & 0\\ -2 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 0\\ -2 & -1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 2 & 1\end{pmatrix}, \qquad B^2=\begin{pmatrix}1 & -2\\ 2 & -2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & -2\\ 2 & -2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-3 & 2\\ -2 & 0\end{pmatrix}$$

だから

$$A^2-B^2=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 2 & 1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}-3 & 2\\ -2 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3 & -2\\ 4 & 1\end{pmatrix}$$

（解答終）

この例題で計算を工夫しようとして

$$A^2-B^2=(A+B)(A-B)=\begin{pmatrix}1 & -2\\ 0 & -3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1 & 2\\ -4 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}7 & 0\\ 12 & -3\end{pmatrix}$$

とすることはできない．実際，計算結果は上の解答とまったく異なる．そこで，上の “因数分解” の部分を丁寧に見てみると，逆に展開すれば

$$(A+B)(A-B)=A(A-B)+B(A-B)=A^2-AB+BA-B^2$$

となる．ここで，実数の文字式ならば $ab=ba$ が成り立つから $(a+b)(a-b)=a^2-b^2$ となるが，残念ながら行列では一般に $AB \fallingdotseq\!\!\!\!\!/\ BA$ である．ゆえに，A と B が可換（つまり $AB=BA$）でないときには

$$(A+B)(A-B)=A^2-AB+BA-B^2 \neq A^2-B^2$$

となってしまう．これが誤りの原因なので，解答のように地道に計算するしかない．受験数学のテクニックに慣れている場合ほどやりがちなので注意すること．

なお，可換な行列どうしなら文字式のように展開や因数分解が計算できるので，正方行列 A と同じサイズの単位行列 E についてなら問題ない．実際，前に述べたように単位行列はサイズの同じ正方行列と常に可換なので

$$(A+E)^2=A^2+2A+E, \qquad (A+E)(A-E)=A^2-E$$

などが成り立つ．$E^2=E$ であることに注意して，各自で左辺を丁寧に展開して確かめてみよ．もし A と B が可換でなければ

$$(A+B)^2=A^2+AB+BA+B^2$$

となり，これ以上簡単な式にまとめることはできない．

3.3　2次正方行列のケーリー・ハミルトンの定理

ここまでに見たように，行列に関する計算を成分ごとに行うと面倒なことが多い．しかし，2次正方行列の場合には次の定理を用いて簡単に計算できることもある．

定理 3.15.（ケーリー・ハミルトンの定理）

2次正方行列 $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ に対して，等式

$$A^2 - (a+d)A + (ad-bc)E = O$$

が成り立つ．

証明.　左辺を直接計算すれば

$$A^2 = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2+bc & ab+bd \\ ac+cd & bc+d^2 \end{pmatrix}$$

より

$$\begin{aligned} A^2 - (a+d)A + (ad-bc)E &= \begin{pmatrix} a^2+bc & ab+bd \\ ac+cd & bc+d^2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a(a+d) & b(a+d) \\ c(a+d) & d(a+d) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} ad-bc & 0 \\ 0 & ad-bc \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a^2+bc-(a^2+ad)+ad-bc & ab+bd-(ab+bd) \\ ac+cd-(ac+cd) & bc+d^2-(ad+d^2)+ad-bc \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = O \end{aligned}$$

が成り立つ．□

実はケーリー・ハミルトンの定理に現れる係数は重要な量であり，$a+d$ と $ad-bc$ はともに名前がついている．$a+d$ はトレース，$ad-bc$ は行列式と呼ばれるが，いずれも後で詳しく扱う．

具体的な行列にケーリー・ハミルトンの定理を適用してみる．例えば

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

に対しては

$$A^2 - (1+4)A + (4-6)E = A^2 - 5A - 2E = O$$

が成り立つ．この等式を

$$A^2 = 5A + 2E$$

とみれば，A^2 は $5A+2E$ という“A の1次式”で表せている．そのため，この事実を利用することにより，ケーリー・ハミルトンの定理は様々な計算に利用できることもある．

ケーリー・ハミルトンの定理により "次数下げ" ができるので，次のような計算が可能である．

例題 3.16. $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ のとき，$2A^3 - 5A^2 + A + 7E$ を求めよ．

（解答） ケーリー・ハミルトンの定理より

$$A^2 - 4A + 5E = O \qquad \cdots ①$$

が成り立つ．そこで，多項式 $2x^3 - 5x^2 + x + 7$ を $x^2 - 4x + 5$ で割ると

$$\begin{array}{r|rrrr}
 & 2x & +3 & & \\ \hline
x^2 -4x +5 & 2x^3 & -5x^2 & +x & +7 \\
 & 2x^3 & -8x^2 & +10x & \\ \hline
 & & 3x^2 & -9x & +7 \\
 & & 3x^2 & -12x & +15 \\ \hline
 & & & 3x & -8
\end{array}$$

より，商は $2x + 3$ で余りは $3x - 8$ となる．よって

$$2x^3 - 5x^2 + x + 7 = (x^2 - 4x + 5)(2x + 3) + 3x - 8$$

が成り立つ．ここで，A と E は可換なので，この式で x を A とし，定数項を E とした

$$2A^3 - 5A^2 + A + 7E = (A^2 - 4A + 5E)(2A + 3E) + 3A - 8E$$

も成り立つ．ゆえに，① を代入して

$$\begin{aligned}
2A^3 - 5A^2 + A + 7E &= 3A - 8E \\
&= 3\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 8 & 0 \\ 0 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 & -6 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

（解答終）

この解法のよいところは，一度も成分を用いた行列の積を計算していない点である．直接 A の成分から A^3 などを直接計算するとこれよりも大変であり，もし A^4 や A^5 などがあればミスなく計算するのは難しい．

高校数学でも

$x = 1 + \sqrt{-3}$ のとき，$x^4 - 3x^3 + 4x^2 + 6x - 5$ の値を求めよ

という問題を解いたことがあると思う．そのときにも直接代入すると大変だから，うまく 2 次式を作ってそれで割った余りに代入するという同様な計算をしたはずである．

例題 3.17. $A = \begin{pmatrix} 7 & -6 \\ 4 & -3 \end{pmatrix}$ のとき，$A^6 - 5A^5 + 5A^4 + 2A^3 + 7A^2 - 4A - 3E$ を求めよ．

（解答） ケーリー・ハミルトンの定理より

$$A^2 - 4A + 3E = O \qquad \cdots ①$$

が成り立つ．そこで，多項式 $x^6 - 5x^5 + 5x^4 + 2x^3 + 7x^2 - 4x - 3$ を $x^2 - 4x + 3$ で割ると

$$\begin{array}{r|l}
 & x^4 \quad -x^3 \; -2x^2 \quad -3x \qquad +1 \\ \hline
x^2 -4x +3 & x^6 -5x^5 +5x^4 +2x^3 \;\; +7x^2 -4x -3 \\
 & x^6 -4x^5 +3x^4 \\ \hline
 & \quad -x^5 +2x^4 +2x^3 \\
 & \quad -x^5 +4x^4 -3x^3 \\ \hline
 & \qquad -2x^4 +5x^3 \;\; +7x^2 \\
 & \qquad -2x^4 +8x^3 \;\; -6x^2 \\ \hline
 & \qquad\qquad -3x^3 +13x^2 -4x \\
 & \qquad\qquad -3x^3 +12x^2 -9x \\ \hline
 & \qquad\qquad\qquad x^2 +5x -3 \\
 & \qquad\qquad\qquad x^2 -4x +3 \\ \hline
 & \qquad\qquad\qquad\qquad 9x -6
\end{array}$$

より，商は $x^4 - x^3 - 2x^2 - 3x + 1$ で余りは $9x - 6$ となる．よって

$$x^6 - 5x^5 + 5x^4 + 2x^3 + 7x^2 - 4x - 3 = (x^2 - 4x + 3)(x^4 - x^3 - 2x^2 - 3x + 1) + 9x - 6$$

が成り立つ．ここで，A と E は可換なので，この式で x を A とし，定数項を E とした

$$A^6 - 5A^5 + 5A^4 + 2A^3 + 7A^2 - 4A - 3E = (A^2 - 4A + 3E)(A^4 - A^3 - 2A^2 - 3A + E) + 9A - 6E$$

も成り立つ．ゆえに，① を代入して

$$\begin{aligned} A^6 - 5A^5 + 5A^4 + 2A^3 + 7A^2 - 4A - 3E &= 9A - 6E \\ &= 9\begin{pmatrix} 7 & -6 \\ 4 & -3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 57 & -54 \\ 36 & -33 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

（解答終）

このような問題で一番難しいのは，多項式の除法

$$x^6 - 5x^5 + 5x^4 + 2x^3 + 7x^2 - 4x - 3 = (x^2 - 4x + 3)(x^4 - x^3 - 2x^2 - 3x + 1) + 9x - 6$$

の部分である．右辺を展開して左辺と一致することは確認しておいた方がよい．また，今回は

$$x^2 - 4x + 3 = (x - 1)(x - 3)$$

と因数分解できることに気づけば，高校数学で学んだように余りだけなら簡単に求められるので，実はその方が楽である．各自確かめてみよ．

とにかく決して直接代入計算しようとしないこと．行列の問題において，成分を直接用いた計算は避けられるなら避けた方が簡単なことが多い．この問題で実際に A^6 を計算して求めるのは困難であり，その場合は検算も計算を再度追うしかないため効率的ではない．

例題 3.18.　行列 $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ に対して

$$s = a + d, \qquad t = ad - bc$$

とおく．A が $A^2 = A$ をみたすとき，s と t のとりうる値の組を求めよ．

（解答）　ケーリー・ハミルトンの定理より

$$A^2 - sA + tE = O$$

が成り立つ．仮定より $A^2 = A$ だから，上式に代入すれば

$$(s-1)A = tE$$

となる．

(i) $s = 1$ のとき
このときは $tE = O$ となるから $t = 0$ である．

(ii) $s \fallingdotseq 1$ のとき
$A = \dfrac{t}{s-1}E$ となるから，$k = \dfrac{t}{s-1}$ とおけば，$A = kE$ と表せる．再び仮定より $A^2 = A$ だったから，これに $A = kE$ を代入すれば

$$k^2E = kE \qquad\qquad \therefore (k^2 - k)E = O$$

より，$k^2 - k = 0$ となる．よって，$k = 0, 1$ である．

- $k = 0$ のときは $A = O = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ なので，$s = t = 0$ である．
- $k = 1$ のときは $A = E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ なので，$s = 2,\ t = 1$ である．

以上より，とりうる値は $(s, t) = (1, 0), (0, 0), (2, 1)$ の 3 組である．

（解答終）

行列の関係式では単純に係数比較できるとは限らないので注意すること．上の例題でも

$$A^2 - A = O, \qquad A^2 - sA + tE = O$$

の係数を比較して $s = 1,\ t = 0$ とすることはできない．ベクトルの場合でも係数比較できるためには 1 次独立という条件が必要であった．行列でもそれと同じような状況だと考えればよい．

また，$A^2 = A$ を $A(A - E) = O$ と変形して $A = O$ または $A = E$ とすることもできない．行列の積は『$XY = O \implies X = O$ または $Y = O$』が一般に成り立たないので，因数分解してもそれぞれの項を O とすることはできない．実際，$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ は $A^2 = A$ をみたし，O でも E でもない．

この例題で直接 A^2 を計算して $A^2 = A$ を成分比較し，4 本の連立方程式を立てることでも原理上は解けるが，計算量は上の解答例よりも大幅に増える．行列の問題を解く際には，避けられる成分計算はできるだけ避けるのがコツである．実際，行列を用いた計算の利点の 1 つは「複数の成分（データ）を 1 度に計算できる」ことにある．

4　正則行列

4.1　正則性と逆行列

実数の場合には，1 次方程式について

$$2x = 3 \quad \Longrightarrow \quad x = \frac{3}{2}$$

と解くことができた．同様に，与えられた行列 A と B に対して

$$AX = B$$

となる行列 X を求めたいことがある．しかし，行列には割り算がないため，特別な場合しか “A の逆” をかけて X を求めることはできない．このような計算ができる行列を以下で定義する．

定義 4.1. （正則行列）

n 次正方行列 A が**正則**であるとは

$$XA = AX = E_n$$

となる n 次正方行列 X が存在することである．このような X が存在するとき，この X を A の**逆行列**といい，A^{-1} で表す．A^{-1} は「エー　インバース」と読む．正則な行列を**正則行列**という．

行列の積は実数の積とは異なる性質をもつため，もしかしたら 1 つの行列 A に対して $AX = E$ となる行列 X が複数個あるかもしれない．もしそうすると A^{-1} という記号が人によって異なる行列になるために問題があるが，実際にはそのようなことはないことが次の事実からわかる．

定理 4.2. （逆行列の一意性）

正則行列 A に対して，A の逆行列はただ 1 つ定まる．

証明. 　行列 B と C が A の逆行列の条件をみたすとする．このとき

$$AB = BA = E, \qquad AC = CA = E$$

が成り立つ．よって

$$B = BE = B(AC) = (BA)C = EC = C$$

であるから，$B = C$ となる．ゆえに，逆行列は一意的であり，異なる 2 個以上のものは存在しない．　□

これより，A の逆行列は存在すれば 1 つに決まるから，それを A^{-1} で表すことができる．また，A が正則行列のとき，自然数 k に対して $A^{-k} = (A^{-1})^k$ と定義する．また，$A^0 = E$ とおく．このとき，負の指数を含めて指数法則が成り立つことがわかる．

例 4.3. 　$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}$，$B = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$ とおけば

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = E$$

$$BA = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = E$$

となる．よって，A は正則行列で，その逆行列は $A^{-1} = B$ である．

見方を変えれば，B は正則行列で $B^{-1} = A$ でもある．

定理 4.4. （逆行列の性質）

n 次正則行列 A と B に対して，次が成り立つ．

(1) 逆行列 A^{-1} も n 次正則行列で，$(A^{-1})^{-1} = A$ である．

(2) 積 AB も n 次正則行列で，$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$ である．

証明.

(1) 逆行列の定義より

$$AA^{-1} = A^{-1}A = E$$

であるが，ここで $X = A$ とおくと

$$XA^{-1} = A^{-1}X = E$$

となる．これは A^{-1} が正則で，その逆行列が

$$(A^{-1})^{-1} = X = A$$

であることを表している．

(2) 積を計算すれば

$$\begin{aligned}(AB)(B^{-1}A^{-1}) &= A(BB^{-1})A^{-1} = AEA^{-1} = AA^{-1} = E\\(B^{-1}A^{-1})(AB) &= B^{-1}(A^{-1}A)B = B^{-1}B = E\end{aligned}$$

となる．よって

$$(AB)(B^{-1}A^{-1}) = (B^{-1}A^{-1})(AB) = E$$

が成り立つから，AB は正則で，その逆行列は

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$$

である．

□

(2) で**積の逆行列の公式には注意すること**．よく間違われるが $(AB)^{-1} = A^{-1}B^{-1}$ ではない！

一般に逆行列を求めるのは簡単ではないが，対角行列の逆行列はすぐに求められる．

例 4.5. 行列を

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

とおけば，A と B は正則行列で，それぞれの逆行列は

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & 1/3 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/4 \end{pmatrix}$$

となる．実際に積をとって確かめてみよ．

一般に，対角成分がすべて 0 ではない対角行列は正則であることがわかる．

4.2　2 次正方行列の逆行列

逆行列は計算の際に有効に働くことが多いが，どのように見つけるかが問題である．2 次正方行列については次の公式が知られているため，簡単に計算することができる．3 次以上の正方行列についても公式はあるが，非常に複雑である．一般の逆行列の計算法は第 6 章で扱う．

定理 4.6. （2 次正方行列の逆行列）
2 次正方行列 $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ が正則であるための必要十分条件は

$$ad - bc \fallingdotseq 0$$

である．このとき，A の逆行列は

$$A^{-1} = \frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

で与えられる．

証明.　$X = \begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix}$ とおいて，$AX = E$ が成り立つような X を求める．成分比較すれば

$$AX = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax+bz & ay+bw \\ cx+dz & cy+dw \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

より

$$\begin{cases} ax + bz = 1 & \cdots ① \\ ay + bw = 0 & \cdots ② \\ cx + dz = 0 & \cdots ③ \\ cy + dw = 1 & \cdots ④ \end{cases}$$

となる．ここで，変数をうまく消去すれば

$$\begin{aligned} ① \times d - ③ \times b &\quad\Longrightarrow\quad (ad-bc)x = d \\ ② \times d - ④ \times b &\quad\Longrightarrow\quad (ad-bc)y = -b \\ ① \times c - ③ \times a &\quad\Longrightarrow\quad (ad-bc)z = -c \\ ② \times c - ④ \times a &\quad\Longrightarrow\quad (ad-bc)w = a \end{aligned}$$

が得られる．そこで，もし $ad - bc = 0$ と仮定すると，上式から $a = b = c = d = 0$ となるが，これは ① に矛盾する．よって，連立方程式が解をもつためには $ad - bc \fallingdotseq 0$ が必要である．

さらに，$ad - bc \fallingdotseq 0$ のときには

$$x = \frac{d}{ad-bc}, \qquad y = \frac{-b}{ad-bc}, \qquad z = \frac{-c}{ad-bc}, \qquad w = \frac{a}{ad-bc}$$

となる．つまり，逆行列の形の候補としてはこれしかない．

そこで，十分性を確かめる．$ad - bc \fallingdotseq 0$ のとき

$$X = \frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

とおけば，上の計算より $AX = E$ をみたしている．さらに

$$XA = \frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} ad-bc & 0 \\ 0 & -bc+ad \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = E$$

もみたす．したがって，$AX = XA = E$ が成り立つから，A は正則行列で $A^{-1} = X$ となる．

以上より，A が正則であるための必要十分条件は $ad - bc \fallingdotseq 0$ であり，逆行列は上の式で与えられる．　□

定理 4.6 より，2 次正方行列 $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ に対して $ad - bc$ が非常に強い意味をもつことがわかる．そこで，記号の節約のため，しばらくは

$$\Delta(A) = ad - bc$$

とおく．考えている行列が明らかな場合には，単に Δ とも書くことにする．これは行列式と呼ばれるもので，本来の記号やその意味について第 7 章で扱う．

例題 4.7. 次の行列の逆行列があるかどうかを調べ，あるならば逆行列を求めよ．

(1) $\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$　(2) $\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -6 & 3 \end{pmatrix}$　(3) $\begin{pmatrix} -4 & -2 \\ 6 & 2 \end{pmatrix}$

（解答）

(1) $\Delta = 6 - 4 = 2 \neq 0$ なので，逆行列をもつ．逆行列は $\dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} 3 & -4 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ である．

(2) $\Delta = 12 - 12 = 0$ なので，逆行列をもたない．

(3) $\Delta = -8 - (-12) = 4 \neq 0$ なので，逆行列をもつ．逆行列は $\dfrac{1}{4}\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -6 & -4 \end{pmatrix} = \dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -3 & -2 \end{pmatrix}$ である．

（解答終）

一般に行列の積は可換ではない．よって，行列の方程式を解く際には，逆行列を左右のどちらからかけるのか注意しなければならない．

例題 4.8. 次の等式をみたす行列 X と Y を求めよ．

(1) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$　(2) $Y \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$

（解答）　$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$ とおくと

$$\Delta(A) = 3 - (-4) = 7 \neq 0$$

より，A は逆行列をもち，$A^{-1} = \dfrac{1}{7}\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ である．

(1) $AX = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$ の左から A^{-1} をかけて

$$X = A^{-1}\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix} = \frac{1}{7}\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix} = \frac{1}{7}\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 11 & 14 \end{pmatrix}$$

(2) $YA = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$ の右から A^{-1} をかけて

$$Y = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix} A^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix} \frac{1}{7}\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{7}\begin{pmatrix} 17 & -2 \\ 27 & -4 \end{pmatrix}$$

（解答終）

例題 4.9. 行列 $\begin{pmatrix} a+2 & a \\ 3 & a \end{pmatrix}$ が逆行列をもたないような a の値を求めよ．

（解答） 逆行列をもたないのは

$$\varDelta = (a+2)a - 3a = a^2 - a = a(a-1) = 0$$

のときだから，求める値は $a = 0, 1$ である．

（解答終）

連立 1 次方程式については，行列を用いて解を求めることができる．

例題 4.10. a と b を実数とし，$A = \begin{pmatrix} a & 3 \\ 2 & b \end{pmatrix}$ とおく．x と y を未知数とする方程式

$$A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

が次をみたすような，a と b に関する必要十分条件を求めよ．

(1) 無限個の解をもつ

(2) 解をもたない

(3) ただ 1 つの解をもつ

（解答） もし A が逆行列をもつならば，方程式の左から A^{-1} をかければ

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = A^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

となり，ただ 1 つの解が定まる．

そこで，A が逆行列をもたない場合を考える．このとき

$$\varDelta(A) = ab - 6 = 0$$

である．また，連立方程式は

$$\begin{cases} ax + 3y = 1 & \cdots ① \\ 2x + by = -2 & \cdots ② \end{cases}$$

と表せる．$ab - 6 = 0$ のとき，座標平面内の 2 本の直線 ① と ② は平行であるので，2 直線が一致するときは無限個の解をもち，一致しない場合には共有点をもたないから解なしとなる．

以上より，求める条件は

(1) 『① と ② が一致するとき』なので，$(a, b) = (-1, -6)$ である．

(2) 『A が逆行列をもたず，かつ ① と ② が一致しないとき』なので，$ab = 6$ かつ $(a, b) \neq (-1, -6)$ である．

(3) 『A が逆行列をもつとき』なので，$ab \neq 6$ である．

（解答終）

$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ とおくと

$$A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = O$$

となる．このように，何乗かすると $A^m = O$ となるような行列 A は**べき零行列**と呼ばれる．

例題 4.11. 行列 $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ は 3 以上のある自然数 m に対して，$A^m = O$ をみたすとする．このとき，以下の主張を示せ．

(1) 逆行列 A^{-1} は存在しない． (2) $A^2 = (a+d)A$ (3) $A^2 = O$

（解答）

(1) 逆行列 A^{-1} が存在すると仮定すると，$A^m = O$ の両辺に左から A^{-1} をかければ

$$A^{-1}A^m = A^{-1}AA^{m-1} = EA^{m-1} = A^{m-1} = O$$

となる．これを繰り返せば，合計 m 回 A^{-1} をかけると $E = O$ となるが，これは矛盾である．したがって，逆行列 A^{-1} は存在しない．

(2) (1) より $\Delta(A) = ad - bc = 0$ である．よって，ケーリー・ハミルトンの定理より

$$A^2 - (a+d)A + (ad-bc)E = A^2 - (a+d)A = O$$

なので

$$A^2 = (a+d)A$$

が成り立つ．

(3) k を 3 以上の自然数とすれば，(2) の両辺に A^{k-2} をかけて

$$A^k = (a+d)A^{k-1}$$

が得られる．よって，この関係式を繰り返し使えば

$$A^m = (a+d)A^{m-1} = (a+d)^2A^{m-2} = \cdots = (a+d)^{m-2}A^2 = (a+d)^{m-1}A$$

となる．一方，$A^m = O$ だったから

$$(a+d)^{m-1}A = O$$

より，$a + d = 0$ または $A = O$ となるので，どちらにしても

$$A^2 = (a+d)A = O$$

が成り立つ．

（解答終）

例題 4.12.　実数 θ に対して，$R(\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$ とおく．

(1) 任意の実数 α と β に対して，$R(\alpha)R(\beta) = R(\alpha+\beta)$ が成り立つことを示せ．

(2) 2 以上の自然数 n に対して，$X = R(2\pi/n)$ とおく．X^n を求めよ．

(3) $(E-X)(E+X+X^2+\cdots+X^{n-1})$ を求めよ．また，$E+X+X^2+\cdots+X^{n-1}$ を求めよ．

（解答）

(1)　三角関数の加法定理より

$$\begin{aligned} R(\alpha)R(\beta) &= \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos\beta & -\sin\beta \\ \sin\beta & \cos\beta \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta & -\cos\alpha\sin\beta - \sin\alpha\cos\beta \\ \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta & -\sin\alpha\sin\beta + \cos\alpha\cos\beta \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos(\alpha+\beta) & -\sin(\alpha+\beta) \\ \sin(\alpha+\beta) & \cos(\alpha+\beta) \end{pmatrix} = R(\alpha+\beta) \end{aligned}$$

が成り立つ．

(2)　(1) の結果を $\alpha=\beta$ として用いれば

$$R(\alpha)^2 = R(\alpha+\alpha) = R(2\alpha)$$

となるから，これを繰り返せば

$$R(\alpha)^n = R(n\alpha)$$

が成り立つ．よって

$$X^n = R(2\pi/n)^n = R(2\pi) = \begin{pmatrix} \cos 2\pi & -\sin 2\pi \\ \sin 2\pi & \cos 2\pi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = E$$

である．

(3)　与えられた式を展開すれば，(2) の結果 $X^n = E$ も合わせて

$$(E-X)(E+X+X^2+\cdots+X^{n-1}) = E - X^n = O \quad \cdots ①$$

が得られる．そこで

$$E - X = \begin{pmatrix} 1-\cos\dfrac{2\pi}{n} & \sin\dfrac{2\pi}{n} \\ -\sin\dfrac{2\pi}{n} & 1-\cos\dfrac{2\pi}{n} \end{pmatrix}$$

が逆行列をもつか調べる．n は 2 以上の自然数なので

$$\Delta(E-X) = \left(1-\cos\frac{2\pi}{n}\right)^2 + \sin^2\frac{2\pi}{n} = 2 - 2\cos\frac{2\pi}{n} > 0$$

となるから，$E-X$ は逆行列をもつ．よって，上で示した等式 ① の左から $(E-X)^{-1}$ をかければ

$$E+X+X^2+\cdots+X^{n-1} = O$$

である．

（解答終）

4.3　一般次数の逆行列の計算例

n 次正方行列の逆行列の公式は複雑ではあるが，逆行列の定義をみたすものを見つけてしまいさえすればよいこともある．

例題 4.13.　次の等式をみたす n 次正方行列 A と B が正則行列かどうか調べ，正則ならばその逆行列を求めよ．

(1) $A^2 - A + E = O$　　(2) $B^3 = E$

（解答）

(1)　$A^2 - A + E = O$ を変形すると

$$E = -A^2 + A = A(-A + E)$$

が成り立ち，また

$$E = -A^2 + A = (-A + E)A$$

も成り立つ．よって，A の逆行列が存在し

$$A^{-1} = -A + E$$

である．

(2)　$B^3 = BB^2 = B^2B$ であるから，条件 $B^3 = E$ より

$$BB^2 = B^2B = E$$

が成り立つ．よって，B の逆行列は存在し

$$B^{-1} = B^2$$

である．

（解答終）

実は後で学習する行列式などの知識を用いれば，n 次正方行列 A に対して

$$AX = E_n$$

となる行列 X が存在すれば，A は正則行列で，その逆行列が $A^{-1} = X$ であることが知られている．また，これは $XA = E_n$ という条件のみでもよい．

つまり，$AX = E_n$ かつ $XA = E_n$ のいう 2 条件を両方確認しなくても，実際には片方のみで正則行列かは判定できるという定理がある．しかし，証明には準備が必要なため，しばらくは両方の条件を確認することにする．

例題 4.14. $A = \begin{pmatrix} 9 & 4 & 8 \\ -8 & -3 & -8 \\ 4 & 2 & 5 \end{pmatrix}$ とおく.

(1) $A^2 - 10A = -9E$ であることを示せ.

(2) $AX = \begin{pmatrix} -3 & 4 & -18 \\ 5 & -1 & 18 \\ -4 & 1 & -9 \end{pmatrix}$ となる行列 X を求めよ.

（解答）

(1) 左辺を計算すれば

$$A^2 = \begin{pmatrix} 9 & 4 & 8 \\ -8 & -3 & -8 \\ 4 & 2 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 9 & 4 & 8 \\ -8 & -3 & -8 \\ 4 & 2 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 81 & 40 & 80 \\ -80 & -39 & -80 \\ 40 & 20 & 41 \end{pmatrix}$$

より

$$A^2 - 10A = \begin{pmatrix} 81 & 40 & 80 \\ -80 & -39 & -80 \\ 40 & 20 & 41 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 90 & 40 & 80 \\ -80 & -30 & -80 \\ 40 & 20 & 50 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -9 & 0 & 0 \\ 0 & -9 & 0 \\ 0 & 0 & -9 \end{pmatrix} = -9E$$

が成り立つ.

(2) (1) より

$$A(A - 10E) = -9E$$

であるから

$$A\left\{-\frac{1}{9}(A - 10E)\right\} = \left\{-\frac{1}{9}(A - 10E)\right\}A = E$$

が成り立つ．よって，A は正則行列で

$$A^{-1} = -\frac{1}{9}(A - 10E) = -\frac{1}{9}\begin{pmatrix} -1 & 4 & 8 \\ -8 & -13 & -8 \\ 4 & 2 & -5 \end{pmatrix}$$

である.

ゆえに，与式の左から A^{-1} をかければ

$$X = A^{-1}\begin{pmatrix} -3 & 4 & -18 \\ 5 & -1 & 18 \\ -4 & 1 & -9 \end{pmatrix} = -\frac{1}{9}\begin{pmatrix} -1 & 4 & 8 \\ -8 & -13 & -8 \\ 4 & 2 & -5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -3 & 4 & -18 \\ 5 & -1 & 18 \\ -4 & 1 & -9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 1 & 3 & 2 \\ -2 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

である.

（解答終）

3 次以上の正方行列の逆行列の求め方を第 6 章で学んだ後は，誘導なしでこのような問題も解けるようになる.

例題 4.15. $a^2+b^2+c^2=1$ をみたす実数 a,b,c に対して，行列 A を次で定める．

$$A=\begin{pmatrix}0 & -c & b\\ c & 0 & -a\\ -b & a & 0\end{pmatrix}$$

(1) $A^3=-A$ であることを示せ．

(2) 実数 p と q に対して $pA+qA^2=O$ ならば，$p=q=0$ となることを示せ．

(3) $E+sA+tA^2$ が $E+A+A^2$ の逆行列となるような実数 s と t の値を求めよ．

（解答）

(1) 直接計算すれば

$$A^2=\begin{pmatrix}0 & -c & b\\ c & 0 & -a\\ -b & a & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & -c & b\\ c & 0 & -a\\ -b & a & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-c^2-b^2 & ab & ac\\ ab & -a^2-c^2 & bc\\ ac & bc & -a^2-b^2\end{pmatrix}$$

より，$a^2+b^2+c^2=1$ を用いれば

$$\begin{aligned}A^3&=\begin{pmatrix}-c^2-b^2 & ab & ac\\ ab & -a^2-c^2 & bc\\ ac & bc & -a^2-b^2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & -c & b\\ c & 0 & -a\\ -b & a & 0\end{pmatrix}\\ &=\begin{pmatrix}0 & c(a^2+b^2+c^2) & -b(a^2+b^2+c^2)\\ -c(a^2+b^2+c^2) & 0 & a(a^2+b^2+c^2)\\ b(a^2+b^2+c^2) & -a(a^2+b^2+c^2) & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & c & -b\\ -c & 0 & a\\ b & -a & 0\end{pmatrix}=-A\end{aligned}$$

(2) $pA+qA^2=O\ \cdots$ ① の両辺に A をかければ，$A^3=-A$ より

$$pA^2+qA^3=-qA+pA^2=O\quad\cdots\ ②$$

となる．よって，① $\times\, p-$ ② $\times\, q$ より

$$(p^2+q^2)A=O$$

が成り立つ．ここで，$A\neq O$ だから $p^2+q^2=0$ となり，p と q は実数なので $p=q=0$ である．

(3) $E+sA+tA^2$ が逆行列となるためには

$$(E+sA+tA^2)(E+A+A^2)=E\quad\cdots\ ①$$

となる必要がある．ここで，$A^3=-A,\ A^4=-A^2$ より

$$\begin{aligned}(E+sA+tA^2)(E+A+A^2)&=E+(1+s)A+(1+s+t)A^2+(s+t)A^3+tA^4\\ &=E+(1-t)A+(1+s)A^2\end{aligned}$$

なので，① が成り立つのは

$$(1-t)A+(1+s)A^2=O$$

のときである．ゆえに，(2) の結果より $1-t=1+s=0$ となるから，$s=-1,\ t=1$ である．

逆にこのとき，$A^3=-A,\ A^4=-A^2$ より

$$(E-A+A^2)(E+A+A^2)=(E+A+A^2)(E-A+A^2)=E$$

が成り立つので，確かに $E-A+A^2$ は逆行列となる．よって，$(s,t)=(-1,1)$ が求める値である．

（解答終）

5　2次正方行列の n 乗

5.1　n 乗が推測できる場合

行列を現実の問題に応用する際に，ある正方行列の n 乗の計算が必要になることもある．ただし，具体的に与えられた A に対して，$A^2, A^3, \ldots$ と順番に計算しても A^n がわかるとは限らない．そこで，2次正方行列の場合を中心に，A^n の計算法について紹介する．

一番簡単に n 乗が計算できる例は対角行列である．実際，例えば $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ とおくと

$$A^2 = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 9 \end{pmatrix}$$

$$A^3 = A^2A = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 9 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 0 \\ 0 & 27 \end{pmatrix}$$

$$A^4 = A^3A = \begin{pmatrix} 8 & 0 \\ 0 & 27 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 16 & 0 \\ 0 & 81 \end{pmatrix}$$

であるから

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \quad \Longrightarrow \quad A^n = \begin{pmatrix} 2^n & 0 \\ 0 & 3^n \end{pmatrix}$$

と推測できる．数列の一般項の場合のように，特別な形の行列は n 乗を推測して数学的帰納法で証明できる．

命題 5.1.　n を自然数とする．$A = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$ に対して，その n 乗は

$$A^n = \begin{pmatrix} a^n & 0 \\ 0 & b^n \end{pmatrix}$$

となる．

証明.　$A^n = \begin{pmatrix} a^n & 0 \\ 0 & b^n \end{pmatrix}$ であることを数学的帰納法で証明する．

(i) $n = 1$ のときは $A = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$ より成り立つ．

(ii) $n = k$ $(k \geqq 1)$ のときに

$$A^k = \begin{pmatrix} a^k & 0 \\ 0 & b^k \end{pmatrix}$$

が成り立つと仮定する．このとき

$$A^{k+1} = A^kA = \begin{pmatrix} a^k & 0 \\ 0 & b^k \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^{k+1} & 0 \\ 0 & b^{k+1} \end{pmatrix}$$

となるから，$n = k + 1$ のときにも成り立つ．

以上より，すべての自然数 n に対して，$A^n = \begin{pmatrix} a^n & 0 \\ 0 & b^n \end{pmatrix}$ が成り立つ．　□

最初なので数学的帰納法で厳密に証明した．ただし，行列の積の計算に慣れた後は，これは当然の結果に見えるはずである．そのため，対角行列の n 乗の公式（命題 5.1）は普段は証明なしで用いてよい．

また，3次以上の対角行列の場合でも同様の結果となるので，各自で確かめてみよ．

例題 5.2. n を自然数とする．次の行列 A に対して，A^2, A^3, A^4 を計算し，A^n を求めよ．

(1) $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$ (2) $A = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix}$

（解答）

(1) A^2 を計算すれば

$$A^2 = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = E$$

となる．よって

$$A^3 = A^2A = EA = A, \qquad A^4 = (A^2)^2 = E^2 = E$$

である．以下同様にして，k を自然数とすれば

$$A^{2k-1} = (A^2)^{k-1}A = E^{k-1}A = A, \qquad A^{2k} = (A^2)^k = E^k = E$$

となるから，まとめると

$$A^n = \begin{cases} A & (n \text{ が奇数のとき}) \\ E & (n \text{ が偶数のとき}) \end{cases}$$

である．

(2) 順番に計算すれば

$$A^2 = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2 & 2ab \\ 0 & a^2 \end{pmatrix}$$

$$A^3 = A^2A = \begin{pmatrix} a^2 & 2ab \\ 0 & a^2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^3 & 3a^2b \\ 0 & a^3 \end{pmatrix}$$

$$A^4 = A^3A = \begin{pmatrix} a^3 & 3a^2b \\ 0 & a^3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^4 & 4a^3b \\ 0 & a^4 \end{pmatrix}$$

となる．

よって，$A^n = \begin{pmatrix} a^n & na^{n-1}b \\ 0 & a^n \end{pmatrix}$ と推測できるので，これを数学的帰納法で証明する．

(i) $n = 1$ のときは $A = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix}$ より成り立つ．

(ii) $n = k$ $(k \geqq 1)$ のときに

$$A^k = \begin{pmatrix} a^k & ka^{k-1}b \\ 0 & a^k \end{pmatrix}$$

が成り立つと仮定する．このとき

$$A^{k+1} = A^kA = \begin{pmatrix} a^k & ka^{k-1}b \\ 0 & a^k \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^{k+1} & a^kb + ka^kb \\ 0 & a^{k+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^{k+1} & (k+1)a^kb \\ 0 & a^{k+1} \end{pmatrix}$$

となるから，$n = k+1$ のときにも成り立つ．

以上より，すべての自然数 n に対して，$A^n = \begin{pmatrix} a^n & na^{n-1}b \\ 0 & a^n \end{pmatrix}$ が成り立つ．

（解答終）

これらは特別な行列なので，一般には A^2, A^3, A^4 を計算しても A^n を推測できないことの方が多い．

5.2　2 次正方行列の対角化

与えられた行列に対して，その n 乗を推測することは簡単ではない．一般には次の対角化と呼ばれる操作を利用して，行列の n 乗を計算する．

例題 5.3.　$A=\begin{pmatrix}4&2\\1&3\end{pmatrix}$，$P=\begin{pmatrix}1&2\\-1&1\end{pmatrix}$ とおく．

(1) P が正則であることを示し，逆行列 P^{-1} を求めよ．

(2) $P^{-1}AP$ を求めよ．

(3) 自然数 n に対して，A^n を求めよ．

（解答）

(1)　$\Delta(P)=1+2=3\fallingdotseq 0$ より，P は正則である．また，逆行列は $P^{-1}=\dfrac{1}{3}\begin{pmatrix}1&-2\\1&1\end{pmatrix}$ である．

(2)　(1) より

$$P^{-1}AP=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}1&-2\\1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}4&2\\1&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2\\-1&1\end{pmatrix}=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}2&-4\\5&5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2\\-1&1\end{pmatrix}=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}6&0\\0&15\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&0\\0&5\end{pmatrix}$$

(3)　(2) の両辺を n 乗すれば，左辺は

$$(P^{-1}AP)^n=(P^{-1}AP)(P^{-1}AP)\cdots(P^{-1}AP)=P^{-1}A^nP$$

となる．一方，右辺は対角行列の n 乗なので

$$\begin{pmatrix}2&0\\0&5\end{pmatrix}^n=\begin{pmatrix}2^n&0\\0&5^n\end{pmatrix}$$

である．よって

$$(P^{-1}AP)^n=P^{-1}A^nP=\begin{pmatrix}2^n&0\\0&5^n\end{pmatrix}$$

が成り立つ．ゆえに，左から P を，右から P^{-1} をかければ

$$A^n=P\begin{pmatrix}2^n&0\\0&5^n\end{pmatrix}P^{-1}=\begin{pmatrix}1&2\\-1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2^n&0\\0&5^n\end{pmatrix}\frac{1}{3}\begin{pmatrix}1&-2\\1&1\end{pmatrix}=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}2\cdot5^n+2^n&2\cdot5^n-2^{n+1}\\5^n-2^n&5^n+2^{n+1}\end{pmatrix}$$

（解答終）

この答えの形からわかるように，A^2,A^3,A^4 を計算しても A^n を推測するのは難しい．この n 乗の求め方のポイントは，うまく A を対角行列に変形することである．そこで

$$(P^{-1}AP)^n=P^{-1}A^nP$$

を用いたが，これは具体的に n 個の積を列挙してもわかるし，一度は数学的帰納法で証明して納得しておくこと．例えば $n=3$ なら

$$(P^{-1}AP)^3=(P^{-1}AP)(P^{-1}AP)(P^{-1}AP)=P^{-1}APP^{-1}APP^{-1}AP=P^{-1}AAAP=P^{-1}A^3P$$

となる．後は対角行列の n 乗が簡単にわかることから，A^n が計算できる．

このように，ある正則行列 P とその逆行列 P^{-1} ではさんで，行列 A を対角行列 $P^{-1}AP$ に変形することを**対角化**という．これは第 10 章における重要なテーマである．

ところで，今回は誘導で P が与えられているのでうまく計算できたが，もし誘導がなければどのように P を見つけたらよいのか？というのは自然な疑問である．それについて次の例題で解説する．

例題 5.4. $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$ とおく．

(1) $A\begin{pmatrix} 1 \\ x \end{pmatrix} = k\begin{pmatrix} 1 \\ x \end{pmatrix}$ となる実数 x が存在するような k の 2 つの値 k_1, k_2 $(k_1 < k_2)$ を求めよ．

(2) (1) で求めた k_1 と k_2 に対して

$$A\begin{pmatrix} 1 \\ x_1 \end{pmatrix} = k_1\begin{pmatrix} 1 \\ x_1 \end{pmatrix}, \qquad A\begin{pmatrix} 1 \\ x_2 \end{pmatrix} = k_2\begin{pmatrix} 1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

となるような x_1 と x_2 の値を求めよ．

(3) $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ x_1 & x_2 \end{pmatrix}$ とおくとき，$P^{-1}AP$ を求めよ．

(4) 自然数 n に対して，A^n を求めよ．

（解答）

(1) 与えられた式は

$$(A - kE)\begin{pmatrix} 1 \\ x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

と表せる．ここで，$A - kE$ が逆行列をもつと仮定すると，この式に左から $(A - kE)^{-1}$ をかければ

$$\begin{pmatrix} 1 \\ x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

となるが，これをみたす x は存在しない．よって

$$A - kE = \begin{pmatrix} 2-k & -1 \\ -2 & 3-k \end{pmatrix}$$

は逆行列をもたないから

$$\varDelta(A - kE) = (2-k)(3-k) - 2 = k^2 - 5k + 4 = (k-1)(k-4) = 0$$

より，$k_1 = 1,\ k_2 = 4$ となる．

(2) $k_1 = 1$ のとき

$$(A - E)\begin{pmatrix} 1 \\ x_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ x_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 - x_1 \\ -2 + 2x_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

より，$x_1 = 1$ である．同様にして，$k_2 = 4$ のとき

$$(A - 4E)\begin{pmatrix} 1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 - x_2 \\ -2 - x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

より，$x_2 = -2$ である．

(3) $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$ なので，$\varDelta(P) = -3 \fallingdotseq 0$ より P は正則で $P^{-1} = \dfrac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ である．よって

$$P^{-1}AP = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$$

(4)　(3) の両辺を n 乗すれば

$$P^{-1}A^nP = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4^n \end{pmatrix}$$

となる．したがって，左から P を，右から P^{-1} をかければ

$$A^n = P\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4^n \end{pmatrix}P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4^n \end{pmatrix}\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 4^n+2 & -4^n+1 \\ -2\cdot 4^n+2 & 2\cdot 4^n+1 \end{pmatrix}$$

である．

（解答終）

一般には例題 5.4 の解答の手順に沿って行列 A を対角化し，その n 乗 A^n を計算することになる．例題 5.4 の解答において，$k_1 = 1$ と $k_2 = 4$ を A の**固有値**，ベクトル $\begin{pmatrix} 1 \\ x_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ を**固有値 1 に対する A の固有ベクトル**，ベクトル $\begin{pmatrix} 1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ を**固有値 4 に対する A の固有ベクトル**という．この固有値と固有ベクトルは行列の応用の際に重要な役割を果たす．詳細は第 10 章以降で説明する．

また，k の値を求める 2 次方程式 $\Delta(A-kE) = (2-k)(3-k)-2 = k^2-5k+4 = 0$ を A の**固有方程式**という．ただし，普通は $\Delta(kE-A) = 0$ を A の固有方程式という．2 次正方行列の場合はこれらは一致するが，参考書を読む際には注意すること．後の章では $\Delta(kE-A) = 0$ を固有方程式と呼ぶ．

まとめると次のようになる．

定義 5.5.（固有値・固有ベクトル）

A を 2 次正方行列とする．スカラー k が A の**固有値**であるとは

$$A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = k\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

となるベクトル $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ が存在することである．このとき，$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ を**固有値 k に対する固有ベクトル**という．

固有ベクトルの条件に $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ があるのは，もし $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ でもよければ，k の値によらず $A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = k\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ が両辺零ベクトルとなって成り立ってしまうからである．これでは k の値が定まらない．

なお，**すべての正方行列 A が対角化できるわけではない**．対角化が可能かどうか判定できる必要十分条件は知られているが，それについては後の章で学習する．少なくとも 2 次正方行列については，固有方程式である 2 次方程式が重解をもたなければ対角化可能である．虚数解をもつ場合には対角化は可能であるが，その計算の途中では複素数が現れるためやや複雑になる．

行列 A について前の例題のような誘導がなくても，同様の手順で A^n を計算すればよい．

例題 5.6. $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$ とおく．自然数 n に対して，A^n を求めよ．

（解答） $A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = k\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ となる A の固有値 k と固有ベクトル $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \fallingdotseq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ の組を求める．この式は $(A-kE)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ と変形できる．ここで，$A-kE$ が逆行列をもつと仮定すると，この式に左から $(A-kE)^{-1}$ をかければ $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ となるが，これは不適である．よって，$A-kE = \begin{pmatrix} 1-k & -2 \\ 1 & 4-k \end{pmatrix}$ は逆行列をもたないから

$$\varDelta(A-kE) = (1-k)(4-k)+2 = k^2-5k+6 = (k-2)(k-3) = 0$$

より，$k=2,3$ となる．

$k=2$ のとき

$$(A-2E)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x-2y \\ x+2y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

より，$x+2y=0$ だから，固有値 2 に対する固有ベクトルとして $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ がとれる．

同様にして，$k=3$ のとき

$$(A-3E)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2x-2y \\ x+y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

より，$x+y=0$ だから，固有値 3 に対する固有ベクトルとして $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ がとれる．

そこで，A の固有ベクトルを並べて $P = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ とおくと，$\varDelta(P) = 1 \fallingdotseq 0$ より P は正則で

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

である．よって

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

となる．この両辺を n 乗すれば

$$P^{-1}A^nP = \begin{pmatrix} 2^n & 0 \\ 0 & 3^n \end{pmatrix}$$

となるから，左から P を，右から P^{-1} をかければ

$$A^n = P\begin{pmatrix} 2^n & 0 \\ 0 & 3^n \end{pmatrix}P^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2^n & 0 \\ 0 & 3^n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2^{n+1}-3^n & 2^{n+1}-2\cdot 3^n \\ -2^n+3^n & -2^n+2\cdot 3^n \end{pmatrix}$$

である．

（解答終）

固有ベクトルは零ベクトルでないように選べばどれをとってもよい．例えば固有値 2 の固有ベクトルを $\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ と選んで，$P = \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ としても，A^n はもちろん同じ計算結果となる．各自で確かめてみよ．

例題 5.7. $A = \begin{pmatrix} 7 & 4 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$ とおく．自然数 n に対して，A^n を求めよ．

（解答） $A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = k\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ となる A の固有値 k と固有ベクトル $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \fallingdotseq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ の組を求める．この式は $(A-kE)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ と変形できる．ここで，$A-kE$ が逆行列をもつと仮定すると，この式に左から $(A-kE)^{-1}$ をかければ $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ となるが，これは不適である．よって，$A-kE = \begin{pmatrix} 7-k & 4 \\ 4 & 1-k \end{pmatrix}$ は逆行列をもたないから

$$\Delta(A-kE) = (7-k)(1-k) - 16 = k^2 - 8k - 9 = (k-9)(k+1) = 0$$

より，$k = 9, -1$ となる．

$k = 9$ のとき

$$(A-9E)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 4 \\ 4 & -8 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2x+4y \\ 4x-8y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

より，$-x+2y=0$ だから，固有値 9 に対する固有ベクトルとして $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ がとれる．

同様にして，$k=-1$ のとき

$$(A+E)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 4 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8x+4y \\ 4x+2y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

より，$2x+y=0$ だから，固有値 -1 に対する固有ベクトルとして $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ がとれる．

そこで，A の固有ベクトルを並べて $P = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ とおくと，$\Delta(P) = 5 \fallingdotseq 0$ より P は正則で

$$P^{-1} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

である．よって

$$P^{-1}AP = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 7 & 4 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 45 & 0 \\ 0 & -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

となる．この両辺を n 乗すれば

$$P^{-1}A^nP = \begin{pmatrix} 9^n & 0 \\ 0 & (-1)^n \end{pmatrix}$$

となるから，左から P を，右から P^{-1} をかければ

$$\begin{aligned} A^n = P\begin{pmatrix} 9^n & 0 \\ 0 & (-1)^n \end{pmatrix}P^{-1} &= \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 9^n & 0 \\ 0 & (-1)^n \end{pmatrix}\frac{1}{5}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 4\cdot 9^n + (-1)^n & 2\cdot 9^n - 2(-1)^n \\ 2\cdot 9^n - 2(-1)^n & 9^n + 4(-1)^n \end{pmatrix} \end{aligned}$$

である．

（解答終）

例題 5.8. $A=\begin{pmatrix}2 & 5\\ 2 & -1\end{pmatrix}$ とおく．自然数 n に対して，A^n を求めよ．

（解答） $A\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=k\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}$ となる A の固有値 k と固有ベクトル $\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}\fallingdotseq\begin{pmatrix}0\\ 0\end{pmatrix}$ の組を求める．この式は $(A-kE)\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\end{pmatrix}$ と変形できる．ここで，$A-kE$ が逆行列をもつと仮定すると，この式に左から $(A-kE)^{-1}$ をかければ $\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\end{pmatrix}$ となるが，これは不適である．よって，$A-kE=\begin{pmatrix}2-k & 5\\ 2 & -1-k\end{pmatrix}$ は逆行列をもたないから

$$\varDelta(A-kE)=(2-k)(-1-k)-10=k^2-k-12=(k-4)(k+3)=0$$

より，$k=4,-3$ となる．

$k=4$ のとき

$$(A-4E)\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2 & 5\\ 2 & -5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2x+5y\\ 2x-5y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\end{pmatrix}$$

より，$2x-5y=0$ だから，固有値 4 に対する固有ベクトルとして $\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5\\ 2\end{pmatrix}$ がとれる．

同様にして，$k=-3$ のとき

$$(A+3E)\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5 & 5\\ 2 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5x+5y\\ 2x+2y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\end{pmatrix}$$

より，$x+y=0$ だから，固有値 -3 に対する固有ベクトルとして $\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\ -1\end{pmatrix}$ がとれる．

そこで，A の固有ベクトルを並べて $P=\begin{pmatrix}5 & 1\\ 2 & -1\end{pmatrix}$ とおくと，$\varDelta(P)=-7\fallingdotseq 0$ より P は正則で

$$P^{-1}=\frac{1}{-7}\begin{pmatrix}-1 & -1\\ -2 & 5\end{pmatrix}=\frac{1}{7}\begin{pmatrix}1 & 1\\ 2 & -5\end{pmatrix}$$

である．よって

$$P^{-1}AP=\frac{1}{7}\begin{pmatrix}1 & 1\\ 2 & -5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & 5\\ 2 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}5 & 1\\ 2 & -1\end{pmatrix}=\frac{1}{7}\begin{pmatrix}28 & 0\\ 0 & -21\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4 & 0\\ 0 & -3\end{pmatrix}$$

となる．この両辺を n 乗すれば

$$P^{-1}A^nP=\begin{pmatrix}4^n & 0\\ 0 & (-3)^n\end{pmatrix}$$

となるから，左から P を，右から P^{-1} をかければ

$$\begin{aligned}A^n=P\begin{pmatrix}4^n & 0\\ 0 & (-3)^n\end{pmatrix}P^{-1}&=\begin{pmatrix}5 & 1\\ 2 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}4^n & 0\\ 0 & (-3)^n\end{pmatrix}\frac{1}{7}\begin{pmatrix}1 & 1\\ 2 & -5\end{pmatrix}\\ &=\frac{1}{7}\begin{pmatrix}5\cdot 4^n+2(-3)^n & 2\cdot 5\cdot 4^n-5(-3)^n\\ 2\cdot 4^n-2(-3)^n & 2\cdot 4^n+5(-3)^n\end{pmatrix}\end{aligned}$$

である．

（解答終）

5.3 対角化不可能な 2 次正方行列の n 乗

A の固有方程式である 2 次方程式が重解をもつ場合には，次のように A^n が計算できる．

例題 5.9. $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}$ とおく．

(1) $B = A - 3E$ とおくとき，B^2 を求めよ．

(2) 自然数 n に対して，A^n を求めよ．

（解答）

(1) 定義より

$$B = A - 3E = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -1 & 5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 4 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

なので

$$B^2 = \begin{pmatrix} -2 & 4 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 4 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

となる．よって，$B^2 = O$ である．

(2) B と E は可換なので，2 項展開ができて

$$A^n = (B + 3E)^n = \sum_{k=0}^{n} {}_n\mathrm{C}_k B^k (3E)^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} {}_n\mathrm{C}_k 3^{n-k} B^k$$

が成り立つ．ただし，$B^0 = E$ である．

ここで，(1) より $B^2 = O$ だから

$$B^k = O \qquad (k \geqq 2)$$

が成り立つ．よって

$$A^n = \sum_{k=0}^{n} {}_n\mathrm{C}_k 3^{n-k} B^k = {}_n\mathrm{C}_0 3^n E + {}_n\mathrm{C}_1 3^{n-1} B = 3^n E + 3^{n-1} n B$$

となるから，それぞれ成分で表せば

$$A^n = 3^n E + 3^{n-1} n B = \begin{pmatrix} 3^n & 0 \\ 0 & 3^n \end{pmatrix} + 3^{n-1} n \begin{pmatrix} -2 & 4 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (3-2n)3^{n-1} & 4n \cdot 3^{n-1} \\ -n \cdot 3^{n-1} & (2n+3)3^{n-1} \end{pmatrix}$$

である．

（解答終）

上の例題の行列 A の固有方程式は

$$k^2 - 6k + 9 = (k-3)^2 = 0$$

となる．各自確かめてみよ．これをもとに，行列 B を上手くおけば，上のように 2 項展開を利用できる．なお，行列の積は一般には可換でないことは注意すること．前にも注意したように，B と単位行列 E が可換なので，$(B + 3E)^n$ を文字式のように計算できる．いつも $(A + B)^n$ が文字式のように二項展開できるわけではない．

例題 5.10. $A = \begin{pmatrix} 3 & -5 \\ 5 & -7 \end{pmatrix}$ とおく．自然数 n に対して，A^n を求めよ．

（解答） $A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = k\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ となる A の固有値 k と固有ベクトル $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \fallingdotseq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ の組を求める．この式は $(A - kE)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ と変形できる．ここで，$A - kE$ が逆行列をもつと仮定すると，この式に左から $(A - kE)^{-1}$ をかければ $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ となるが，これは不適である．よって，$A - kE = \begin{pmatrix} 3-k & -5 \\ 5 & -7-k \end{pmatrix}$ は逆行列をもたないから

$$\Delta(A - kE) = (3-k)(-7-k) + 25 = k^2 + 4k + 4 = (k+2)^2 = 0$$

より，$k = -2$（重解）となる．

固有値 -2 が重解なので

$$B = A + 2E = \begin{pmatrix} 3 & -5 \\ 5 & -7 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & -5 \\ 5 & -5 \end{pmatrix}$$

とおけば

$$B^2 = \begin{pmatrix} 5 & -5 \\ 5 & -5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 & -5 \\ 5 & -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = O$$

となる．よって

$$B^k = O \qquad (k \geqq 2)$$

が成り立つ．

また，B と E は可換なので，2 項展開ができて

$$\begin{aligned} A^n = (B - 2E)^n &= \sum_{k=0}^{n} {}_n\mathrm{C}_k B^k (-2E)^{n-k} \\ &= {}_n\mathrm{C}_0 (-2E)^n + {}_n\mathrm{C}_1 (-2E)^{n-1} B \\ &= (-2)^n E + n(-2)^{n-1} B \\ &= \begin{pmatrix} (-2)^n & 0 \\ 0 & (-2)^n \end{pmatrix} + n(-2)^{n-1}\begin{pmatrix} 5 & -5 \\ 5 & -5 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} (5n-2)(-2)^{n-1} & -5n(-2)^{n-1} \\ 5n(-2)^{n-1} & (-5n-2)(-2)^{n-1} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

である．

（解答終）

5.4　行列の n 乗の応用

行列の n 乗の応用例として，連立漸化式への利用が挙げられる．

例題 5.11.　連立漸化式

$$\begin{cases} a_0 = 3, & a_{n+1} = a_n - 2b_n \\ b_0 = 2, & b_{n+1} = a_n + 4b_n \end{cases} \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots)$$

で定まる数列 $\{a_n\}$ と $\{b_n\}$ の一般項を求めよ．

（解答）　与えられた連立漸化式は，行列を用いて

$$\begin{pmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix}$$

と表せる．よって，$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$ とおけば，$n = 0, 1, 2, \ldots$ に対して

$$\begin{pmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix}$$

となるから，等比数列の場合と同様に

$$\begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} a_{n-1} \\ b_{n-1} \end{pmatrix} = A^2 \begin{pmatrix} a_{n-2} \\ b_{n-2} \end{pmatrix} = \cdots = A^n \begin{pmatrix} a_0 \\ b_0 \end{pmatrix}$$

が成り立つ．ゆえに，A^n を求めればよい．

ここで，例題 5.6 より

$$A^n = \begin{pmatrix} 2^{n+1} - 3^n & 2^{n+1} - 2 \cdot 3^n \\ -2^n + 3^n & -2^n + 2 \cdot 3^n \end{pmatrix}$$

なので

$$\begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2^{n+1} - 3^n & 2^{n+1} - 2 \cdot 3^n \\ -2^n + 3^n & -2^n + 2 \cdot 3^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \cdot 2^{n+1} - 7 \cdot 3^n \\ -5 \cdot 2^n + 7 \cdot 3^n \end{pmatrix}$$

より

$$a_n = 5 \cdot 2^{n+1} - 7 \cdot 3^n, \qquad b_n = -5 \cdot 2^n + 7 \cdot 3^n$$

（解答終）

高校数学の範囲では，2 個の漸化式を上手く何倍かして足したり引いたりすることで等比数列が現れる形にしていたが，行列を使えばそのような発見的方法は必要ない．また，高校数学の解法では $\{a_n\}, \{b_n\}, \{c_n\}$ のように 3 個以上の連立漸化式となった場合への対応が困難である．行列を用いた解法は（3 個以上の場合は計算が複雑にはなるが）発見的要素なく，決まった手順で一般項が計算できる．

なお，上の例題では既に前の例題で A^n を計算していたので解答は短いが，実際には n 乗の計算も入るため見た目ほど簡単ではないことには注意すること．

社会において行列の n 乗の計算は，例えば次のような問題として扱われる．

例題 5.12. 携帯電話会社の A 社と B 社があり，次のように契約者数が変動するとする．

毎月，A 社契約者の 80 %が A 社と契約を継続し，20 %が B 社へ契約を変更する．また毎月，B 社契約者の 70 %が B 社と契約を継続し，30 %が A 社へ契約を変更する．

このとき，長期間後に A 社と B 社の契約者数の比率がどうなるか調べよ．ただし，全契約者数は毎年一定とし，新規契約・契約終了者および A 社や B 社以外への契約はないものとする．

（解答） 現在の A 社の契約者数を a_0，B 社の契約者数を b_0 とし，n か月後の契約者数をそれぞれ a_n および b_n とおく．このとき，n か月後の契約者数と $n+1$ か月後の契約者数の関係は

$$\begin{cases} a_{n+1} = 0.8a_n + 0.3b_n \\ b_{n+1} = 0.2a_n + 0.7b_n \end{cases}$$

となる．そこで，これを行列を用いて表せば

$$A = \begin{pmatrix} 0.8 & 0.3 \\ 0.2 & 0.7 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix} \quad (n = 0, 1, 2, \ldots)$$

となる．

方程式 $A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = k\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ が $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \fallingdotseq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ となる解をもつ k の値を求める．この式は $(A-kE)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ と変形できる．ここで，$A-kE$ が逆行列をもつと仮定すると，この式に左から $(A-kE)^{-1}$ をかければ $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ となるが，これは不適である．よって，$A - kE = \begin{pmatrix} 0.8-k & 0.3 \\ 0.2 & 0.7-k \end{pmatrix}$ は正則でなく

$$\Delta(A-kE) = (0.8-k)(0.7-k) - 0.06 = k^2 - 1.5k + 0.5 = (k-1)(k-0.5) = 0$$

より，$k = 1, 0.5$ となる．

$k=1$ のとき

$$(A-E)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0.2 & 0.3 \\ 0.2 & -0.3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0.2x + 0.3y \\ 0.2x - 0.3y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

より，解の 1 つとして $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ がとれる．同様にして，$k = 0.5$ のとき

$$(A-0.5E)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.3 & 0.3 \\ 0.2 & 0.2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.3x + 0.3y \\ 0.2x + 0.2y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

より，解の 1 つとして $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ がとれる．

そこで，$P = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ とおくと，$\Delta(P) = 5 \fallingdotseq 0$ より P は正則で $P^{-1} = \dfrac{1}{5}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$ である．よって

$$P^{-1}AP = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0.8 & 0.3 \\ 0.2 & 0.7 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0.5 \end{pmatrix}$$

となる．この両辺を n 乗すれば

$$P^{-1}A^nP = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0.5^n \end{pmatrix}$$

である．

よって

$$A^n = P\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 0.5^n\end{pmatrix}P^{-1} = \begin{pmatrix}3 & -1\\ 2 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 0.5^n\end{pmatrix}\frac{1}{5}\begin{pmatrix}1 & 1\\ -2 & 3\end{pmatrix} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix}3+2\cdot 0.5^n & 3-3\cdot 0.5^n\\ 2-2\cdot 0.5^n & 2+3\cdot 0.5^n\end{pmatrix}$$

となる．ゆえに

$$\begin{pmatrix}a_n\\ b_n\end{pmatrix} = A^n\begin{pmatrix}a_0\\ b_0\end{pmatrix} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix}3a_0+3b_0+(2a_0-3b_0)0.5^n\\ 2a_0+2b_0+(-2a_0+3b_0)0.5^n\end{pmatrix}$$

であるから

$$a_n = \frac{3a_0+3b_0+(2a_0-3b_0)0.5^n}{5}, \qquad b_n = \frac{2a_0+2b_0+(-2a_0+3b_0)0.5^n}{5}$$

が得られる．長期間経過後の状況を見るために $n \to \infty$ とすると

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \frac{3(a_0+b_0)}{5}, \qquad \lim_{n\to\infty} b_n = \frac{2(a_0+b_0)}{5}$$

となる．したがって，長期間後には A 社と B 社の契約者数の人数比は $3:2$ に限りなく近づいていく．

（解答終）

今回は問題を簡単にするために 2 社のみで考えたが，同様に 3 社以上で考えることもできる（もちろんそれが自然である）．その場合でも行列のサイズが大きくなるだけで計算法は同様であるが，3 次以上の正則性の判定や対角化の方法をまだ学習していないので，後の章でそれらの問題や更なる行列の応用例を紹介することにする．

なお，よく上の例題を観察すると，最後の答えである契約者数の人数比の極限 $3:2$ と行列 A の固有値 $k=1$ の固有ベクトル $\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3\\ 2\end{pmatrix}$ が似ているが，これは偶然ではない．

一般に，今回の行列 $A = \begin{pmatrix}0.8 & 0.3\\ 0.2 & 0.7\end{pmatrix}$ のように各列の成分の和が 1 となっている行列は**確率行列**と呼ばれる．また，$\begin{pmatrix}a_{n+1}\\ b_{n+1}\end{pmatrix} = A\begin{pmatrix}a_n\\ b_n\end{pmatrix}$ のように確率行列をかけることで次のステップ $(n \to n+1)$ が得られる現象においては，行列を用いた解析が有効である．特にこの応用だけでかなりの事実が知られているが，それらについても簡単に紹介できるものを後の対角化の章で扱うことにする．

前の例題では行列 A は n 番目の情報から $n+1$ 番目の情報への "変換規則" と見ることもできる．このように，**行列は単に数値やデータを縦横に並べただけのものではなく，何らかの変換規則を記述するために用いることも多い**．この視点は行列の意味や応用を理解するうえで非常に重要である．

6　転置行列

6.1　転置行列の定義と性質

行列に対して，行と列を入れ替える「転置 (transpose)」という操作が重要なことがある．例えば，行ベクトルに関する定理に対してその転置を考えると，列ベクトルに関する定理に翻訳できることがある．

そこで，転置行列を以下で定義する．

定義 6.1.（転置行列）
$m \times n$ 行列 A に対して，行と列を入れ替えて得られる $n \times m$ 行列を A の**転置行列**といい，${}^tA$ で表す．成分で表せば，$A = (a_{ij})_{ij}$ に対して，${}^tA = (a_{ji})_{ij}$ となる．転置行列を A^T で表す分野もある．

例 6.2.（転置行列の例）
抽象的な定義では転置行列の理解が難しいので，具体例を挙げる．

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}, \qquad C = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, \qquad D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

については

$${}^tA = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}, \qquad {}^tB = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}, \qquad {}^tC = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}, \qquad {}^tD = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

となる．一般に行列のサイズが変わるので注意すること．また，正方行列については転置をとっても，サイズと対角成分は変わらない．そのため，特に対角行列は転置という操作で変化しない．

例題 6.3.

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 6 \\ 1 & 0 & -3 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 7 & -3 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

とおくとき，次を計算せよ．

(1) ${}^tAA$　　(2) $A{}^tA$　　(3) $\boldsymbol{x}{}^t\boldsymbol{x}$　　(4) ${}^t\boldsymbol{x}B\boldsymbol{x}$

（解答）

(1) $${}^tAA = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -1 & 0 \\ 6 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 & -1 & 6 \\ 1 & 0 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 17 & -4 & 21 \\ -4 & 1 & -6 \\ 21 & -6 & 45 \end{pmatrix}$$

(2) $$A{}^tA = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 6 \\ 1 & 0 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -1 & 0 \\ 6 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 53 & -14 \\ -14 & 10 \end{pmatrix}$$

(3) $$\boldsymbol{x}{}^t\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 4 \end{pmatrix}$$

(4) $${}^t\boldsymbol{x}B\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 7 & -3 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = 3$$

（解答終）

例 6.4. （転置行列と内積の関係）

2 つの空間ベクトル $\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$ に対して

$$ {}^t\boldsymbol{a}\,\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3 $$

となる．この右辺は空間ベクトルの内積と一致するから，ベクトルの内積は転置を用いて

$$ (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = {}^t\boldsymbol{a}\,\boldsymbol{b} $$

と表すことができる．

行列の転置について，以下の定理が成り立つ．

定理 6.5. （転置行列の性質）

A と B を $m \times n$ 行列，C を $n \times p$ 行列とし，α をスカラーとする．このとき，以下が成り立つ．

(1) ${}^t(A+B) = {}^tA + {}^tB$　(2) ${}^t({}^tA) = A$　(3) ${}^t(\alpha A) = \alpha\,{}^tA$　(4) ${}^t(AC) = {}^tC\,{}^tA$

注意 6.6. (2) は転置を 2 回とると元の行列に戻るということである．

(4) において ${}^t(AC) = {}^tA\,{}^tC$ **ではないことに注意すること**．行列の転置をとると順番は入れ替わる．

証明. $A = (a_{ij}),\ B = (b_{ij}),\ C = (c_{ij})$ とおく．

(1) $m \times n$ 行列 $A + B$ の (i, j) 成分を $(A + B)_{ij}$ で表すことにすると

$$ (A+B)_{ij} = a_{ij} + b_{ij} $$

である．よって，$n \times m$ 行列 ${}^t(A + B)$ の (i, j) 成分を ${}^t(A + B)_{ij}$ とおけば

$$ {}^t(A+B)_{ij} = (A+B)_{ji} = a_{ji} + b_{ji} $$

となる．ここで，右辺の第 1 項は ${}^tA$ の (i, j) 成分であり，第 2 項は ${}^tB$ の (i, j) 成分である．よって，右辺は行列の和 ${}^tA + {}^tB$ の (i, j) 成分である．

ゆえに，$1 \leqq i \leqq n,\ 1 \leqq j \leqq m$ に対して，${}^t(A + B)$ の (i, j) 成分と ${}^tA + {}^tB$ の (i, j) 成分がすべて一致するから，${}^t(A + B) = {}^tA + {}^tB$ が成り立つ．

(2) A の転置行列 ${}^tA$ は $n \times m$ 行列で，その (i, j) 成分を $({}^tA)_{ij}$ で表すことにすると，$({}^tA)_{ij} = a_{ji}$ である．よって，さらに転置をとれば ${}^t({}^tA)$ は $m \times n$ 行列で，その (i, j) 成分は

$$ {}^t({}^tA)_{ij} = ({}^tA)_{ji} = a_{ij} $$

となる．ゆえに，${}^t({}^tA) = A$ が成り立つ．

(3) 成分を設定すれば簡単に証明できるので演習問題とする．

(4)　$m \times p$ 行列 AC の (i,j) 成分を $(AC)_{ij}$ で表すことにすると

$$(AC)_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}c_{kj}$$

である．よって，$p \times m$ 行列 ${}^t(AC)$ の (i,j) 成分を $({}^t(AC))_{ij}$ とおけば

$$({}^t(AC))_{ij} = (AC)_{ji} = \sum_{k=1}^{n} a_{jk}c_{ki}$$

となる．

一方，$p \times n$ 行列 ${}^tC$ の (i,j) 成分は c_{ji}，$n \times m$ 行列 ${}^tA$ の (i,j) 成分は a_{ji} なので，$p \times m$ 行列 ${}^tC\,{}^tA$ の (i,j) 成分を $({}^tC\,{}^tA)_{ij}$ とおけば

$$({}^tC\,{}^tA)_{ij} = \sum_{k=1}^{n} c_{ki}a_{jk}$$

となる．

ゆえに，$1 \leqq i \leqq p$, $1 \leqq j \leqq m$ に対して，${}^t(AC)$ の (i,j) 成分と ${}^tC\,{}^tA$ の (i,j) 成分がすべて一致するから，${}^t(AC) = {}^tC\,{}^tA$ が成り立つ．

□

練習問題 6.1.　定理 6.5 の (3) を証明せよ．

転置行列の逆行列については次のようになる．

定理 6.7.（転置行列の逆行列）
A が正則行列ならば，その転置行列 ${}^tA$ も正則行列で

$$({}^tA)^{-1} = {}^t(A^{-1})$$

が成り立つ．

証明.　A が正則行列なので，逆行列 $X = A^{-1}$ が存在して

$$AX = E, \qquad XA = E$$

が成り立つ．これらの式のそれぞれ転置をとれば，${}^tE = E$ と定理 6.5(4) より

$${}^t(AX) = {}^tX\,{}^tA = E, \qquad {}^t(XA) = {}^tA\,{}^tX = E$$

となるから，${}^tA$ も正則行列で，その逆行列は ${}^tX$ である．よって

$$({}^tA)^{-1} = {}^tX = {}^t(A^{-1})$$

が成り立つ．□

上の定理より「転置行列の逆行列」と「逆行列の転置行列」は同じものになる．そこで，普通は $({}^tA)^{-1}$ を単に ${}^tA^{-1}$ と書く．

6.2　対称行列と交代行列

ここでは転置という操作に対して特徴的な形をもつ行列について考える．定義はシンプルであるが，後の章で重要な役割を果たすので用語は理解しておくこと．

定義 6.8. （対称行列・交代行列）
A を n 次正方行列とする．

(1) ${}^tA = A$ をみたすとき，A は n 次**対称行列**であるという．

(2) ${}^tA = -A$ をみたすとき，A は n 次**交代行列**であるという．

例 6.9. （対称行列・交代行列の例）

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 6 & -2 & 0 \\ -2 & 7 & 3 \\ 0 & 3 & 0 \end{pmatrix}, \qquad C = \begin{pmatrix} 0 & 5 \\ -5 & 0 \end{pmatrix}, \qquad D = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -3 \\ -2 & 0 & -1 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

とおけば，A は 2 次対称行列，B は 3 次対称行列，C は 2 次交代行列，D は 3 次交代行列である．各自で定義を確かめてみよ．

例題 6.10.　行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & a & 2 \\ -3 & 6 & 4 \\ b & 4 & -1 \end{pmatrix}$ が対称行列となるような，a と b の値を求めよ．

（解答）　対称行列となるのは $A = {}^tA$ のときだから，この両辺の成分を比較すれば

$$\begin{pmatrix} 1 & a & 2 \\ -3 & 6 & 4 \\ b & 4 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -3 & b \\ a & 6 & 4 \\ 2 & 4 & -1 \end{pmatrix}$$

となるから，$a = -3,\ b = 2$ である．

（解答終）

例題 6.11.　行列 $A = \begin{pmatrix} a & 8 & -1 \\ -8 & 0 & b \\ 1 & 4 & 0 \end{pmatrix}$ が交代行列となるような，a と b の値を求めよ．

（解答）　交代行列となるのは $-A = {}^tA$ のときだから，この両辺の成分を比較すれば

$$\begin{pmatrix} -a & -8 & 1 \\ 8 & 0 & -b \\ -1 & -4 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & -8 & 1 \\ 8 & 0 & 4 \\ -1 & b & 0 \end{pmatrix}$$

となるから，$-a = a$ より，$a = 0,\ b = -4$ である．

（解答終）

練習問題 6.2.　行列の転置に関する以下の性質を証明せよ．

(1) すべての n 次正方行列 A に対して，$A + {}^tA$ は対称行列，$A - {}^tA$ は交代行列である．

(2) 任意の $m \times n$ 行列 A に対して，$A\,{}^tA$ は m 次対称行列である．

例題 6.12. n 次正方行列 P は $P\,{}^tP = E$ をみたし，さらに $P+E$ が正則であるとする．このとき

$$A = (P-E)(P+E)^{-1}$$

とおく．

(1) 等式 $A(E+{}^tP) = E - {}^tP$ が成り立つことを示せ．

(2) ${}^tA = (E+P)^{-1}(E-P)$ となることを示せ．

(3) A は交代行列であることを示せ．

（解答）

(1) 与えられた等式の両辺に右から $P+E$ をかければ

$$A(P+E) = P - E$$

が得られる．さらに，この両辺に右から ${}^tP$ をかければ，$P\,{}^tP = E$ より

$$\begin{aligned} A(P+E)\,{}^tP &= (P-E)\,{}^tP \\ A(P\,{}^tP + {}^tP) &= P\,{}^tP - {}^tP \\ A(E+{}^tP) &= E - {}^tP \end{aligned}$$

となるから，示すべき等式が成り立つ．

(2) (1) の等式の両辺の転置をとれば，${}^tE = E$ より

$$\begin{aligned} {}^t\{A(E+{}^tP)\} &= {}^t(E-{}^tP) \\ {}^t(E+{}^tP)\,{}^tA &= {}^tE - {}^t({}^tP) \\ \{{}^tE + {}^t({}^tP)\}\,{}^tA &= E - P \\ (E+P)\,{}^tA &= E - P \end{aligned}$$

となる．$E+P$ は正則なのでその逆行列を左からかければ

$${}^tA = (E+P)^{-1}(E-P)$$

が成り立つ．

(3) A の定義より

$$-A = -(P-E)(P+E)^{-1} = -\{(P+E)-2E\}(P+E)^{-1} = -E - 2(P+E)^{-1}$$

である．また，(2) より

$${}^tA = (E+P)^{-1}(E-P) = (P+E)^{-1}\{-(P+E)+2E\} = -E - 2(P+E)^{-1}$$

となる．よって，${}^tA = -A$ が成り立つから，A は交代行列である．

（解答終）

7　ブロック分けされた行列の計算法

7.1　ブロック分けされた行列の積

行列の積について復習してみると

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{y} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

とおけば

$$A\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax_1 + bx_2 \\ cx_1 + dx_2 \end{pmatrix}$$

$$A\boldsymbol{y} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ay_1 + by_2 \\ cy_1 + dy_2 \end{pmatrix}$$

となる．

ここで，2 個の縦ベクトル $\boldsymbol{x}$ と $\boldsymbol{y}$ を並べて，行列を

$$X = \begin{pmatrix} \boldsymbol{x} & \boldsymbol{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{pmatrix}$$

とおく（ベクトルを並べるのでカッコがたくさん現れそうであるが，一番外側の行列のカッコ以外は書かずに数字だけ並べる）．このとき，行列の積は

$$AX = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax_1 + bx_2 & ay_1 + by_2 \\ cx_1 + dx_2 & cy_1 + dy_2 \end{pmatrix}$$

であり，この右辺は 2 個の縦ベクトル $A\boldsymbol{x}$ と $A\boldsymbol{y}$ を並べたものとなっている．つまり

$$A \begin{pmatrix} \boldsymbol{x} & \boldsymbol{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A\boldsymbol{x} & A\boldsymbol{y} \end{pmatrix}$$

が成り立っている．

一般に行列の計算を成分ごとに行うのは面倒である．もし成分の並び方に規則性がある場合などは，上のように列ベクトル単位で計算できると簡単なことが多い．実際にそれが可能であることを保証するのが次の定理である．

定理 7.1. （ブロック分けされた行列の積 1）
A を $m \times n$ 行列，B を $n \times l$ 行列とし，B の第 j 列ベクトルを $\boldsymbol{b}_j$ とする．このとき

$$AB = A \begin{pmatrix} \boldsymbol{b}_1 & \boldsymbol{b}_2 & \cdots & \boldsymbol{b}_l \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A\boldsymbol{b}_1 & A\boldsymbol{b}_2 & \cdots & A\boldsymbol{b}_l \end{pmatrix}$$

が成り立つ．

証明は上で示したように成分ごとに計算してみるとよい．行列の積において右側の行列は縦ベクトルを 1 つのかたまりとして計算しているので，この定理は自然な結果である．

左側を行ベクトルに分けた場合でも同様である．例えば

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{y} = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \end{pmatrix}$$

とおけば

$$\boldsymbol{x}A = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax_1 + cx_2 & bx_1 + dx_2 \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{y}A = \begin{pmatrix} y_1 & y_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ay_1 + cy_2 & by_1 + dy_2 \end{pmatrix}$$

となる．ここで，2 個の横ベクトル $\boldsymbol{x}$ と $\boldsymbol{y}$ を並べて，行列を

$$X = \begin{pmatrix} \boldsymbol{x} \\ \boldsymbol{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{pmatrix}$$

とおく（一番外側の行列のカッコ以外は書かずに数字だけ並べる）．このとき，行列の積は

$$XA = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax_1 + cx_2 & bx_1 + dx_2 \\ ay_1 + uy_2 & by_1 + dy_2 \end{pmatrix}$$

であり，この右辺は 2 個の横ベクトル $A\boldsymbol{x}$ と $A\boldsymbol{y}$ を並べたものとなっている．つまり

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{x} \\ \boldsymbol{y} \end{pmatrix} A = \begin{pmatrix} \boldsymbol{x}A \\ \boldsymbol{y}A \end{pmatrix}$$

が成り立っている．一般には次の定理となる．

定理 7.2. （ブロック分けされた行列の積 2）
　A を $m \times n$ 行列，B を $n \times l$ 行列とし，A の第 j 行ベクトルを $\boldsymbol{a}_j$ とする．このとき

$$AB = \begin{pmatrix} \boldsymbol{a}_1 \\ \boldsymbol{a}_2 \\ \vdots \\ \boldsymbol{a}_m \end{pmatrix} B = \begin{pmatrix} \boldsymbol{a}_1 B \\ \boldsymbol{a}_2 B \\ \vdots \\ \boldsymbol{a}_m B \end{pmatrix}$$

が成り立つ．

　より一般にブロック分けされた場合にも，同様に計算できることが知られている．

定理 7.3. （ブロック分けされた行列の積 3）
　$(m_1 + m_2) \times (n_1 + n_2)$ 行列 A，$(n_1 + n_2) \times (l_1 + l_2)$ 行列 B が次のように 4 つの行列にブロック分けされているとする．

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{pmatrix}$$

ただし，A_{ij} は $m_i \times n_j$ 行列，B_{ij} は $n_i \times l_j$ 行列である．このとき

$$AB = \begin{pmatrix} A_{11}B_{11} + A_{12}B_{21} & A_{11}B_{12} + A_{12}B_{22} \\ A_{21}B_{11} + A_{22}B_{21} & A_{21}B_{12} + A_{22}B_{22} \end{pmatrix}$$

が成り立つ．

　これは積の順番に気をつければ，あたかも 2 次正方行列どうしの積のように計算できるということである．他のブロック分けについても同様の結果が成り立つ．

例題 7.4. A を m 次正則行列，B を n 次正則行列，C を $m\times n$ 行列とする．
　このとき，$(m+n)$ 次正方行列

$$\begin{pmatrix} A & C \\ O_{n,m} & B \end{pmatrix}$$

は正則であり，その逆行列は

$$\begin{pmatrix} A^{-1} & -A^{-1}CB^{-1} \\ O_{n,m} & B^{-1} \end{pmatrix}$$

であることを示せ．

（解答） A と B は正則なので逆行列が存在するから，与えられた行列は定まる．そこで

$$X = \begin{pmatrix} A & C \\ O_{n,m} & B \end{pmatrix}, \qquad Y = \begin{pmatrix} A^{-1} & -A^{-1}CB^{-1} \\ O_{n,m} & B^{-1} \end{pmatrix}$$

とおき，実際にかけてみれば

$$\begin{aligned} XY &= \begin{pmatrix} A & C \\ O_{n,m} & B \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A^{-1} & -A^{-1}CB^{-1} \\ O_{n,m} & B^{-1} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} AA^{-1} & -AA^{-1}CB^{-1} + CB^{-1} \\ O_{n,m} & BB^{-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E_m & O_{m,n} \\ O_{n,m} & E_n \end{pmatrix} = E_{m+n} \end{aligned}$$

であり，さらに

$$\begin{aligned} YX &= \begin{pmatrix} A^{-1} & -A^{-1}CB^{-1} \\ O_{n,m} & B^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & C \\ O_{n,m} & B \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} A^{-1}A & A^{-1}C - A^{-1}CB^{-1}B \\ O_{n,m} & B^{-1}B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E_m & O_{m,n} \\ O_{n,m} & E_n \end{pmatrix} = E_{m+n} \end{aligned}$$

となる．よって

$$XY = YX = E_{m+n}$$

となるから，X は正則で，その逆行列は $X^{-1} = Y$ である．

（解答終）

　この例題で $C = O_{m,n}$ とすれば，A と B が正則ならば

$$\begin{pmatrix} A & O \\ O & B \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} A^{-1} & O \\ O & B^{-1} \end{pmatrix}$$

となることもわかる．このようなブロック単位の計算は，計算量を節約するためにしばしば用いられる．

7.2　対角化の原理についての概説

この計算法を利用すれば，例題 5.6 のように行列の対角化ができる理由も説明できる．対角化のためには，まず行列

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

に対して

$$A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = k \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \fallingdotseq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

となる固有値 k と対応する固有ベクトル $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ を求めていた．

そこで，A の固有値を k_1, k_2 $(k_1 \fallingdotseq k_2)$ とし，それぞれに対応する固有ベクトルを $\boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{p}_2$ とおく．つまり

$$A\boldsymbol{p}_1 = k_1\boldsymbol{p}_1, \qquad A\boldsymbol{p}_2 = k_2\boldsymbol{p}_2 \qquad \cdots \text{①}$$

とする．次に，縦ベクトル $\boldsymbol{p}_1$ と $\boldsymbol{p}_2$ を並べて，行列

$$P = \begin{pmatrix} \boldsymbol{p}_1 & \boldsymbol{p}_2 \end{pmatrix}$$

をつくる．このとき，この行列 P を A に右からかけて，さらに ① を代入すれば

$$\begin{aligned} AP &= A\begin{pmatrix} \boldsymbol{p}_1 & \boldsymbol{p}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A\boldsymbol{p}_1 & A\boldsymbol{p}_2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} k_1\boldsymbol{p}_1 & k_2\boldsymbol{p}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{p}_1 & \boldsymbol{p}_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} k_1 & 0 \\ 0 & k_2 \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} k_1 & 0 \\ 0 & k_2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

が成り立つ．

よって，P が正則ならば

$$AP = P \begin{pmatrix} k_1 & 0 \\ 0 & k_2 \end{pmatrix}$$

の両辺に左から P^{-1} をかけて

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} k_1 & 0 \\ 0 & k_2 \end{pmatrix}$$

が得られるので，これを用いて A^n が計算できる．

ゆえに，$P^{-1}AP$ という形は特別であり，ここを PAP^{-1} としてしまうと上手くいかない．また，A を対角化した際に現れる対角行列の対角成分は A の固有値となる．

ここで気になるのは『固有ベクトルを並べて作った行列 P が正則となるかどうか』である．実は 2 次正方行列については，固有方程式（k を求める 2 次方程式）が重解をもたないときには，上の手順で作った行列 P は必ず正則になることが証明できる．しかし，3 次以上の場合を含めて一般論を展開するには準備が必要なので，後の章で扱うことにする．

第 3 章　数ベクトル空間の間の線形写像

1　行列で定められる写像

行列は単に数値を縦横に並べたものというだけではない．行列の n 乗の応用の節でも述べたように，行列をベクトルをベクトルに変換するものと見ることは重要である．

例えば平面のベクトルを平面ベクトルに変換するものとして

$$f\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \\ p & q \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax+by \\ cx+dy \\ px+qy \end{pmatrix}$$

のように行列をかけることを考える．このように，数ベクトルを代入するとまた数ベクトルが出てくるものは写像と呼ばれ，この場合は 2 次元数ベクトルを 3 次元数ベクトルへ移しているから

$$f\colon \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$$

のような記号で表し，定義域を $\mathbb{R}^2$ とする写像という．正確な写像の定義は第 9 章で扱うことにする．この章では「数ベクトルを 1 つ代入すると，1 つの数ベクトルが出てくるもの」を写像と呼んでいると考えればよい．

定義 1.1. （行列から定まる写像）

$A \in M_{m,n}(\mathbb{R})$ に対して，写像 $T_A\colon \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ を

$$T_A(\boldsymbol{x}) \coloneqq A\boldsymbol{x} \qquad (\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n)$$

で定義する．この T_A を行列 A が定める $\mathbb{R}^n$ から $\mathbb{R}^m$ への線形写像という．

特に $n = m$ の場合には，T_A を $\mathbb{R}^n$ の線形変換という．

例 1.2.　$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ とおくと，$T_A\colon \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ であり，$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ に対して

$$T_A(\boldsymbol{x}) = A\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1+2x_2 \\ x_1+2x_2 \end{pmatrix}$$

となる．つまり，T_A は 2 次元数ベクトルを代入すると，2 次元数ベクトルが出てくる．

$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$ とおくと，$T_B\colon \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ であり，$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ に対して

$$T_B(\boldsymbol{x}) = B\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1+2x_2+3x_3 \\ 4x_1+5x_2+6x_3 \end{pmatrix}$$

となる．つまり，T_B は 3 次元数ベクトルを代入すると，2 次元数ベクトルが出てくる．

行列から定まる写像については，次の性質が代表的である．

定理 1.3. （線形性）
$A \in M_{m,n}(\mathbb{R})$ とすると，任意の $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^n$ と $\alpha \in \mathbb{R}$ に対して

$$T_A(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}) = T_A(\boldsymbol{x}) + T_A(\boldsymbol{y}), \qquad T_A(\alpha\boldsymbol{x}) = \alpha\, T_A(\boldsymbol{x})$$

が成り立つ．この 2 つの性質を**線形性**という．

証明． T_A の定義式から

$$T_A(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}) = A(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}) = A\boldsymbol{x} + A\boldsymbol{y} = T_A(\boldsymbol{x}) + T_A(\boldsymbol{y})$$

$$T_A(\alpha\boldsymbol{x}) = A(\alpha\boldsymbol{x}) = \alpha A\boldsymbol{x} = \alpha\, T_A(\boldsymbol{x})$$

となる． □

これは，1 次関数 $y = ax$ がみたす性質

$$a(x_1 + x_2) = ax_1 + ax_2, \qquad a(\alpha x) = \alpha(ax)$$

と似ている．そのため，2 次正方行列や 3 次正方行列で表される変換は高校数学旧課程で「1 次変換」と呼ばれ，入試問題でもよく出題されていた．

この線形性を利用すると，計算や論証が簡単に行えることがある．それについては後の例題を参照すること．

2　平面内および空間内における線形変換

2.1　平面内の回転移動

高校数学の複素数平面の分野において点の回転を学習した．座標平面上の点 (a, b) を原点を中心に正の向きに角度 θ 回転した点を (x, y) とおくと，複素数平面で考えれば

$$x + iy = (a + ib)(\cos\theta + i\sin\theta)$$

となる．これを計算すれば

$$x + iy = (a\cos\theta - b\sin\theta) + i(a\sin\theta + b\cos\theta)$$

であるから

$$(x, y) = (a\cos\theta - b\sin\theta,\ a\sin\theta + b\cos\theta)$$

となる．

ここで，座標と位置ベクトルを同一視して縦ベクトルで書くことにすると

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a\cos\theta - b\sin\theta \\ a\sin\theta + b\cos\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

が成り立つ．よって，行列を

$$R(\theta) \coloneqq \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

とおけば

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = R(\theta) \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

より，点の回転移動はその位置ベクトルに $R(\theta)$ をかけることで実現できる．この $R(\theta)$ を**回転行列**という．

すでに例題 4.12 で見たように，回転行列の積について

$$R(\alpha)R(\beta) = R(\alpha + \beta)$$

が成り立つ．これは『β 回転移動してからさらに α 回転移動すること』と『一度に $\alpha + \beta$ 回転移動すること』が同じであることを意味しており，その意味で当然のことである．

また

$$\varDelta(R(\theta)) = \cos^2\theta + \sin^2\theta = 1 \neq 0$$

であるから，$R(\theta)$ は正則で，その逆行列は

$$R(\theta)^{-1} = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(-\theta) & \sin(-\theta) \\ \sin(-\theta) & \cos(-\theta) \end{pmatrix} = R(-\theta)$$

となる．これは θ 回転の逆変換は $-\theta$ 回転することを意味しており，自然な結果である．

2.2 平面内の座標軸に関する対称移動

座標平面内で x 軸に関する対称移動 f を考える．この変換 f により，点 (x, y) は $(x, -y)$ に移るから，位置ベクトルで表せば

$$f\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} x \\ -y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

となる．よって，x 軸に関する対称移動は行列

$$J_x = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

で表される変換である．この J_x を**反転**ということもある．

同様に，座標平面内で y 軸に関する対称移動 g を考える．この変換 g により，点 (x, y) は $(-x, y)$ に移るから，位置ベクトルで表せば

$$f\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} -x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

となる．よって，y 軸に関する対称移動は行列

$$J_y = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

で表される変換である．この J_y も**反転**ということもある．

2.3 平面内の原点を通る直線に関する対称移動

原点を通る直線 $l\colon y = mx$ に関する対称移動を f とする．位置ベクトルが $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ の点 P を対称移動した点を Q とすれば，$f(\boldsymbol{x})$ が点 Q の位置ベクトルである．

直線 l の方向ベクトルとして $\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ m \end{pmatrix}$ がとれる．まず，線分 PQ の中点は直線 l 上にあるから，ある実数 k を用いて

$$\frac{\boldsymbol{x} + f(\boldsymbol{x})}{2} = k\boldsymbol{v}$$

と表せる．よって

$$f(\boldsymbol{x}) = 2k\boldsymbol{v} - \boldsymbol{x}$$

である．

次に，直線 PQ と l は垂直だから，$\overrightarrow{\mathrm{PQ}} = f(\boldsymbol{x}) - \boldsymbol{x}$ と $\boldsymbol{v}$ の内積は 0 となる．ゆえに

$$0 = (f(\boldsymbol{x}) - \boldsymbol{x}, \boldsymbol{v}) = (2k\boldsymbol{v} - 2\boldsymbol{x}, \boldsymbol{v}) = 2k\|\boldsymbol{v}\|^2 - 2(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{v})$$

より

$$k = \frac{(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{v})}{\|\boldsymbol{v}\|^2} = \frac{x + my}{1 + m^2}$$

となる．よって

$$\begin{aligned} f(\boldsymbol{x}) = 2k\boldsymbol{v} - \boldsymbol{x} &= \frac{2(x + my)}{1 + m^2} \begin{pmatrix} 1 \\ m \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{m^2 + 1} \begin{pmatrix} 2(x + my) - (m^2 + 1)x \\ 2(x + my)m - (m^2 + 1)y \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{m^2 + 1} \begin{pmatrix} (1 - m^2)x + 2my \\ 2mx + (m^2 - 1)y \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{m^2 + 1} \begin{pmatrix} 1 - m^2 & 2m \\ 2m & m^2 - 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \end{aligned}$$

であるから，f は行列 $\dfrac{1}{m^2 + 1} \begin{pmatrix} 1 - m^2 & 2m \\ 2m & m^2 - 1 \end{pmatrix}$ で表される変換である．

2.4　平面内の原点を通る直線に関する正射影

原点を通る直線を $l\colon y = mx$ とする．平面上の点 P を P から直線 l に下した垂線の足 Q に対応させる変換を，P の直線 l への**正射影**という．

直線 l への正射影を g とし，点 P の位置ベクトルを $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ とすれば，$g(\boldsymbol{x})$ が点 Q の位置ベクトルである．

ここで，f を直線 l に関する対称移動とすれば，正射影の定義から

$$\frac{\boldsymbol{x} + f(\boldsymbol{x})}{2} = g(\boldsymbol{x})$$

が成り立つ．よって，前節の計算より

$$\begin{aligned} g(\boldsymbol{x}) = \frac{\boldsymbol{x} + f(\boldsymbol{x})}{2} = \frac{\boldsymbol{x} + (2k\boldsymbol{v} - \boldsymbol{x})}{2} = k\boldsymbol{v} &= \frac{x + my}{1 + m^2}\begin{pmatrix} 1 \\ m \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{m^2 + 1}\begin{pmatrix} x + my \\ mx + m^2 y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & m \\ m & m^2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \end{aligned}$$

であるから，g は行列 $\dfrac{1}{m^2 + 1}\begin{pmatrix} 1 & m \\ m & m^2 \end{pmatrix}$ で表される変換である．

今回は先に対称移動を表す変換 f を求めていたので，それを利用して簡単に正射影の行列を求められた．対称移動の場合と同様にすれば，正射影を表す行列を直接求めることもできる．もし原点を通る直線 l の方向ベクトルを長さ 1 で

$$\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \qquad (a^2 + b^2 = 1)$$

とすれば，直線 l への正射影を表す行列は $\begin{pmatrix} a^2 & ab \\ ab & b^2 \end{pmatrix}$ と見やすくなる．よい練習問題なので，直線 l による対称移動を経由せずに，直接これを求めてみよ．

2.5　空間内の原点を通る平面に関する鏡映変換

原点 O を通り，長さ 1 の法線ベクトルが $\boldsymbol{n} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ $(a^2 + b^2 + c^2 = 1)$ で与えられる平面を H とするとき，H に関する対称移動を，平面 H に関する**鏡映変換**という．

平面 H に関する鏡映変換を f とする．このとき，点 P の位置ベクトルを $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ とすれば，$f(\boldsymbol{x})$ が点 P の H に関する対称点 Q の位置ベクトルである．このとき，$\boldsymbol{n}$ と $\overrightarrow{\mathrm{PQ}} = f(\boldsymbol{x}) - \boldsymbol{x}$ は平行であるから

$$f(\boldsymbol{x}) - \boldsymbol{x} = k\boldsymbol{n}$$

となる実数 k が存在する．よって

$$f(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x} + k\boldsymbol{n}$$

と表せる．

また，線分 PQ の中点 M は平面 H 上にあるから，$\overrightarrow{\mathrm{OM}} = \dfrac{f(\boldsymbol{x}) + \boldsymbol{x}}{2}$ と $\boldsymbol{n}$ は垂直であるので

$$0 = \left(\frac{f(\boldsymbol{x}) + \boldsymbol{x}}{2}, \boldsymbol{n} \right) = \left(\frac{2\boldsymbol{x} + k\boldsymbol{n}}{2}, \boldsymbol{n} \right) = (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{n}) + \frac{k}{2}\|\boldsymbol{n}\|^2 = (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{n}) + \frac{k}{2}$$

より，$k = -2\,(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{n})$ となる．

ゆえに

$$f(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x} - 2\,(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{n})\,\boldsymbol{n} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} - 2(ax + by + cz) \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (1 - 2a^2)x - 2aby - 2acz \\ -2abx + (1 - 2b^2)y - 2bcz \\ -2acx - 2bcy + (1 - 2c^2)z \end{pmatrix}$$

となる．したがって，f は行列 $\begin{pmatrix} 1 - 2a^2 & -2ab & -2ac \\ -2ab & 1 - 2b^2 & -2bc \\ -2ac & -2bc & 1 - 2c^2 \end{pmatrix}$ で表される空間の変換である．

3　行列の積の意味

ここまで行列の計算法について説明してきたが，行列の積の意味を振り返ってみる．前の節で見たように，行列をかけることは何らかの変換規則であることを見た．

このように，平面ベクトルを平面ベクトルにうつす規則のうち，行列をかけることで実現できるものを考える．つまり

$$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \qquad A = \begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

とおくとき

$$f(\boldsymbol{x}) = A\boldsymbol{x}, \qquad g(\boldsymbol{x}) = B\boldsymbol{x}$$

という変換について考える．このような変換は前に述べた『回転移動』や『原点を通る直線に関する折り返し』など重要な例を多数含む．

このとき，2 つの変換は具体的には

$$f\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} px + qy \\ rx + sy \end{pmatrix}, \qquad g\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} ax + by \\ cx + dy \end{pmatrix}$$

となる．これらの変換の合成（続けて変換すること）を考えてみると，計算すれば

$$\begin{aligned} (g \circ f)(\boldsymbol{x}) = g\big(f(\boldsymbol{x})\big) = g\left(\begin{pmatrix} px + qy \\ rx + sy \end{pmatrix}\right) \\ = \begin{pmatrix} a(px + qy) + b(rx + sy) \\ c(px + qy) + d(rx + sy) \end{pmatrix} \\ = \begin{pmatrix} (ap + br)x + (ap + bs)y \\ (cp + dr)x + (cq + ds)y \end{pmatrix} \end{aligned}$$

となる．

一方，g と f を表す “行列の積” を考えるならば，合成変換 $g \circ f$ を表す行列 BA は

$$(g \circ f)(\boldsymbol{x}) = (BA)\boldsymbol{x} \quad \cdots \text{①}$$

をみたすものと考えられる．一方，上の成分計算の結果を行列で表せば

$$(g \circ f)(\boldsymbol{x}) = \begin{pmatrix} (ap + br)x + (ap + bs)y \\ (cp + dr)x + (cq + ds)y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ap + br & ap + bs \\ cp + dr & cq + ds \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad \cdots \text{②}$$

である．ここで，① と ② は同じものを計算しているので一致するべきだから

$$BA = \begin{pmatrix} ap + br & ap + bs \\ cp + dr & cq + ds \end{pmatrix}$$

となる．これは定義 3.1 で述べた行列の積の定義そのものである．

ゆえに，行列の積は行列をベクトルをベクトルに写す変換とみたときに，変換の合成と両立するように定義されている．例えば，回転行列についてはきちんと回転操作がみたすべき様々な性質をきちんと表現できている．

しかしそのために，行列の積の定義はやや複雑な形となってしまっている．なおここでは 2 次正方行列について説明したが，一般次数の積の場合も同様である．

この視点からは，変換の合成について $(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f)$ が成り立つから，行列の積で

$$(AB)C = A(BC)$$

が成り立つことは自然である．また，一般に $g \circ f \fallingdotseq f \circ g$ なので，行列の積で $AB \fallingdotseq BA$ となることも自然なことである．

4　数ベクトル空間における線形写像の形

行列によって定められる写像が線形性をもつことは当然だが，逆に線形性をもつ写像とは具体的にはどのようなものなのだろうか．

そこで，次のように線形写像を定め，その形について調べてみる．

定義 4.1. （線形写像）

写像 $f\colon \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ が任意の $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^n$ と任意の $\alpha \in \mathbb{R}$ に対して

$$f(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}) = f(\boldsymbol{x}) + f(\boldsymbol{y}), \qquad f(\alpha\boldsymbol{x}) = \alpha f(\boldsymbol{x})$$

をみたすとき，f を $\mathbb{R}^n$ から $\mathbb{R}^m$ への**線形写像**という．また，この性質を**線形性**という．

特に $m = n$ のときは，$\mathbb{R}^n$ 上の**線形変換**という．

線形写像については，常に $f(\boldsymbol{0}) = \boldsymbol{0}$ が成り立つ．実際

$$f(\boldsymbol{0}) = f(\boldsymbol{0}+\boldsymbol{0}) = f(\boldsymbol{0}) + f(\boldsymbol{0})$$

より，求める結果が得られる．

また，$f\colon \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ が線形性をもつ条件は『任意の $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^n$ と任意の $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ に対して

$$f(\alpha\boldsymbol{x} + \beta\boldsymbol{y}) = \alpha f(\boldsymbol{x}) + \beta f(\boldsymbol{y})$$

が成り立つこと』と 1 つの式で表すこともできる．

まずは線形変換 $f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ の具体例を求めてみる．ここで，f が $\mathbb{R}$ 上の線形変換であることの定義は

$$f(x+y) = f(x) + f(y), \qquad f(cx) = cf(x)$$

がすべての実数 x, y, c に対して成り立つことである．

まず簡単にわかることは，a を定数として

$$f(x) = ax$$

という原点を通る 1 次関数はこの条件をみたす．実際

$$f(x+y) = a(x+y) = ax + ay = f(x) + f(y)$$
$$f(cx) = a(cx) = c(ax) = cf(x)$$

となる．

そこで，他の例を探すために代表的な初等関数を考えてみると

- $f(x) = 2x + 1$ とすると

$$f(x+y) = 2(x+y) + 1 = 2x + 2y + 1$$
$$f(x) + f(y) = (2x+1) + (2y+1) = 2x + 2y + 2$$

- $f(x) = x^2$ とすると

$$f(x+y) = (x+y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$$
$$f(x) + f(y) = x^2 + y^2$$

- $f(x) = e^x$ とすると

$$f(x+y) = e^{x+y} = e^x e^y$$
$$f(x) + f(y) = e^x + e^y$$

- $f(x) = \sin x$ とすると

$$f(x+y) = \sin(x+y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y$$
$$f(x) + f(y) = \sin x + \sin y$$

- $f(x) = \log x$ とすると，$x > 0$ しか代入できないうえに

$$f(x+y) = \log(x+y)$$
$$f(x) + f(y) = \log x + \log y = \log xy$$

のように，2 つある条件のうちの $f(x+y) = f(x) + f(y)$ をみたす例すらなかなか見つからない．実は $\mathbb{R}$ 上の線形変換は，1 次関数の他には存在しないことが知られている．

例題 4.2. （$\mathbb{R}$ 上の線形変換）
線形変換 $f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ で $f(1) = a$ となるものをすべて求めよ．

（解答）　任意の実数 $x \in \mathbb{R}$ に対して，$x = x \cdot 1$ と見れば，線形性の 2 番目の条件より

$$f(x) = f(x \cdot 1) = xf(1) = ax$$

が成り立つ（今回は x がベクトルではなくスカラーであることに注意）．よって，これが線形変換であることはすでに示したから，条件をみたす線形変換は $f(x) = ax$ のみである．

（解答終）

このように $\mathbb{R}$ 上の線形変換は原点を通る 1 次関数しかない．これが “1 次” 変換とも呼ばれる理由である．また，上の解答からわかるように，$f(1)$ の値を指定するだけで $\mathbb{R}$ 上の線形変換はただ 1 つに定まってしまう．“線形変換” という条件を外せば $f(1) = a$ となる関数はいくらでもある（$y = f(x)$ のグラフが点 $(1, a)$ を通ればよいので）から，このことからも線形性をみたすという条件はかなり強いことがわかる．

例題 4.3. （$\mathbb{R}^2$ から $\mathbb{R}^3$ への線形写像）
線形写像 $f\colon \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ で次の条件をみたすものをすべて求めよ．

$$f\left(\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\right)=\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix},\qquad f\left(\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right)=\begin{pmatrix}p\\q\\r\end{pmatrix}$$

（解答）　任意のベクトル $\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^2$ を基本ベクトルを用いて

$$\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=x\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}+y\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}=x\boldsymbol{e}_1+y\boldsymbol{e}_2$$

と表せば，線形性の条件より

$$f(\boldsymbol{x})=f(x\boldsymbol{e}_1+y\boldsymbol{e}_2)=xf(\boldsymbol{e}_1)+yf(\boldsymbol{e}_2)=x\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}+y\begin{pmatrix}p\\q\\r\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}ax+py\\bx+qy\\cx+ry\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a&p\\b&q\\c&r\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$$

が成り立つ．よって，

$$f(\boldsymbol{x})=A\boldsymbol{x},\qquad A=\begin{pmatrix}a&p\\b&q\\c&r\end{pmatrix}$$

のみが条件をみたす線形写像である．

（解答終）

この例でも条件をみたす線形写像は 1 つしかない．また，それは行列 A を用いて表せる線形写像であり，その行列 A は $f(\boldsymbol{e}_1)$ と $f(\boldsymbol{e}_2)$ を並べて得られるものである．

実は数ベクトル空間の間の線形写像はすべて行列を用いて表すことができる．

定理 4.4. （線形写像を表す行列）
$f\colon \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ を線形写像とし，$\mathbb{R}^n$ の基本ベクトル $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \ldots, \boldsymbol{e}_n$ の f による像を

$$f(\boldsymbol{e}_j) = \begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{pmatrix} \qquad (j = 1, 2, \ldots, n)$$

とする．このとき

$$A = \begin{pmatrix} f(\boldsymbol{e}_1) & f(\boldsymbol{e}_2) & \cdots & f(\boldsymbol{e}_n) \end{pmatrix} = (a_{ij})$$

により $m \times n$ 行列 A を定めれば，$f = T_A$ が成り立つ．また，f に対してこのような行列 A はただ 1 つである．この $f = T_A$ となる行列 A を f を表す行列という．

証明． 任意の数ベクトル $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ を

$$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = x_1\boldsymbol{e}_1 + x_2\boldsymbol{e}_2 + \cdots + x_n\boldsymbol{e}_n$$

と基本ベクトルの 1 次結合で表せば，f の線形性から

$$\begin{aligned} f(\boldsymbol{x}) &= f(x_1\boldsymbol{e}_1 + x_2\boldsymbol{e}_2 + \cdots + x_n\boldsymbol{e}_n) \\ &= x_1 f(\boldsymbol{e}_1) + x_2 f(\boldsymbol{e}_2) + \cdots + x_n f(\boldsymbol{e}_n) \\ &= \begin{pmatrix} f(\boldsymbol{e}_1) & f(\boldsymbol{e}_2) & \cdots & f(\boldsymbol{e}_n) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = A\boldsymbol{x} \end{aligned}$$

となる．よって，$f = T_A$ である．

また，$f = T_A = T_B$ とすれば，基本ベクトル $\boldsymbol{e}_i$ に対して

$$f(\boldsymbol{e}_i) = A\boldsymbol{e}_i = B\boldsymbol{e}_i$$

より，A と B の第 i 列が等しくなる．これが $i = 1, 2, \ldots, n$ について成り立つので，$A = B$ が成り立つ．よって，題意をみたす行列は一意的である． □

例 4.5. （零写像・恒等写像）

(1) 任意の $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ に対して $\boldsymbol{0} \in \mathbb{R}^m$ を対応させる写像

$$f\colon \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m, \qquad f(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{0}$$

を表す行列は零行列 $O_{m,n}$ である．この線形写像を**零写像**という．

(2) 各 $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ に $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ を対応させる写像

$$f\colon \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n, \qquad f(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x}$$

を表す行列は n 次単位行列 E_n である．この線形変換を $\mathbb{R}^n$ の**恒等変換**といい，id で表す．

5　線形写像の合成と行列の積

前節までに行列と線形写像が 1 対 1 に対応することをみた．そこで，線形写像に対する演算が行列の演算とどのように対応するのかを調べる．

2 つの線形写像

$$f\colon \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m, \qquad g\colon \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^l$$

があるとする．このとき，$\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ に対して $f(\boldsymbol{x}) \in \mathbb{R}^m$ であるから，$f(\boldsymbol{x})$ を g に代入することができる．そこで，f と g の合成写像を

$$g \circ f\colon \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^l, \qquad (g \circ f)(\boldsymbol{x}) \coloneqq g(f(\boldsymbol{x}))$$

で定める．

定理 5.1.（線形写像の合成）
$f\colon \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$，$g\colon \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^l$ を線形写像とし，さらに $f = T_A$，$g = T_B$ であるとする．このとき，合成写像 $g \circ f\colon \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^l$ を表す行列は BA である．つまり

$$T_B \circ T_A = T_{BA}$$

が成り立つ．

証明.　定義から直接計算すれば

$$(g \circ f)(\boldsymbol{x}) = g\bigl(f(\boldsymbol{x})\bigr) = g(A\boldsymbol{x}) = B(A\boldsymbol{x}) = (BA)\boldsymbol{x} = T_{BA}(\boldsymbol{x})$$

となるから，$g \circ f = T_{BA}$ が成り立つ． □

このように，行列の積と線形写像の合成がうまく対応している．実はこうなるように行列の積を定義したのである．

また，ここでは証明はしないが，次の事実が成り立つ．写像に関する用語や性質は第 9 章で説明するので，その後に見直してみてほしい．簡単に述べると，関数に対する逆関数のように，写像についても逆写像を考えることができる場合がある．その場合に，逆写像と逆行列が対応しているという主張が次の定理である．

定理 5.2.（線形変換の逆写像）
$\mathbb{R}^n$ 上の線形変換 f を表す n 次正方行列を A とする．f が全単射であるための必要十分条件は A が正則行列であることである．このとき，f の逆写像 f^{-1} は逆行列 A^{-1} で表される線形変換である．

6　線形写像に関する計算例

例題 6.1.　行列 $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ で定まる $\mathbb{R}^3$ の線形変換 f を考える．直線

$$l\colon \frac{x-1}{3} = -\frac{y+4}{2} = \frac{z+2}{5}$$

が f により写される図形の方程式を求めよ．

（解答）　直線 l のパラメータ表示は

$$\frac{x-1}{3} = -\frac{y+4}{2} = \frac{z+2}{5} = t$$

とおけば

$$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ -2 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix} \qquad (t \in \mathbb{R})$$

である．よって，f に代入すれば

$$f(\boldsymbol{x}) = A\boldsymbol{x} = A \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ -2 \end{pmatrix} + tA \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix}$$

となる．ここで

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8 \\ 1 \\ -9 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 19 \\ 15 \\ 4 \end{pmatrix}$$

より

$$f(\boldsymbol{x}) = \begin{pmatrix} -8 \\ 1 \\ -9 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 19 \\ 15 \\ 4 \end{pmatrix}$$

である．ゆえに，これは直線であり

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8 \\ 1 \\ -9 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 19 \\ 15 \\ 4 \end{pmatrix}$$

からパラメータ t を消去すれば，直線の方程式は

$$\frac{x+8}{19} = \frac{y-1}{15} = \frac{z+9}{4}$$

である．

（解答終）

例題 6.2. 行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & -4 \\ 3 & 2 & 7 \end{pmatrix}$ で定まる $\mathbb{R}^3$ の線形変換 f を考える．方程式 $y + cz = 0$ で定まる平面が，f によって直線に写るとき，定数 c の値を求めよ．

（解答） 平面 $y + cz = 0$ のパラメータ表示は

$$\boldsymbol{x} = s \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 \\ c \\ -1 \end{pmatrix} \qquad (s, t \in \mathbb{R})$$

なので，f に代入すれば

$$f(\boldsymbol{x}) = A\boldsymbol{x} = sA \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + tA \begin{pmatrix} 0 \\ c \\ -1 \end{pmatrix} = s \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2c-1 \\ c+4 \\ 2c-7 \end{pmatrix}$$

となる．s と t が実数全体を動くときに，これが直線を表すのは

$$\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} /\!/ \begin{pmatrix} 2c-1 \\ c+4 \\ 2c-7 \end{pmatrix}$$

となるときである．よって，ある実数 k が存在して

$$\begin{pmatrix} 2c-1 \\ c+4 \\ 2c-7 \end{pmatrix} = k \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

が成り立つ．ゆえに

$$\begin{cases} 2c - 1 = k & \cdots ① \\ c + 4 = -k & \cdots ② \\ 2c - 7 = 3k & \cdots ③ \end{cases}$$

となる．① と ② より $c = -1,\ k = -3$ であり，これは ③ もみたすから，これが求める値である．したがって，$c = -1$ である．

例題 6.3. 2 次正方行列 A で定まる $\mathbb{R}^2$ の線形変換 f が，点 $(1, 2)$ を $(-4, 3)$ へ，点 $(5, -2)$ を $(0, 1)$ へ写すとする．行列 A を求めよ．

（解答） 与えられた条件を行列とベクトルで表せば

$$A\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-4\\3\end{pmatrix}, \qquad A\begin{pmatrix}5\\-2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$$

となる．これを並べれば

$$A\begin{pmatrix}1&5\\2&-2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-4&0\\3&1\end{pmatrix}$$

が得られるから，$X=\begin{pmatrix}1&5\\2&-2\end{pmatrix}$ とおく．このとき

$$\Delta(X)=-2-10=-12\neq 0$$

より X は正則で

$$X^{-1}=\frac{1}{-12}\begin{pmatrix}-2&-5\\-2&1\end{pmatrix}=\frac{1}{12}\begin{pmatrix}2&5\\2&-1\end{pmatrix}$$

であるから

$$A=\begin{pmatrix}-4&0\\3&1\end{pmatrix}X^{-1}=\begin{pmatrix}-4&0\\3&1\end{pmatrix}\frac{1}{12}\begin{pmatrix}2&5\\2&-1\end{pmatrix}=\frac{1}{6}\begin{pmatrix}-4&-10\\4&7\end{pmatrix}$$

である．

（解答終）

例題 6.4. 原点を O とする座標平面上の点列 $\mathrm{P}_n(x_n, y_n)$ $(n=1,2,3,\ldots)$ を

$$\begin{pmatrix}x_1\\y_1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix}x_{n+1}\\y_{n+1}\end{pmatrix}=\frac{1}{6}\begin{pmatrix}1&-\sqrt{3}\\\sqrt{3}&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_n\\y_n\end{pmatrix} \qquad (n=1,2,3,\ldots)$$

で定める．三角形 $\mathrm{OP}_n\mathrm{P}_{n+1}$ の面積を S_n とするとき，無限級数 $\sum_{n=1}^{\infty} S_n$ の和を求めよ．

（解答） 漸化式に現れる行列は

$$\frac{1}{6}\begin{pmatrix}1&-\sqrt{3}\\\sqrt{3}&1\end{pmatrix}=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}\cos 60^\circ&-\sin 60^\circ\\\sin 60^\circ&\cos 60^\circ\end{pmatrix}$$

なので，$\overrightarrow{\mathrm{OP}_n}$ を 60° 回転して $\dfrac{1}{3}$ 倍したものが $\overrightarrow{\mathrm{OP}_{n+1}}$ である．

よって，線分 OP_n の長さは初項 $\mathrm{OP}_1=1$，公比 $\dfrac{1}{3}$ の等比数列なので，$\mathrm{OP}_n=1\cdot\left(\dfrac{1}{3}\right)^{n-1}=\dfrac{1}{3^{n-1}}$ となる．ゆえに

$$S_n=\frac{1}{2}\cdot\mathrm{OP}_n\cdot\mathrm{OP}_{n+1}\cdot\sin 60^\circ=\frac{\sqrt{2}}{12\cdot 9^{n-1}}$$

である．したがって，$\sum_{n=1}^{\infty} S_n$ は初項 $S_1=\dfrac{\sqrt{2}}{12}$，公比 $\dfrac{1}{9}$ の無限等比級数なので収束し，その和は

$$\sum_{n=1}^{\infty} S_n=\frac{\dfrac{\sqrt{2}}{12}}{1-\dfrac{1}{9}}=\frac{3\sqrt{2}}{32}$$

である．

（解答終）

例題 6.5. 平面における直線 $y=\sqrt{3}x$ に関する対称移動を f，$y=-\sqrt{3}x$ に関する対称移動を g とおく．合成変換 $g\circ f$ は原点を中心とした回転移動であることを示し，回転角を求めよ．

（解答） 対称移動 f を表す行列を A とすると，公式で $m=\sqrt{3}$ として

$$A=\frac{1}{4}\begin{pmatrix}-2 & 2\sqrt{3}\\ 2\sqrt{3} & 2\end{pmatrix}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}-1 & \sqrt{3}\\ \sqrt{3} & 1\end{pmatrix}$$

となる．同様に，対称移動 g を表す行列を B とすると，公式で $m=-\sqrt{3}$ として

$$B=\frac{1}{4}\begin{pmatrix}-2 & -2\sqrt{3}\\ -2\sqrt{3} & 2\end{pmatrix}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}-1 & -\sqrt{3}\\ -\sqrt{3} & 1\end{pmatrix}$$

となる．よって，合成変換 $g\circ f$ を表す行列は

$$BA=\frac{1}{4}\begin{pmatrix}-1 & -\sqrt{3}\\ -\sqrt{3} & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1 & \sqrt{3}\\ \sqrt{3} & 1\end{pmatrix}=\frac{1}{4}\begin{pmatrix}-2 & -2\sqrt{3}\\ 2\sqrt{3} & -2\end{pmatrix}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}-1 & -\sqrt{3}\\ \sqrt{3} & -1\end{pmatrix}=R\left(\frac{2\pi}{3}\right)$$

が成り立つ．ゆえに，$g\circ f$ は原点を中心とした $\theta=\dfrac{2\pi}{3}$ の回転移動である．

（解答終）

例題 6.6. 平面における直線 $y=(\tan\theta)x$ に関する対称移動は，x 軸に関する対称移動をしてから原点中心に 2θ 回転させる変換と等しいことを示せ．

（解答） 直線 $y=(\tan\theta)x$ に関する対称移動を表す行列 A とする．$m=\tan\theta$ とすれば

$$m^2+1=\tan^2\theta+1=\frac{1}{\cos^2\theta}$$

なので，対称移動の公式より

$$\begin{aligned}A=\frac{1}{m^2+1}\begin{pmatrix}1-m^2 & 2m\\ 2m & m^2-1\end{pmatrix}&=\cos^2\theta\begin{pmatrix}1-\tan^2\theta & 2\tan\theta\\ 2\tan\theta & \tan^2\theta-1\end{pmatrix}\\&=\begin{pmatrix}\cos^2\theta-\sin^2\theta & 2\sin\theta\cos\theta\\ 2\sin\theta\cos\theta & \sin^2\theta-\cos^2\theta\end{pmatrix}\\&=\begin{pmatrix}\cos2\theta & \sin2\theta\\ \sin2\theta & -\cos2\theta\end{pmatrix}\\&=\begin{pmatrix}\cos2\theta & -\sin2\theta\\ \sin2\theta & \cos2\theta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}=R(2\theta)J_x\end{aligned}$$

が成り立つ．よって，x 軸に関する対称移動と 2θ の回転を続けた変換は $y=(\tan\theta)x$ に関する対称移動に等しい．

（解答終）

例題 6.7.　$\mathbb{R}^3$ の線形変換 f が $\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}$ を $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}$ に，$\begin{pmatrix} -2 \\ 7 \\ 3 \end{pmatrix}$ を $\begin{pmatrix} 5 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix}$ へ写すとする．

(1) $\begin{pmatrix} 13 \\ -17 \\ 6 \end{pmatrix} = s \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -2 \\ 7 \\ 3 \end{pmatrix}$ となる実数 s と t が存在することを示し，さらに s と t の値を求めよ．

(2) $f\left(\begin{pmatrix} 13 \\ -17 \\ 6 \end{pmatrix}\right)$ を求めよ．

（解答）

(1)　成分を比較して連立方程式を作れば

$$\begin{cases} 13 = 3s - 2t & \cdots ① \\ -17 = -s + 7t & \cdots ② \\ 6 = 4s + 3t & \cdots ③ \end{cases}$$

である．① + ② × 3 より

$$-38 = 19t \qquad \therefore\ t = -2$$

となる．これを ② に代入して

$$s = 7t + 17 = 3$$

である．これらは ③ もみたすので，題意の等式をみたす実数 s と t は存在し

$$s = 3, \quad t = -2$$

である．

(2)　見やすくするために

$$\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} 13 \\ -17 \\ 6 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{u} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} -2 \\ 7 \\ 3 \end{pmatrix}$$

とおくと，(1) の結果より

$$\boldsymbol{a} = 3\boldsymbol{u} - 2\boldsymbol{v}$$

である．よって，f の線形性より

$$\begin{aligned} f(\boldsymbol{a}) &= f(3\boldsymbol{u} - 2\boldsymbol{v}) \\ &= 3f(\boldsymbol{u}) - 2f(\boldsymbol{v}) \\ &= 3\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix} 5 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 11 \\ 13 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

である．

（解答終）

この例題の変換 f について，それを表す行列 A を求めることはできない．しかし，1 次変換 f の線形性を利用すれば，このように限定された条件からでも値を計算できることがある．

例題 6.8.　a, b, c を実数とし，$A = \begin{pmatrix} a & 1 \\ b & c \end{pmatrix}$ とする．行列 A で表される原点 O の座標平面上の線形変換 f が以下の 2 条件

- 点 $(1, 2)$ を点 $(1, 2)$ に写る．
- 点 $(1, 0)$ と点 $(0, 1)$ が f によってそれぞれ点 A と B に写るとき，三角形 OAB の面積が $\dfrac{1}{2}$ である．

をみたすとき，a, b, c の値を求めよ．

（解答）　まず 1 個目の条件より

$$f\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}\right) = A\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 1 \\ b & c \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+2 \\ b+2c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

なので

$$a = -1, \qquad b + 2c = 2$$

である．

　また，2 点 A と B の座標を求めると

$$f\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = A\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ b & c \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ b \end{pmatrix}$$

$$f\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = A\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ b & c \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ c \end{pmatrix}$$

より，$\mathrm{A}(-1, b),\ \mathrm{B}(1, c)$ となる．よって，2 個目の条件より

$$\triangle\mathrm{OAB} = \frac{1}{2}|\,(-1)c - b \cdot 1\,| = \frac{|\,b + c\,|}{2} = \frac{1}{2}$$

から

$$|\,b + c\,| = 1$$

となる．ゆえに，$b = 2 - 2c$ を代入すれば

$$|\,2 - c\,| = 1$$

より，$c = 1, 3$ である．このとき，それぞれ $b = 0, -4$ であるから，求める値は

$$(a, b, c) = (-1, 0, 1),\ (-1, -4, 3)$$

である．

（解答終）

例題 6.9.　a を実数の定数とする．

$$\begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 5 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

をみたす点 (x, y) の描く図形が直線であるとき，a の値とその直線の方程式を求めよ．

（解答）　$A = \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 5 & 4 \end{pmatrix}$ とおくと，関係式は

$$(A - aE) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

と表せる．ここで，$A - aE$ が正則であると仮定すると，両辺左から $(A - aE)^{-1}$ をかければ $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ となる．このとき，点 (x, y) の描く図形は原点のみであり，直線を表さないから不適である．

よって

$$A - aE = \begin{pmatrix} -2 - a & -1 \\ 5 & 4 - a \end{pmatrix}$$

は正則でないから

$$\varDelta(A - aE) = (-2 - a)(4 - a) + 5 = a^2 - 2a - 3 = (a - 3)(a + 1) = 0$$

より，$a = 3, -1$ となることが必要である．

$a = 3$ のとき，関係式は

$$(A - 3E) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 & -1 \\ 5 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5x - y \\ 5x + y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

より，確かにこれは直線 $y = -5x$ を表している．

$a = -1$ のとき，関係式は

$$(A + E) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 5 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x - y \\ 5x + 5y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

より，確かにこれは直線 $y = -x$ を表している．

したがって，$a = 3$ のとき直線 $y = -5x$，$a = -1$ のとき直線 $y = -x$ となる．

（解答終）

例題 6.10. $A = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 & -\sqrt{3} \\ \sqrt{3} & -1 \end{pmatrix}$ とおく．

(1) A^3 を求めよ．

(2) $E + A + A^2 + \cdots + A^{2020}$ を求めよ．

（解答）

(1) A は

$$A = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 & -\sqrt{3} \\ \sqrt{3} & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos 120^\circ & -\sin 120^\circ \\ \sin 120^\circ & \cos 120^\circ \end{pmatrix}$$

より，120° の回転行列である．よって

$$A^3 = R(120^\circ)^3 = R(360^\circ) = \begin{pmatrix} \cos 360^\circ & -\sin 360^\circ \\ \sin 360^\circ & \cos 360^\circ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = E$$

となる．

(2) (1) より $A^3 = E$ なので，自然数 k に対して

$$A^{3k} + A^{3k+1} + A^{3k+2} = (A^3)^k(E + A + A^2) = E + A + A^2$$

である．さらに，ケーリー・ハミルトンの定理より

$$A^2 + A + E = O$$

であるから

$$A^{3k} + A^{3k+1} + A^{3k+2} = O$$

が成り立つ．よって，$2018 = 3 \cdot 672 + 2$ より

$$\begin{aligned} E + A + A^2 + \cdots + A^{2020} &= \sum_{k=0}^{672}(A^{3k} + A^{3k+1} + A^{3k+2}) + A^{2019} + A^{2020} \\ &= O + E + A = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & \sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

である．

（解答終）

例題 6.11. θ を $\cos\theta \fallingdotseq 1$ をみたす実数とし，回転行列を $A = R(\theta)$ とおく．

(1) 自然数 n に対して

$$(E-A)(E+A+A^2+\cdots+A^n)$$

を θ と n で表せ．

(2) $E-A$ は正則であることを示し，逆行列 $(E-A)^{-1}$ を求めよ．

(3) 自然数 n に対して，次の等式が成り立つことを示せ．

$$\sum_{k=1}^{n} \sin k\theta = \frac{\sin\theta + \sin n\theta - \sin(n+1)\theta}{2(1-\cos\theta)}$$

（解答）

(1) 積を展開すれば

$$(E-A)(E+A+A^2+\cdots+A^n) = E - A^{n+1}$$

であり，回転行列の性質より

$$A^{n+1} = R(\theta)^{n+1} = R((n+1)\theta)$$

なので

$$(E-A)(E+A+A^2+\cdots+A^n) = E - A^{n+1} = \begin{pmatrix} 1-\cos(n+1)\theta & \sin(n+1)\theta \\ -\sin(n+1)\theta & 1-\cos(n+1)\theta \end{pmatrix}$$

(2) $E - A = \begin{pmatrix} 1-\cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & 1-\cos\theta \end{pmatrix}$ なので，$\cos\theta \fallingdotseq 1$ より

$$\Delta(E-A) = (1-\cos\theta)^2 + \sin^2\theta = 2 - 2\cos\theta \fallingdotseq 0$$

となる．よって，$E-A$ は正則で

$$(E-A)^{-1} = \frac{1}{2(1-\cos\theta)} \begin{pmatrix} 1-\cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & 1-\cos\theta \end{pmatrix}$$

(3) (1) と (2) の結果より

$$\begin{aligned} E+A+A^2+\cdots+A^n &= (E-A)^{-1}(E-A^{n+1}) \\ &= \frac{1}{2(1-\cos\theta)} \begin{pmatrix} 1-\cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & 1-\cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1-\cos(n+1)\theta & \sin(n+1)\theta \\ -\sin(n+1)\theta & 1-\cos(n+1)\theta \end{pmatrix} \end{aligned}$$

となる．そこで，この両辺の $(2,1)$ 成分に着目する．$A^k = R(k\theta) = \begin{pmatrix} \cos k\theta & -\sin k\theta \\ \sin k\theta & \cos k\theta \end{pmatrix}$ より，左辺の $(2,1)$ 成分は

$$0 + \sin\theta + \sin 2\theta + \cdots + \sin n\theta = \sum_{k=1}^{n} \sin k\theta$$

である．右辺の $(2,1)$ 成分については，積を計算して加法定理を用いれば

$$\frac{\sin\theta - \sin(n+1)\theta + \sin(n+1)\theta\cos\theta - \cos(n+1)\theta\sin\theta}{2(1-\cos\theta)} = \frac{\sin\theta - \sin(n+1)\theta + \sin n\theta}{2(1-\cos\theta)}$$

となる．ゆえに，求める等式が成り立つ．

（解答終）

第 4 章　行列の基本変形と階数

1　基本行列と行列の基本変形

行列の計算において，重要な役割を果たす基本行列と呼ばれるものを紹介する．

定義 1.1. （基本行列）
E_n を n 次単位行列とする．

(1) E_n の第 i 行に第 j 行を c 倍したものを加えて得られる行列を $P_n(i,j;c)$ とする．

(2) E_n の第 i 行を c $(\neq 0)$ 倍した行列を $Q_n(i;c)$ とする．

(3) E_n の第 i 行と第 j 行を入れ替えた行列を $R_n(i,j)$ とする．

これらの行列を n 次基本行列という．

教科書によって基本行列の記号は違うので注意すること．また，記号の定義より

$$P_n(i,j;0) = E_n, \qquad Q_n(i;1) = E_n$$

である．

例 1.2.　$n=3$ のときの基本行列の例を挙げる．単位行列から変わったところを赤字で強調してある．

$$P_3(1,2;3) = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad Q_3(1;2) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad R_3(2,3) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$P_3(3,1;-4) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -4 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad Q_3(3;4) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}, \quad R_3(1,3) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$n=4$ のときの基本行列の例を挙げる．単位行列から変わったところを赤字で強調してある．

$$P_4(1,3;2) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad Q_4(2;-3) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad R_4(2,3) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$P_4(4,2;1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad Q_4(4;2) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad R_4(1,3) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

基本行列は特徴的な形なので，積について次のようになる．

定理 1.3. （基本行列との積）
A を $m \times n$ 行列とする．このとき，次が成り立つ．

(1) $P_m(i,j;c)A$ は A の第 j 行を c 倍したものを第 i 行に加えて得られる行列

(2) $Q_m(i;c)A$ は A の第 i 行を c 倍して得られる行列

(3) $R_m(i,j)A$ は A の第 i 行と第 j 行を入れ替えて得られる行列

(4) $AP_n(i,j;c)$ は A の第 i 列を c 倍したものを第 j 列に加えて得られる行列

(5) $AQ_n(i;c)$ は A の第 i 列を c 倍して得られる行列

(6) $AR_n(i,j)$ は A の第 i 列と第 j 列を入れ替えて得られる行列

行列 A の成分を設定することで一般の証明を述べることはできるが，抽象的で複雑になってしまう．そのため，具体的な場合を説明することで済ませることにする．抽象的な議論に慣れている学生は，各自で一般の場合の証明も試みてみよ．

例 1.4. 3 次正方行列

$$A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$$

に対して，左右から基本行列をかけることで A がどのように変化するかを見てみる．

(1) A に $P_3(1,2;4)$ を左からかければ

$$P_3(1,2;4)A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+4d & b+4e & c+4f \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$$

となり，A の第 2 行を 4 倍したものを第 1 行に加えた行列となる．

(2) A に $Q_3(3;4)$ を左からかければ

$$Q_3(3;4)A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ 4g & 4h & 4i \end{pmatrix}$$

となり，A の第 3 行を 4 倍した行列となる．

(3) A に $R_3(2,3)$ を左からかければ

$$R_3(2,3)A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b & c \\ g & h & i \\ d & e & f \end{pmatrix}$$

となり，A の第 2 行と第 3 行を入れ替えた行列となる．

(4) A に $P_3(1,2;4)$ を右からかければ

$$AP_3(1,2;4) = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b+4a & c \\ d & e+4d & f \\ g & h+4g & i \end{pmatrix}$$

となり，A の第 1 列を 4 倍したものを第 2 列に加えた行列となる．

(5) A に $Q_3(3;4)$ を右からかければ

$$AQ_3(3;4) = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b & 4c \\ d & e & 4f \\ g & h & 4i \end{pmatrix}$$

となり，A の第 3 列を 4 倍した行列となる．

(6) A に $R_3(2,3)$ を右からかければ

$$AR_3(2,3) = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & c & b \\ d & f & e \\ g & i & h \end{pmatrix}$$

となり，A の第 2 列と第 3 列を入れ替えた行列となる．

このように，基本行列をかければ，ある決まったルールで行列が変形されることがわかる．

定理 1.3 より，基本行列をかけることは元の行列に対して何らかの操作を行うことと対応している．基本行列をかけることで実現できる操作を**行列の基本変形**と呼び，以下のように定める．

定義 1.5. （行基本変形）

行列に対して，基本行列を左からかけることに対応する次の 3 つの変形を**行基本変形**という．

- ある行をスカラー倍したものを他の行に加える．
- ある行に 0 でないスカラーをかける．
- 2 つの行を入れ替える．

定義 1.6. （列基本変形）

行列に対して，基本行列を右からかけることに対応する次の 3 つの変形を**列基本変形**という．

- ある列をスカラー倍したものを他の列に加える．
- ある列に 0 でないスカラーをかける．
- 2 つの列を入れ替える．

行列に対して，行ベクトル（横ベクトル）を 1 つのかたまりとして変形していくものが行基本変形であり，列ベクトル（縦ベクトル）を 1 つのかたまりとして変形していくものが列基本変形である．次章以降では，行列を応用する問題においてこの 2 つの基本変形を適切に使い分けていく必要がある．

例題 1.7.　3×4 行列を

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{pmatrix}$$

とおく．次の行列を具体的に計算し，A をどのように基本変形したものか答えよ．

(1) $P_3(2,1;3)A$　　(2) $AR_4(2,4)$　　(3) $Q_3(3;2)A$　　(4) $AP_4(4,3;2)$

（解答）

(1)　積を計算すれば

$$P_3(2,1;3)A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} + 3a_{11} & a_{22} + 3a_{12} & a_{23} + 3a_{13} & a_{24} + 3a_{14} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{pmatrix}$$

となるから，A の第 1 行の 3 倍を第 2 行に加えた行列になる．

(2)　積を計算すれば

$$AR_4(2,4) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{14} & a_{13} & a_{12} \\ a_{21} & a_{24} & a_{23} & a_{22} \\ a_{31} & a_{34} & a_{33} & a_{32} \end{pmatrix}$$

となるから，A の第 2 列と第 4 列を入れ替えた行列になる．

(3)　積を計算すれば

$$Q_3(3;2)A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ 2a_{31} & 2a_{32} & 2a_{33} & 2a_{34} \end{pmatrix}$$

となるから，A の第 3 行を 2 倍した行列になる．

(4)　積を計算すれば

$$AP_4(4,3;2) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} + 2a_{14} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} + 2a_{24} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} + 2a_{34} & a_{34} \end{pmatrix}$$

となるから，A の第 4 列の 2 倍を第 3 列に加えた行列になる．

（解答終）

例題 1.8.　3×4 行列 A を次のように基本変形するには，どの基本行列を左右どちらからかければよいか答えよ．P, Q, R などの記号を用いた表記ではなく，成分で表した具体的な行列の形で答えること．

(1) A の第 3 行の -1 倍を第 1 行に加える

(2) A の第 4 列の 3 倍を第 2 列に加える

(3) A の第 1 列を 5 倍する

(4) A の第 1 行と第 2 行を入れ替える

(5) A の第 3 行を 2 倍する

(6) A の第 1 列と第 4 列を入れ替える

（解答）

(1) $P_3(1,3;-1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ を A に左からかければよい．

(2) $P_4(4,2;3) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ を A に右からかければよい．

(3) $Q_4(1;5) = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ を A に右からかければよい．

(4) $R_3(1,2) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ を A に左からかければよい．

(5) $Q_3(3;2) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ を A に左からかければよい．

(6) $R_4(1,4) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ を A に右からかければよい．

（解答終）

定理 1.9. （基本行列の性質）
　基本行列の積と転置について，以下が成り立つ．

(1) $P_n(i,j;c)P_n(i,j;d) = P_n(i,j;c+d)$

(2) $Q_n(i;c)Q_n(i;d) = Q_n(i;cd)$

(3) $R_n(i,j)^2 = E_n$

(4) ${}^tP_n(i,j;c) = P_n(j,i;c)$, ${}^tQ_n(i;c) = Q_n(i;c)$, ${}^tR_n(i,j) = R_n(i,j)$

よって，基本行列は正則であり，基本行列の逆行列も基本行列である．

証明. 　行列の積を直接考えても示せるが，対応する行基本変形に着目した証明を述べる．

(1) $P_n(i,j;c)P_n(i,j;d)$ は $P_n(i,j;d)$ の第 j 行を c 倍したものを第 i 行に加えることに対応するので
$$P_n(i,j;c)P_n(i,j;d) = P_n(i,j;c+d)$$

(2) $Q_n(i;c)Q_n(i;d)$ は $Q_n(i;d)$ の第 i 行を c 倍することに対応するので
$$Q_n(i;c)Q_n(i;d) = Q_n(i;cd)$$

(3) $R_n(i,j)$ を左からかけることは第 i 行と第 j 行の入れ替えに対応するから，2 回入れ替えると元に戻るので
$$R_n(i,j)R_n(i,j) = E_n$$

(4) $P_n(i,j;c)$ は対角成分が 1 で (i,j) 成分が c，その他の成分は 0 であるから，${}^tP_n(i,j;c) = P_n(j,i;c)$ となる．また，$Q_n(i;c)$ は対角行列なので，${}^tQ_n(i;c) = Q_n(i;c)$ である．さらに，$R_n(i,j)$ は対称行列なので，${}^tR_n(i,j) = R_n(i,j)$ が成り立つ．

　次に基本行列の正則性を調べる．まず
$$P_n(i,j;c)P_n(i,j;-c) = P_n(i,j;0) = E_n, \qquad P_n(i,j;-c)P_n(i,j;c) = P_n(i,j;0) = E_n$$
より，$P_n(i,j;c)$ は正則で
$$P_n(i,j;c)^{-1} = P_n(i,j;-c)$$
が成り立つ．また
$$Q_n(i;c)Q_n(i;c^{-1}) = Q_n(i;1) = E_n, \qquad Q_n(i;c^{-1})Q_n(i;c) = Q_n(i;1) = E_n$$
より，$Q_n(i;c)$ は正則で
$$Q_n(i;c)^{-1} = Q_n(i;c^{-1})$$
が成り立つ．さらに
$$R_n(i,j)^2 = E_n$$
より，$R_n(i,j)$ は正則で
$$R_n(i,j)^{-1} = R_n(i,j)$$
が成り立つ．したがって，基本行列は正則で，その逆行列も基本行列となる． □

2　行列の階数

2.1　階段行列と階数

ここでは次のような特別な形の行列を考える．

定義 2.1. （**階段行列, echelon form**）
$m \times n$ 行列 $A = (a_{ij})$ を零行列ではないとする． このとき，A がある自然数 r に対して次の条件

- 第 1 行ベクトルから第 r 行ベクトルまですべて零ベクトルではない．
- もし $r < m$ ならば，第 $r+1$ 行より下の行ベクトルはすべて零ベクトルである．
- $1 \leqq i \leqq r$ に対して，第 i 行ベクトルの成分を左から見ていき，最初の 0 でない成分がある列を第 $j(i)$ 列とおけば，$j(1) < j(2) < \cdots < j(r)$ が成り立つ．

をみたすとき**階段行列**であるという．また，r を階段行列の階数といい，$r = \mathrm{rank}\, A$ で表す．
なお，零行列 O も階数 0 の階段行列とみなすことにする．

例 2.2. 　階段行列の定義を文章で書き表すと難しいものとなる．ただし，まずは以下の例を通してどのようなものか理解できれば十分である．

- 次の行列はすべて階数 3 の階段行列である．

$$\begin{pmatrix} 1 & 6 & 0 \\ 0 & -4 & 3 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 5 \\ 0 & 2 & -1 & -4 \\ 0 & 0 & 4 & 3 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & -3 & -4 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & -5 \end{pmatrix}$$

- 次の行列はすべて階数 2 の階段行列である．

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 & 4 \\ 0 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 3 & 0 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & -7 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 3 & 4 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- 次の行列はすべて階数 1 の階段行列である．

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

階段行列の定義と照らし合わせて，階段行列の定義や階数の意味を確認すること．

一般の行列 A に対しては，階段行列のように階段状には成分が並んでいない．そこで，行列の基本変形により階段行列へ変形することを考える．

行列に対して，基本変形で 0 を増やす操作を次のように呼ぶ．

定義 2.3. （行基本変形による掃き出し）
行列 $A=(a_{ij})$ の (k,l) 成分 a_{kl} が 0 でないとする．

(1) A の第 k 行と異なる第 i 行に，第 k 行を $-\dfrac{a_{il}}{a_{kl}}$ 倍したものを加えることにより第 l 列の (k,l) 成分以外をすべて 0 にするという操作を，(k,l) 成分に関して第 l 列を**掃き出す**という．

(2) A の第 l 列と異なる第 j 列に，第 l 列を $-\dfrac{a_{kj}}{a_{kl}}$ 倍したものを加えることにより第 k 行の (k,l) 成分以外をすべて 0 にするという操作を，(k,l) 成分に関して第 k 行を**掃き出す**という．

例 2.4. 行列 $A=\begin{pmatrix}1&2&0&4\\-1&0&-3&7\\2&1&4&-2\end{pmatrix}$ について

(1) $(1,1)$ 成分について第 1 列を掃き出してみる．そのために第 2 行に第 1 行を加え，第 3 行に第 1 行の -2 倍を加えれば

$$A\longmapsto\begin{pmatrix}1&2&0&4\\0&2&-3&11\\0&-3&4&-10\end{pmatrix}$$

(2) $(2,1)$ 成分について第 1 列を掃き出してみる．そのために第 1 行に第 2 行を加え，第 3 行に第 2 行の 2 倍を加えれば

$$A\longmapsto\begin{pmatrix}0&2&-3&11\\-1&0&-3&7\\0&1&-2&12\end{pmatrix}$$

(3) $(3,2)$ 成分について第 2 列を掃き出すと

$$A\longmapsto\begin{pmatrix}-3&0&-8&8\\-1&0&-3&7\\2&1&4&-2\end{pmatrix}$$

(4) $(1,1)$ 成分について第 1 行を掃き出してみる．そのために第 2 列に第 1 列の -2 倍を加え，第 4 列に第 1 列の -4 倍を加えれば

$$A\longmapsto\begin{pmatrix}1&0&0&0\\-1&2&-3&11\\2&-3&4&-10\end{pmatrix}$$

注意 2.5. 行列に対して基本変形を行った場合，もちろん行列は変化するので**イコールでつなぐことはできない**．上のように基本変形の前後の行列を矢印でつなぎ基本変形の説明を簡単に書くことが普通である．基本変形を説明を書かずに矢印のみでつないでいくことは推奨しない．検算の際にどのような操作を行ったか思い出すのに苦労するし，他人が読んでわかる説明として成立していないため試験では減点される．
ただし，毎回上のように文章で基本変形の説明を丁寧に書く必要はないので，後の例題の解答を参考にすること．

定理 2.6. （行基本変形による階段行列への変形）
行列 A は行基本変形を繰り返すことにより，階段行列にすることができる．

証明. $A=O$ のときは明らかなので，$A \neq O$ とし，A の行の数を m とする．

$m=1$ のときはすでに A は階段行列である．$m=k$ のときに行基本変形で階段行列に変形できると仮定する．A の行の数を $m=k+1$ とする．A の列を第 1 列目から順に見て初めて $\mathbf{0}$ でない列を第 q 列とする．この列には 0 でない成分 a_{pq} があるので，(p,q) 成分に関して第 q 列を掃き出すことができる．さらに，第 1 行と第 p 行を入れ替えれば，A を行基本変形により次の形の行列

$$A \longmapsto B_1 = \left(\begin{array}{cccc|c} 0 & \cdots & 0 & a_{pq} & * \\ \hline 0 & \cdots & 0 & 0 & \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & A_1 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \end{array}\right)$$

と変形できる．このとき，A_1 は行の数が k の行列である．

よって，数学的帰納法の仮定より，A_1 を行基本変形して階段行列 A_2 に変形できる．ここで，B_1 の第 2 行より下の行を行基本変形することは，A_1 を行基本変形する操作と同じであり，第 q 列から左の成分は 0 のままである．ゆえに，B_1 は行基本変形により

$$A \longmapsto B_1 \longmapsto B_2 = \left(\begin{array}{cccc|c} 0 & \cdots & 0 & a_{pq} & * \\ \hline 0 & \cdots & 0 & 0 & \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & A_2 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \end{array}\right)$$

とできるから，A_2 は階段行列なので，B_2 も階段行列となる．したがって，$m=k+1$ のときも成り立つ． □

注意 2.7. 行列 A を行基本変形により階段行列に変形する際，どのように行基本変形するかによって得られる階段行列は異なる．しかし，得られた階段行列の 0 でない行ベクトルの数は一定であることが知られている．

定義 2.8. （階数）
行列 A を行基本変形して得られる階段行列の零ベクトルではない行ベクトルの数を A の**階数**といい，$\operatorname{rank} A$ で表す．

定理 2.6 の証明より，行列を階段行列に変形するには以下のようにすればよい．例えば

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ -2 & 4 & 1 & 5 \\ 1 & 1 & 3 & -2 \end{pmatrix}$$

を変形するときは，まず第 1 列を掃き出す．その際にはなるべく成分が 1 のものを利用する．ここでは $(1, 1)$ 成分で第 1 列を掃き出して

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ -2 & 4 & 1 & 5 \\ 1 & 1 & 3 & -2 \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 8 & 1 & 7 \\ 0 & -1 & 3 & -3 \end{pmatrix}$$

次に第 2 列を階段にするために，成分が 8 よりも -1 の方が簡単なので，行を入れ替えてから第 2 列の成分で $(3, 2)$ 成分を 0 となるように変形すると

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 8 & 1 & 7 \\ 0 & -1 & 3 & -3 \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 3 & -3 \\ 0 & 8 & 1 & 7 \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & 25 & -17 \end{pmatrix}$$

とできる．

A を行基本変形して得られる階段行列は，変形の方法によって異なる．よって，上の階数の定義はその部分が不明瞭であるが，後で述べる簡約階段行列の階数と一致することが知られている．そのため，行基本変形の結果得られる階段行列が異なっても，階数は同じである．

例 2.9. 例えば，ここまでに挙げた階段行列の階数は

$$\operatorname{rank}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 5 \\ 0 & 2 & -1 & -4 \\ 0 & 0 & 4 & 3 \end{pmatrix} = 3, \qquad \operatorname{rank}\begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & -3 & -4 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = 3$$

$$\operatorname{rank}\begin{pmatrix} 3 & 0 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 2, \qquad \operatorname{rank}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 1$$

である．

例題 2.10. 次の行列の階数を求めよ．

(1) $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ -2 & 3 & -2 & 3 \end{pmatrix}$ (2) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 2 & 5 & -1 & 5 \\ 0 & -3 & 3 & 7 \\ -1 & -3 & 1 & -2 \end{pmatrix}$

（解答）

(1) 階段行列へ行基本変形すれば

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ -2 & 3 & -2 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 1 列の掃き出し}]{\text{(1,1) 成分による}} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[\text{入れ替え}]{\text{第 2 行と第 3 行の}} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & -1 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[\text{第 4 行に加える}]{\text{第 2 行を}} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & -1 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{\text{第 4 行に第 3 行を加える}} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & -5 \end{pmatrix}$$

となる．よって，階数は 4 である．

(2) 階段行列へ行基本変形すれば

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 2 & 5 & -1 & 5 \\ 0 & -3 & 3 & 7 \\ -1 & -3 & 1 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 1 列の掃き出し}]{\text{(1,1) 成分による}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & -3 & 3 & 7 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[\text{第 2 行を第 4 行に加える}]{\text{第 2 行の 3 倍を第 3 行に}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

となる．よって，階数は 3 である．

（解答終）

行列の成分に文字式がある場合には，階数を求める際に適切に場合分けしなければならない．

例題 2.11． a を実数とする．行列

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & a+16 \\ 1 & 3 & a+12 \\ -1 & -2 & -3 \end{pmatrix}$$

の階数を求めよ．

（解答） A を階段行列に行基本変形すれば

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & a+16 \\ 1 & 3 & a+12 \\ -1 & -2 & -3 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 1 列の掃き出し}]{(3,1)\text{ 成分による}} \begin{pmatrix} 0 & 0 & a+10 \\ 0 & 1 & a+9 \\ -1 & -2 & -3 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[\text{入れ替え}]{\text{第 1 行と第 3 行の}} \begin{pmatrix} -1 & -2 & -3 \\ 0 & 1 & a+9 \\ 0 & 0 & a+10 \end{pmatrix} \qquad \cdots (*)$$

となる．よって

(i) $a \fallingdotseq -10$ のとき，$(3,3)$ 成分が 0 でないから，$\operatorname{rank} A = 3$ である．

(ii) $a = -10$ のとき

$$(*) = \begin{pmatrix} -1 & -2 & -3 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

となるから，$\operatorname{rank} A = 2$ である．

（解答終）

成分に文字式を含む場合には，行基本変形や掃き出しの際に分母が 0 とならないように気を付けること．また，ある行を 0 倍することもできないので，文字式を行にかける場合には注意すること．例えば

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & a+16 \\ 1 & 3 & a+12 \\ -1 & -2 & -3 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{第 3 行を } a \text{ 倍}} \begin{pmatrix} 2 & 4 & a+16 \\ 1 & 3 & a+12 \\ -a & -2a & -3a \end{pmatrix}$$

という操作は**無条件にはできない**．実際，もし $a = 0$ だとこの操作は

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 16 \\ 1 & 3 & 12 \\ -1 & -2 & -3 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{第 3 行を 0 倍}} \begin{pmatrix} 2 & 4 & 16 \\ 1 & 3 & 12 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

となってしまう．0 倍してよければ，すべての行に 0 を掛ければ 0 段になって終わりなので，当然このような 0 倍という操作は許されない．忘れていれば基本変形の章を見直すこと．もしどうしてもある行を a 倍して考えたければ，必ず $a \fallingdotseq 0$ と $a = 0$ で場合分けをしなければならない．

一方，**掃き出しの際にある行の文字式倍を別の行に加えるのは，文字式が 0 であっても結果的に何もしていないことになるので問題ない**．次の例題の解説とよく見比べてみてほしい．

このような問題では文字を含まない行を利用して計算することがミスをしにくいとは思うが，あまりそれにこだわらず計算しやすいところで階段を作っていくのがよいかもしれない．

例題 2.12. a を実数とする．行列

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a & a \\ a & 1 & a \\ a & a & 1 \end{pmatrix}$$

の階数を求めよ．

（解答） A を階段行列に行基本変形すれば

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a & a \\ a & 1 & a \\ a & a & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 1 列の掃き出し}]{\text{(1,1) 成分による}} \begin{pmatrix} 1 & a & a \\ 0 & 1-a^2 & a-a^2 \\ 0 & a-a^2 & 1-a^2 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[\text{第 2 行に加える}]{\text{第 3 行の } (-1) \text{ 倍を}} \begin{pmatrix} 1 & a & a \\ 0 & 1-a & a-1 \\ 0 & a-a^2 & 1-a^2 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[\text{第 3 行に加える}]{\text{第 2 行の } (-a) \text{ 倍を}} \begin{pmatrix} 1 & a & a \\ 0 & 1-a & a-1 \\ 0 & 0 & (1+2a)(1-a) \end{pmatrix} \qquad \cdots (*)$$

となる．よって

(i) $a \fallingdotseq 1, -\dfrac{1}{2}$ のとき，$(*)$ の対角成分がすべて 0 でないから，$\mathrm{rank}\, A = 3$ である．

(ii) $a = -\dfrac{1}{2}$ のとき

$$(*) = \begin{pmatrix} 1 & -1/2 & -1/2 \\ 0 & 3/2 & -3/2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

となるから，$\mathrm{rank}\, A = 2$ である．

(iii) $a = 1$ のとき

$$(*) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

となるから，$\mathrm{rank}\, A = 1$ である．

（解答終）

前の例題の解説で述べたが

$$\begin{pmatrix} 1 & a & a \\ 0 & 1-a & a-1 \\ 0 & a-a^2 & 1-a^2 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 3 行に加える}]{\text{第 2 行の } (-a) \text{ 倍を}} \begin{pmatrix} 1 & a & a \\ 0 & 1-a & a-1 \\ 0 & 0 & (1+2a)(1-a) \end{pmatrix}$$

という操作は $a = 0$ の場合でも問題ない．実際，$a = 0$ のときは

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 3 行に加える}]{\text{第 2 行の 0 倍を}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

となり，何もしていないことになっている．前の例題の解説とよく見比べて，違いを理解しておくこと．

2.2 簡約階段行列

定義 2.13. (簡約階段行列, reduced echelon form)
$S = (s_{ij})$ を階段行列とする．S の第 i 行ベクトル $(i = 1, 2, \ldots, \operatorname{rank} S)$ について，左から見て最初の 0 でない成分がある列を第 $j(i)$ 列とする．S の第 $j(i)$ 列において $(i, j(i))$ 成分 $s_{i,j(i)}$ が 1，それ以外の成分 $s_{k,j(i)}$ $(k \neq i)$ がすべて 0 となっているとき，S を**簡約階段行列**または**簡約な行列**という

文章で書くと定義は難しいが，簡約階段行列とは『段差が増えている列が基本ベクトルであるような階段行列』のことである．以下で挙げる例を見て理解に努めること．

例 2.14. 例 2.10(2) の行列について，階段行列にした後にも行基本変形を続けると

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 2 & 5 & -1 & 5 \\ 0 & -3 & 3 & 7 \\ -1 & -3 & 1 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{例 2.10(2)}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[\text{第 3 行を 1/4 倍}]{\text{第 2 行の } (-2) \text{ 倍を第 1 行に加える}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[\text{第 4 列の掃き出し}]{\text{(3,4) 成分による}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

と簡約階段行列に変形できる．

定理 2.15. (行基本変形による簡約階段行列への変形)
行列 A は行基本変形により，簡約階段行列に変形できる．

証明. A を行基本変形により階段行列 $S = (s_{ij})$ に変形する．S の零ベクトルではない第 i 行ベクトル $(i = 1, 2, \ldots, \operatorname{rank} S)$ を左から見て，最初の 0 でない成分がある列を第 $j(i)$ 列とする．

このとき，第 i 行ベクトルに $s_{i,j(i)}^{-1}$ をかけることにより，S の第 $(i, j(i))$ 成分を 1 とすることができる．後は，この $(i, j(i))$ 成分で第 $j(i)$ 列を掃き出せば，簡約階段行列が得られる．

よって，行基本変形により簡約階段行列に変形することができる． □

注意 2.16. 行列 A の行基本変形により得られる簡約階段行列は一意的である．また，階数が n であるような $n \times n$ 簡約階段行列はすべての行で段差が増えなければならないから

$$\left.\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \right\} n$$

となるので，これは n 次単位行列 E_n である．この事実は後で重要となる．

例題 2.17. 次の行列を行基本変形により簡約階段行列に変形せよ．

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & -1 & 5 \\ -1 & -2 & 2 & -7 \end{pmatrix}$$

（解答）

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & -1 & 5 \\ -1 & -2 & 2 & -7 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{入れ替え}]{\text{第 1 行と第 2 行の}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 5 \\ 2 & 4 & 1 & 4 \\ -1 & -2 & 2 & -7 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[\text{第 1 列の掃き出し}]{\text{(1,1) 成分による}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 5 \\ 0 & 0 & 3 & -6 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[\text{第 3 列の掃き出し}]{\text{(3,3) 成分による}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{\text{第 2 行と第 3 行の交換}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

（解答終）

簡約階段行列への変形の過程は何通りもあるが，得られる簡約階段行列は同じになる．

（別解）

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & -1 & 5 \\ -1 & -2 & 2 & -7 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{第 1 行を 1/2 倍}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1/2 & 2 \\ 1 & 2 & -1 & 5 \\ -1 & -2 & 2 & -7 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[\text{第 1 列の掃き出し}]{\text{(1,1) 成分による}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1/2 & 2 \\ 0 & 0 & -3/2 & 3 \\ 0 & 0 & 5/2 & -5 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{\text{第 2 行を } (-2/3) \text{ 倍}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1/2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 5/2 & -5 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[\text{第 3 列の掃き出し}]{\text{(2,3) 成分による}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

（別解終）

これでも正しい解は得られるが計算はかなり大変になる．なるべく分数が現れないように工夫して計算することが，計算ミスを無くすコツである．

例題 2.18. 次の行列を行基本変形により簡約階段行列に変形し，階数を求めよ．

(1) $\begin{pmatrix} 4 & -1 & -5 & -6 \\ 1 & 2 & 1 & 3 \\ 1 & -3 & -4 & -7 \\ 2 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ (2) $\begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 4 \\ 4 & 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$

（解答）

(1)

$$\begin{pmatrix} 4 & -1 & -5 & -6 \\ 1 & 2 & 1 & 3 \\ 1 & -3 & -4 & -7 \\ 2 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 1 列の掃き出し}]{\text{(2,1) 成分による}} \begin{pmatrix} 0 & -9 & -9 & -18 \\ 1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & -5 & -5 & -10 \\ 0 & -3 & -3 & -6 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[\text{入れ替え}]{\text{第 1 行と第 2 行の}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & -9 & -9 & -18 \\ 0 & -5 & -5 & -10 \\ 0 & -3 & -3 & -6 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{\text{第 2 行を } (-1/9) \text{ 倍}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & -5 & -5 & -10 \\ 0 & -3 & -3 & -6 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[\text{第 2 列の掃き出し}]{\text{(2,2) 成分による}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

と簡約階段行列に変形できる．階数は 2 である．

(2)

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 4 \\ 4 & 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 1 列の掃き出し}]{\text{(1,1) 成分による}} \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 & 3 \\ 0 & -5 & 0 & -5 \\ 0 & -10 & -5 & -5 \\ 0 & -15 & -5 & -10 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{\text{第 2,3,4 行を } (-1/5) \text{ 倍}} \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[\text{第 2 列の掃き出し}]{\text{(2,2) 成分による}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[\text{第 3 列の掃き出し}]{\text{(3,3) 成分による}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

と簡約階段行列に変形できる．階数は 3 である．

（解答終）

2.3　行列の標準形

次のような形の $m \times n$ 行列を $F_{mn}(r)$ で表すことにする．

$$F_{mn}(r) \coloneqq \left(\begin{array}{c|c} E_r & O_{r,n-r} \\ \hline O_{m-r,r} & O_{m-r.n-r} \end{array}\right)$$

これはつまり $(1,1),(2,2),\ldots,(r,r)$ 成分が 1 でほかの成分がすべて 0 となる行列である．この形の行列は**標準形**と呼ばれることもある．

例 2.19.　例 2.10 の行列について，簡約階段行列にした後に列基本変形を続けると

$$A \longmapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = F_{44}(3)$$

と変形できる．

定理 2.20.（行列の標準形への変形）
階数 r の $m \times n$ 行列 A は，行と列に関する基本変形を行うことにより，$F_{mn}(r)$ の形にできる．すなわち，m 次基本行列の積の形で表される行列 X と n 次基本行列の積の形で表される行列 Y が存在して

$$XAY = F_{mn}(r)$$

とできる．

証明.　まず A を行基本変形により簡約階段行列 S に変形する．次に，S の零ベクトルではない第 i 行ベクトル $(i = 1, 2, \ldots, r)$ を左から見て，最初の 0 でない成分がある列を第 $j(i)$ 列とする．このとき $(i, j(i))$ 成分は 1 であるから，これで第 i 行を掃き出せば，第 i 行は $(i, j(i))$ 成分のみが 1 で，他の成分は 0 となる．後は $i = 1$ から $i = r$ まで順番に第 i 列と第 $j(i)$ 列を入れ替えていけば，$F_{mn}(r)$ が得られる．

行基本変形は左から基本行列をかけることに，列基本変形は右から基本行列をかけることに対応するから，それらの積をそれぞれ X と Y とおけば，$XAY = F_{mn}(r)$ となる．　□

第5章　連立1次方程式

1　連立1次方程式と拡大係数行列による表現

既に何度も学習していると思われるが，まずは連立1次方程式について復習する．

定義 1.1. （n 元連立1次方程式）
定数 $a_1, a_2, \ldots, a_n, b$ と n 個の未知数 $x_1, x_2, \ldots, x_n$ に関して

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = b$$

の形で与えられる方程式を未知数 $x_1, x_2, \ldots, x_n$ に関する**1次方程式**という．また，この方程式をみたす実数の組 $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ を**解**という．
次に，a_{ij}，b_i $(1 \leqq i \leqq m,\ 1 \leqq j \leqq n)$ を定数とするとき，n 個の未知数 $x_1, x_2, \ldots, x_n$ に関する m 個の1次方程式の組

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1j}x_j + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2j}x_j + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \qquad\vdots \\ a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{ij}x_j + \cdots + a_{in}x_n = b_i \\ \qquad\vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mj}x_j + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

を**連立1次方程式**という．また，この m 個の1次方程式をみたす実数の組 $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ を**解**という．未知数の個数を強調して n 元連立1次方程式とよぶこともある．

次に，いくつかの連立1次方程式の解を具体的に求めてみる．

例 1.2. （**2 元連立 1 次方程式**）

(1) $\begin{cases} 3x - y = 1 \\ -2x + y = 2 \end{cases}$　　(2) $\begin{cases} 3x - y = 1 \\ 6x - 2y = 3 \end{cases}$　　(3) $\begin{cases} 3x - y = 1 \\ 6x - 2y = 2 \end{cases}$

（解答）　それぞれ第1式を ①，第2式を ② とおく．

(1) ① + ② より $x = 3$ となる．よって，求める解は $(x, y) = (3, 8)$ の1組である．

(2) ② − ① × 2 より $0 = 1$ となる．よって，求める解は存在しない．

(3) ② − ① × 2 より $0 = 0$ となる．よって，求める解は $3x - y = 1$ をみたすものだから，t を任意の実数として $(x, y) = (t, 3t - 1)$ となる．

（解答終）

これらは平面の2直線の共有点として考えると，(1) は2直線が1点で交わる，(2) は2直線が平行で共有点をもたない，(3) は2直線が一致するという場合に相当する．
高校数学までは解が1組求まる連立方程式がほとんどだったが，今後はそうとは限らないので注意すること．上の例のように「解なし」や「無限個の解をもつ」ことも普通に現れる．

前の例と比較すると，例えば3元連立1次方程式については幾何学的には『空間内の平面の共有点の問題』になるが，空間図形を正確に描くのは無理なのですべて数式的に処理できなければならない．

そこで，連立1次方程式を行列とベクトルを用いて表すことを考える．

定義 1.3. （拡大係数行列）

連立1次方程式

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1j}x_j + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2j}x_j + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{ij}x_j + \cdots + a_{in}x_n = b_i \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mj}x_j + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

に対して，係数を並べた $m \times n$ 行列を

$$A = (a_{ij})_{ij} = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

とおき，これを**係数行列**という．このとき，未知数からなる n 次ベクトル $\boldsymbol{x}$ と右辺の定数からなる m 次数ベクトル $\boldsymbol{b}$ を

$$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

とおけば，連立1次方程式は

$$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$$

と表せる．また，A に $\boldsymbol{b}$ を付け加えた $m \times (n+1)$ 行列

$$\widehat{A} = \big(A \mid \boldsymbol{b}\big) = \left(\begin{array}{ccc|c} a_{11} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{array}\right)$$

を**拡大係数行列**という．

さらに，$\boldsymbol{b} = \boldsymbol{0}$ である場合，つまり

$$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$$

を**斉次連立1次方程式**という．これはどのような A に対しても，必ず $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ という解をもつ．これを**自明な解**という．

このように，連立1次方程式は必ず行列とベクトルを用いて表すことができる．そこで，連立1次方程式を解く際に行列が利用できないかを今後考えてみることにする．そのため，具体的な連立1次方程式について，方程式を解く過程と係数行列の変化にどのような関係性があるかを次に見てみる．

連立1次方程式

$$\begin{cases} 6x-4y-2z=4 \\ x-y+2z=1 \\ -2x+y+3z=-1 \end{cases}$$

を加減法によって解き，拡大係数行列を右側に書いてその変化の様子を見てみる．

$$\begin{cases} 6x-4y-2z=4 \\ x-y+2z=1 \\ -2x+y+3z=-1 \end{cases} \qquad \left(\begin{array}{ccc|c} 6 & -4 & -2 & 4 \\ 1 & -1 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & 3 & -1 \end{array}\right)$$

$$\Downarrow$$

$$\begin{cases} 2y-14z=-2 \\ x-y+2z=1 \\ -y+7z=1 \end{cases} \qquad \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 2 & -14 & -2 \\ 1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 7 & 1 \end{array}\right)$$

$$\Downarrow$$

$$\begin{cases} x-y+2z=1 \\ 2y-14z=-2 \\ -y+7z=1 \end{cases} \qquad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & -14 & -2 \\ 0 & -1 & 7 & 1 \end{array}\right)$$

$$\Downarrow$$

$$\begin{cases} x-y+2z=1 \\ y-7z=-1 \\ -y+7z=1 \end{cases} \qquad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -7 & -1 \\ 0 & -1 & 7 & 1 \end{array}\right)$$

$$\Downarrow$$

$$\begin{cases} x-5z=0 \\ y-7z=-1 \\ 0=0 \end{cases} \qquad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -5 & 0 \\ 0 & 1 & -7 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

となる．よって，元の連立1次方程式は

$$x=5z, \qquad y=7z-1$$

となるから，t を実数として $z=t$ とおけば

$$(x,y,z)=(5t,7t-1,t)$$

が解である．これはベクトルの形で

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 5 \\ 7 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad (t \in \mathbb{R})$$

とも表せる．

この過程で拡大係数行列に行われた操作は

(1) ある行を定数倍して別の行に加える．

(2) ある行に0でない実数をかける．

(3) 2つの行を入れ替える．

である．これら行基本変形の操作を行っても，それを拡大係数行列とする連立1次方程式の解は変化しない．つまり，行基本変形で拡大係数行列を簡単な形に変形できれば，連立1次方程式が解きやすくなることになる．

2　連立 1 次方程式の解法

連立 1 次方程式は $m \times n$ 行列 A とベクトルを用いて

$$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$$

と表せた．そこで，拡大係数行列 $(A \,|\, \boldsymbol{b})$ の行基本変形を利用した解法を考える．

命題 2.1. （拡大係数行列の行基本変形による連立 1 次方程式の解の不変性）

$m \times (n+1)$ 次拡大係数行列 $(A \,|\, \boldsymbol{b})$ と $(B \,|\, \boldsymbol{c})$ について，ある m 次正則行列 P が存在して

$$P(A \,|\, \boldsymbol{b}) = (B \,|\, \boldsymbol{c}) \tag{2.1}$$

であるとする．このとき，連立 1 次方程式 $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ の解と $B\boldsymbol{x} = \boldsymbol{c}$ の解は一致する．つまり

$$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b} \quad \Longleftrightarrow \quad B\boldsymbol{x} = \boldsymbol{c}$$

が成り立つ．特に，$(A \,|\, \boldsymbol{b})$ を行基本変形して $(B \,|\, \boldsymbol{c})$ が得られるならば，連立 1 次方程式 $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ の解と $B\boldsymbol{x} = \boldsymbol{c}$ の解は一致する．

証明.　(2.1) より $(PA \,|\, P\boldsymbol{b}) = (B \,|\, \boldsymbol{c})$ であるから，$B = PA,\ \boldsymbol{c} = P\boldsymbol{b}$ となる．

よって，$\boldsymbol{x}$ が連立 1 次方程式 $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ の解ならば，両辺に P をかけて

$$PA\boldsymbol{x} = P\boldsymbol{b} \qquad \therefore\ B\boldsymbol{x} = \boldsymbol{c}$$

となり，$\boldsymbol{x}$ は連立 1 次方程式 $B\boldsymbol{x} = \boldsymbol{c}$ の解である．

逆に，$\boldsymbol{x}$ が連立 1 次方程式 $B\boldsymbol{x} = \boldsymbol{c}$ の解ならば，P は正則なので逆行列が存在するから，両辺に P^{-1} をかければ

$$P^{-1}B\boldsymbol{x} = P^{-1}\boldsymbol{c} \qquad \therefore\ A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$$

となり，$\boldsymbol{x}$ は連立 1 次方程式 $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ の解である．

$(A \,|\, \boldsymbol{b})$ を行基本変形して $(B \,|\, \boldsymbol{c})$ が得られたとする．このとき，行基本変形は左から基本行列をかけることに対応していたので，ある基本行列の積で表される行列 P を用いて

$$P(A \,|\, \boldsymbol{b}) = (B \,|\, \boldsymbol{c})$$

と表せる．ここで，定理 1.9 より基本行列は正則なので，その積である P も第 2 章定理 4.4 より正則となる．ゆえに，前半で示したことより求める主張が成り立つ．　□

この命題 2.1 より，与えられた連立 1 次方程式を解くには，その拡大係数行列を行基本変形したものについて考えればよい．そこで，成分に 0 と 1 の多い簡約階段行列の利用を考える．

$B=(b_{ij})$ を階数が r の $m\times n$ 簡約階段行列とし，$\boldsymbol{c}={}^t(c_1,\dots,c_m)$ とするとき，連立 1 次方程式 $B\boldsymbol{x}=\boldsymbol{c}$ について調べてみる．B の第 i 行 $(i=1,\dots,r)$ において，左から見て最初の 0 でない成分がある列を第 $j(i)$ 列とする．このとき，連立 1 次方程式を書き下すと

$$\left\{\begin{array}{cccccccccc}
x_{j(1)} & + & b_{1,j(1)+1}x_{j(1)+1} & + & & \cdots & & + & b_{1n}x_n & = & c_1 \\
 & & x_{j(2)} & + & b_{2,j(2)+1}x_{j(2)+1} & + & \cdots & + & b_{2n}x_n & = & c_2 \\
 & & & & & \vdots & & & & & \\
 & & & & x_{j(r)} & + & b_{r,j(r)+1}x_{j(r)+1} & + \cdots & + & b_{rn}x_n & = & c_r \\
 & & & & & & & & 0 & = & c_{r+1} \\
 & & & & & \vdots & & & & & \\
 & & & & & & & & 0 & = & c_m
\end{array}\right.$$

となるから，この連立 1 次方程式の解は次の 3 つの場合に分けられる．

(Case1) $c_{r+1},\, c_{r+2},\, \dots,\, c_m$ の中に 0 でないものがあるとき

この場合は例えば $c_{r+1}\neq 0$ であるとすれば，上から $r+1$ 番目の方程式が $0=c_{r+1}$ となるため，これはどんな $(x_1,\dots,x_n)$ についても成り立たない．よって，連立 1 次方程式 $B\boldsymbol{x}=\boldsymbol{c}$ は解をもたない．

例 2.2. 拡大係数行列が

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{array}\right)$$

となる連立 1 次方程式は解をもたない．実際，これを書き下してみると

$$\left\{\begin{array}{ccccccc} 1\cdot x_1 & + & 0\cdot x_2 & + & 3\cdot x_3 & = & 2 \\ 0\cdot x_1 & + & 1\cdot x_2 & + & (-1)\cdot x_3 & = & 0 \\ 0\cdot x_1 & + & 0\cdot x_2 & + & 0\cdot x_3 & = & 3 \end{array}\right. \quad\Longrightarrow\quad \left\{\begin{array}{l} x_1+3x_3=2 \\ x_2-x_3=0 \\ 0=3 \end{array}\right.$$

であるから，第 3 式をみたす $(x_1,\, x_2,\, x_3)$ は存在しない．

(Case2) $c_{r+1}=c_{r+2}=\cdots=c_m=0$ かつ $r=n$ のとき

この場合は

$$1\leqq j(1)<j(2)<\cdots<j(n)\leqq n \qquad \therefore j(k)=k \quad (k=1,2,\dots,n)$$

となるから，B は単位行列 E_n となっている．よって，連立 1 次方程式 $B\boldsymbol{x}=\boldsymbol{c}$ はただ 1 組の解

$$(x_1,x_2,\dots,x_n)=(c_1,c_2,\dots,c_n)$$

をもつ．

例 2.3. 拡大係数行列が

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right)$$

となる連立 1 次方程式は解をただ 1 組だけもつ．実際，これを書き下してみると

$$\left\{\begin{array}{ccccccc} 1\cdot x_1 & + & 0\cdot x_2 & + & 0\cdot x_3 & = & 2 \\ 0\cdot x_1 & + & 1\cdot x_2 & + & 0\cdot x_3 & = & 0 \\ 0\cdot x_1 & + & 0\cdot x_2 & + & 1\cdot x_3 & = & -1 \end{array}\right. \quad\Longrightarrow\quad \left\{\begin{array}{l} x_1=2 \\ x_2=0 \\ x_3=-1 \end{array}\right.$$

であるから，$(x_1,\, x_2,\, x_3)=(2,\, 0,\, -1)$ となる．

（Case3） $c_{r+1} = c_{r+2} = \cdots = c_m = 0$ かつ $r < n$ のとき

この場合は

$$x_{j(i)} + b_{ij(i)+1}x_{j(i)+1} + \cdots + b_{in}x_n = c_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, r)$$

をみたす $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ の組が解となる．これより，$n-r$ 個の未知数 x_k $(k \neq j(1), j(2), \ldots, j(r))$ に任意の実数 t_k を与えれば，上の方程式から $x_{j(k)}$ $(k = 1, 2, \ldots, r)$ が定まる．よって，連立 1 次方程式 $B\boldsymbol{x} = \boldsymbol{c}$ は無限個の解をもち，そのパラメータは $n-r$ 個である．

例 **2.4.** 拡大係数行列が

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & -2 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

となる連立 1 次方程式は解を無数にもつ．実際，これを書き下してみると

$$\left\{\begin{array}{ccccccc} 1 \cdot x_1 & + & 0 \cdot x_2 & + & 3 \cdot x_3 & = & 2 \\ 0 \cdot x_1 & + & 1 \cdot x_2 & + & (-2) \cdot x_3 & = & 5 \\ 0 \cdot x_1 & + & 0 \cdot x_2 & + & 0 \cdot x_3 & = & 0 \end{array}\right. \quad \Longrightarrow \quad \left\{\begin{array}{l} x_1 + 3x_3 = 2 \\ x_2 - 2x_3 = 5 \\ 0 = 0 \end{array}\right.$$

であるから，$x_1 = -3x_3 + 2,\ x_2 = 2x_3 + 5$ となる．よって，$x_3 = t$ とおけば

$$(x_1,\, x_2,\, x_3) = (-3t + 2,\, 2t + 5,\, t) \qquad (t \text{ は任意の実数})$$

となる．これは $r = 2, n = 3$ のときなので，パラメータは $n - r = 1$ 個である．解をベクトルで表せば

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad (t \in \mathbb{R})$$

なお，**拡大係数行列を簡約階段行列に行基本変形した際に，段差が増えていない列に対応する変数をパラメータとすること．**そうすれば，後は移項するだけで解が求められるので，拡大係数行列を簡約階段行列に行基本変形した時点で本質的に方程式は解けている．ここでは 3 列目で段差が増えていないので，x_3 をパラメータとする．また，解はベクトルの形で表示すること．

例 **2.5.** 拡大係数行列が

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 3 & -1 & 4 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

となる連立 1 次方程式は解を無数にもつ．実際，これを書き下してみると

$$\left\{\begin{array}{ccccccccc} 1 \cdot x_1 & + & 0 \cdot x_2 & + & 3 \cdot x_3 & + & (-1) \cdot x_4 & = & 4 \\ 0 \cdot x_1 & + & 1 \cdot x_2 & + & (-2) \cdot x_3 & + & 0 \cdot x_4 & = & 5 \\ 0 \cdot x_1 & + & 0 \cdot x_2 & + & 0 \cdot x_3 & + & 0 \cdot x_4 & = & 0 \end{array}\right. \quad \Longrightarrow \quad \left\{\begin{array}{l} x_1 + 3x_3 - x_4 = 4 \\ x_2 - 2x_3 = 5 \\ 0 = 0 \end{array}\right.$$

であるから，$x_1 = -3x_3 + x_4 + 4,\ x_2 = 2x_3 + 5$ となる．よって，$x_3 = s,\ x_4 = t$ とおけば

$$(x_1,\, x_2,\, x_3,\, x_4) = (-3s + t + 4,\, 2s + 5,\, s,\, t) \qquad (s, t \text{ は任意の実数})$$

となる．これは $r = 2, n = 4$ のときなので，パラメータは $n - r = 2$ 個である．解をベクトルで表せば

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad (s, t \in \mathbb{R})$$

拡大係数行列を簡約階段行列に行基本変形した際に，段差が増えていない列に対応する変数 x_3 と x_4 をパラメータとすること．また，解はベクトルの形で表示すること．

このように，拡大係数行列が簡約階段行列ならば，対応する連立 1 次方程式が解をもつかどうかの判定は容易であり，さらに方程式を具体的に解くことができる．一方，命題 2.1 より拡大係数行列を行基本変形しても対応する連立 1 次方程式の解は不変であり，さらに定理 2.15 より任意の行列は行基本変形により簡約階段行列に変形できる．したがって，どのような連立 1 次方程式でも

(1) 拡大係数行列をつくり，それを行基本変形により階段行列に変形する．

(2) 一番右の列で段差が増えているかを見る．増えていれば (Case1) の場合なので解は存在しない．増えていなければ，さらに行基本変形を続け，簡約階段行列に変形する．

(3) (Case2) の条件を満たせばただ 1 組の解をもち，そうでなければ未知数の個数 n と簡約階段行列の階数 r についてパラメータを $n-r$ 個もつ無限個の解が得られる．

とすれば解けることが示された．

この結果より次の命題が成り立つことがわかる．

命題 2.6. （連立 1 次方程式の解の分類）

(1) 未知数の個数 n が式の数 m より多い斉次連立 1 次方程式は自明でない解をもつ．

(2) 連立 1 次方程式 $A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ について

$$A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b} \text{ が解をもつ} \quad\Longleftrightarrow\quad \operatorname{rank} A = \operatorname{rank}(A \,|\, \boldsymbol{b})$$

が成り立つ．

証明.

(1) A を $m \times n$ 次行列とし，$n > m$ とする．このとき，斉次連立 1 次方程式 $A\boldsymbol{x}=\mathbf{0}$ については拡大係数行列を考えても

$$(A \,|\, \mathbf{0})$$

となり，一番右の列が $\mathbf{0}$ なので，(Case1) の場合は起こらない．

また，係数行列 A の階数を $r = \operatorname{rank} A$ とおけば，$r \leqq m$ であるから，$r < n$ となる．ゆえに，常に (Case3) の場合となるので，無数の解をもつ．したがって，自明な解 $\boldsymbol{x}=\mathbf{0}$ 以外の解をもつ．

(2) (Case2) または (Case3) の場合になるための必要十分条件は，拡大係数行列を階段行列に変形したときに一番右の列で段差が増えていないことである．つまり，$\boldsymbol{b}$ である一番右の列の有無が階数に影響しない場合なので，数式で表すと

$$\operatorname{rank} A = \operatorname{rank}(A \,|\, \boldsymbol{b})$$

となる．

$\square$

3　連立 1 次方程式の計算例

例題 3.1.　次の連立 1 次方程式の解を求めよ．

(1)
$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + 16x_3 = 26 \\ x_1 + 2x_3 = 7 \\ x_1 + x_2 + 6x_3 = 12 \end{cases}$$

(2)
$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 3 \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 = 5 \\ 4x_1 + 2x_2 + 6x_3 = 12 \end{cases}$$

(3)
$$\begin{cases} x_1 + 2x_3 = 7 \\ 2x_1 + 3x_2 + 16x_3 = 26 \\ x_1 + x_2 + 6x_3 = 11 \end{cases}$$

（解答）

(1)　拡大係数行列をつくり，行基本変形すれば

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & 16 & 26 \\ 1 & 0 & 2 & 7 \\ 1 & 1 & 6 & 12 \end{array}\right) \xrightarrow[\text{入れ替え}]{\text{第 1 行と第 2 行の}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 7 \\ 2 & 3 & 16 & 26 \\ 1 & 1 & 6 & 12 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[\text{第 1 列の掃き出し}]{\text{(1,1) 成分による}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 7 \\ 0 & 3 & 12 & 12 \\ 0 & 1 & 4 & 5 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{\text{第 2 行を 1/3 倍}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 7 \\ 0 & 1 & 4 & 4 \\ 0 & 1 & 4 & 5 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[\text{第 2 列の掃き出し}]{\text{(2,2) 成分による}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 7 \\ 0 & 1 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

となる．よって，一番右の列で階数が増えているから，この連立 1 次方程式は解をもたない．

(2)　拡大係数行列をつくり，行基本変形すれば

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 2 & 5 \\ 4 & 2 & 6 & 12 \end{array}\right) \xrightarrow[\text{第 1 列の掃き出し}]{\text{(1,1) 成分による}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{\text{第 2 行を } (-1) \text{ 倍}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[\text{第 2 列の掃き出し}]{\text{(2,2) 成分による}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[\text{第 3 列の掃き出し}]{\text{(3,3) 成分による}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

となる．ゆえに，求める解は $(x_1, x_2, x_3) = (1, 1, 1)$ である．

(3)　拡大係数行列をつくり，行基本変形すれば

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 7 \\ 2 & 3 & 16 & 26 \\ 1 & 1 & 6 & 11 \end{array}\right) \xrightarrow[\text{第 1 列の掃き出し}]{\text{(1,1) 成分による}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 7 \\ 0 & 3 & 12 & 12 \\ 0 & 1 & 4 & 4 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{\text{第 2 行を 1/3 倍}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 7 \\ 0 & 1 & 4 & 4 \\ 0 & 1 & 4 & 4 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[\text{第 2 列の掃き出し}]{\text{(2,2) 成分による}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 7 \\ 0 & 1 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

となる．よって，与えられた連立 1 次方程式は

$$x_1 + 2x_3 = 7, \qquad x_2 + 4x_3 = 4$$

と同値であるから，その解は $x_3 = t$ とおけば

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -2 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad (t \in \mathbb{R})$$

と表せる．

（解答終）

注意 3.2.　方程式の解を求めた後は必ず検算すること．前の例題の (2) では，求めた解を係数行列にかけて

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 4 & 2 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 12 \end{pmatrix}$$

が成り立つことを左辺を計算して確認すればよい．

(3) のように解のパラメータ表示が得られた場合には，解答のようにベクトル表示しておけば

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 3 & 16 \\ 1 & 1 & 6 \end{pmatrix} \left\{ \begin{pmatrix} 7 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -2 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} = \begin{pmatrix} 7 \\ 26 \\ 11 \end{pmatrix}$$

が成り立つことを確認すればよい．ただし，この左辺を直接計算するとミスしそうなので，線形性を利用して

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 3 & 16 \\ 1 & 1 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 7 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 3 & 16 \\ 1 & 1 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 26 \\ 11 \end{pmatrix}$$

としておく．これがすべての実数 t で成り立つので，t についての恒等式と見れば

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 3 & 16 \\ 1 & 1 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 7 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 26 \\ 11 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 3 & 16 \\ 1 & 1 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

が成り立つことが必要十分である．これならば文字式を含む計算をしなくてよい．パラメータが複数個現れる場合も同様にして，文字式を含まない計算で検算可能である．

例題 3.3.　次の連立 1 次方程式の解を求めよ．

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 + 8x_4 = 2 \\ 2x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 4x_4 = -1 \\ x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 = 3 \end{cases}$$

（解答）　拡大係数行列をつくり，行基本変形すれば

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -1 & 8 & 2 \\ 2 & 3 & 2 & 4 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 & 3 \end{array}\right) \xrightarrow[\text{第 1 列の掃き出し}]{\text{(1,1) 成分による}} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -1 & 8 & 2 \\ 0 & -1 & 4 & -12 & -5 \\ 0 & -1 & 2 & -6 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[\text{第 2 列の掃き出し}]{\text{(2,2) 成分による}} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 7 & -16 & -8 \\ 0 & -1 & 4 & -12 & -5 \\ 0 & 0 & -2 & 6 & 6 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[\text{第 3 行を } (-1/2) \text{ 倍}]{\text{第 2 行を } (-1) \text{ 倍}} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 7 & -16 & -8 \\ 0 & 1 & -4 & 12 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & -3 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[\text{第 3 列の掃き出し}]{\text{(3,3) 成分による}} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 5 & 13 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -7 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & -3 \end{array}\right)$$

となる．よって，与えられた連立 1 次方程式は

$$\begin{cases} x_1 + 5x_4 = 13 \\ x_2 = -7 \\ x_3 - 3x_4 = -3 \end{cases}$$

と同値であるから，その解は $x_4 = t$ とおけば

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13 \\ -7 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -5 \\ 0 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad (t \in \mathbb{R})$$

である．

（解答終）

係数行列はもちろん正方行列とは限らない．この問題では未知数 4 個に対して式が 3 本なので，解が 1 つに決まるには条件が足りないから，解をもつならば必ずパラメータを含むことが計算する前にわかる．しかし，パラメータの個数については拡大係数行列を行基本変形をして階数を調べなければわからない．また，簡約階段行列で段差が一番下までくればパラメータが現れないというわけではないので注意すること．

解を求めた後の検算には

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 8 \\ 2 & 3 & 2 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 13 \\ -7 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 8 \\ 2 & 3 & 2 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -5 \\ 0 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

が成り立つことを，実際にそれぞれの左辺を計算して確かめればよい．

例題 3.4. 次の連立 1 次方程式の解を求めよ．

$$\begin{cases} 3x_1 - 4x_2 - 12x_3 + 11x_4 = 7 \\ x_1 + 2x_2 + 6x_3 + 7x_4 = -1 \\ 2x_1 - x_2 - 3x_3 + 9x_4 = 3 \end{cases}$$

（解答） 拡大係数行列をつくり，行基本変形すれば

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 3 & -4 & -12 & 11 & 7 \\ 1 & 2 & 6 & 7 & -1 \\ 2 & -1 & -3 & 9 & 3 \end{array}\right) \xrightarrow[\text{第 1 列の掃き出し}]{\text{(2,1) 成分による}} \left(\begin{array}{cccc|c} 0 & -10 & -30 & -10 & 10 \\ 1 & 2 & 6 & 7 & -1 \\ 0 & -5 & -15 & -5 & 5 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{\text{第 1 行を } (-1/10) \text{ 倍}} \left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 1 & 3 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 6 & 7 & -1 \\ 0 & -5 & -15 & -5 & 5 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[\text{第 2 列の掃き出し}]{\text{(1,2) 成分による}} \left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 1 & 3 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[\text{入れ替え}]{\text{第 1 行と第 2 行の}} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 5 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

となる．よって，与えられた連立 1 次方程式は

$$\begin{cases} x_1 + 5x_4 = 1 \\ x_2 + 3x_3 + x_4 = -1 \end{cases}$$

と同値であるから，その解は $x_3 = s,\ x_4 = t$ とおけば

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} -5 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad (s, t \in \mathbb{R})$$

である．

（解答終）

未知数の個数や拡大係数行列の階数が変わっても基本は変わらない．この問題は拡大係数行列の階数が 2 なので，見た目は 3 本の式でも本質的な式の本数は 2 本である．未知数 4 個で式 2 本なので，解のパラメータは $4 - 2 = 2$ 個となる．

解を求めた後の検算には

$$\begin{pmatrix} 3 & -4 & -12 & 11 \\ 1 & 2 & 6 & 7 \\ 2 & -1 & -3 & 9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 3 & -4 & -12 & 11 \\ 1 & 2 & 6 & 7 \\ 2 & -1 & -3 & 9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -4 & -12 & 11 \\ 1 & 2 & 6 & 7 \\ 2 & -1 & -3 & 9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -5 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

が成り立つことを，実際にそれぞれの積を計算して確かめればよい．

例題 3.5.　次の連立1次方程式の解を求めよ．

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 + 7x_4 = 4 \\ 2x_1 + 4x_2 + 3x_3 - x_4 = 3 \\ 3x_1 + 6x_2 + 2x_3 + 6x_4 = 7 \end{cases}$$

（解答）　拡大係数行列をつくり，行基本変形すれば

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -1 & 7 & 4 \\ 2 & 4 & 3 & -1 & 3 \\ 3 & 6 & 2 & 6 & 7 \end{array}\right) \xrightarrow[\text{第 1 列の掃き出し}]{\text{(1,1) 成分による}} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -1 & 7 & 4 \\ 0 & 0 & 5 & -15 & -5 \\ 0 & 0 & 5 & -15 & -5 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{\text{第 2 行を 1/5 倍}} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -1 & 7 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & 5 & -15 & -5 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[\text{第 3 列の掃き出し}]{\text{(2,3) 成分による}} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 0 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

となる．よって，与えられた連立1次方程式は

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 4x_4 = 3 \\ x_3 - 3x_4 = -1 \end{cases}$$

と同値であるから，その解は $x_2 = s,\ x_4 = t$ とおけば

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad (s, t \in \mathbb{R})$$

である．

（解答終）

拡大係数行列を簡約階段行列に変形した後，パラメータにおくのは段差が増えていない列に対応する変数である．右側の2個をいつもパラメータにおくわけではないので注意すること．

解を求めた後の検算には

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 7 \\ 2 & 4 & 3 & -1 \\ 3 & 6 & 2 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 7 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 7 \\ 2 & 4 & 3 & -1 \\ 3 & 6 & 2 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 7 \\ 2 & 4 & 3 & -1 \\ 3 & 6 & 2 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

が成り立つことを，実際にそれぞれの積を計算して確かめればよい．

例題 3.6. 　次の連立１次方程式の解を求めよ．

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} x_1 & - & 5x_2 & & & = & -4 \\ 2x_1 & - & 3x_2 & - & x_3 & = & -2 \\ 3x_1 & - & x_2 & - & 2x_3 & = & 0 \end{array}\right.$$

（解答）　拡大係数行列をつくり，行基本変形すれば

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -5 & 0 & -4 \\ 2 & -3 & -1 & -2 \\ 3 & -1 & -2 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[\text{第 1 列の掃き出し}]{\text{(1,1) 成分による}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -5 & 0 & -4 \\ 0 & 7 & -1 & 6 \\ 0 & 14 & -2 & 12 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{\text{第 2 行を (1/7) 倍}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -5 & 0 & -4 \\ 0 & 1 & -1/7 & 6/7 \\ 0 & 14 & -2 & 12 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[\text{第 2 列の掃き出し}]{\text{(2,2) 成分による}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -5/7 & 2/7 \\ 0 & 1 & -1/7 & 6/7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

となる．よって，与えられた連立１次方程式は

$$\left\{\begin{aligned} x_1 - \frac{5}{7}\,x_3 &= \frac{2}{7} \\ x_2 - \frac{1}{7}\,x_3 &= \frac{6}{7} \end{aligned}\right.$$

と同値であるから，その解は $x_3 = t$ とおけば

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2/7 \\ 6/7 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 5/7 \\ 1/7 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad (t \in \mathbb{R})$$

である．

（解答終）

この問題においては

$$x_3 = 7t$$

とおいて

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2/7 \\ 6/7 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 7 \end{pmatrix} \qquad (t \in \mathbb{R})$$

を答えとしてもよい．この方が検算も簡単で設問が続く場合にも計算がしやすくなるので，慣れてくればこのようにできるだけ分数が出てこない形にした方がよい．一見答えが違うように見えるかもしれないが，t がすべての実数を動けば $7t$ もすべての実数を動くので実質的に同じことになる．

なお，実は $x_3 = 7t + 1$ とおけば t がかからない部分の成分も整数にできるが，そのようなパラメータ表示を探す方が面倒なので，そこまでする必要はない．

例題 3.7. 次の連立 1 次方程式の解を求めよ．

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - 3x_3 + x_4 = 2 \\ 2x_1 + x_2 - 2x_3 = 3 \\ 3x_1 + x_2 - 6x_3 + x_4 = 4 \\ 4x_1 + 2x_2 - 9x_3 + 2x_4 = 6 \end{cases}$$

（解答） 拡大係数行列をつくり，行基本変形すれば

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -3 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & -2 & 0 & 3 \\ 3 & 1 & -6 & 1 & 4 \\ 4 & 2 & -9 & 2 & 6 \end{array}\right) \xrightarrow[\text{第 1 列の掃き出し}]{\text{(1,1) 成分による}} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -3 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 4 & -2 & -1 \\ 0 & -2 & 3 & -2 & -2 \\ 0 & -2 & 3 & -2 & -2 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[\text{第 2 列の掃き出し}]{\text{(2,2) 成分による}} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 4 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & -5 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -5 & 2 & 0 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[\text{第 3 行を } (-1/5) \text{ 倍}]{\text{第 2 行を } (-1) \text{ 倍}} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -4 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -2/5 & 0 \\ 0 & 0 & -5 & 2 & 0 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[\text{第 3 列の掃き出し}]{\text{(3,3) 成分による}} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & -3/5 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2/5 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -2/5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

となる．よって，与えられた連立 1 次方程式は

$$\begin{cases} x_1 - \dfrac{3}{5}\,x_4 = 1 \\ x_2 + \dfrac{2}{5}\,x_4 = 1 \\ x_3 - \dfrac{2}{5}\,x_4 = 0 \end{cases}$$

と同値であるから，その解は $x_4 = 5t$ とおけば

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix} \qquad (t \in \mathbb{R})$$

である．

（解答終）

答えについては $x_4 = t$ とおいて

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 3/5 \\ -2/5 \\ 2/5 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad (t \in \mathbb{R})$$

としてもよい．ただし，後の章で連立 1 次方程式の解を他の問題に利用する場合を考えると，簡単に分数表記が避けられるならそうしておいた方がよい．

例題 3.8.　次の連立 1 次方程式の解を求めよ．

$$\begin{cases} 2x_1 + 4x_2 + x_3 + x_4 - 3x_5 = 5 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 + x_5 = 3 \\ -x_1 - 2x_2 + 2x_3 + x_4 + 2x_5 = 0 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 - 2x_5 = 3 \end{cases}$$

（解答）　拡大係数行列をつくり，行基本変形すれば

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 2 & 4 & 1 & 1 & -3 & 5 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 1 & 3 \\ -1 & -2 & 2 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 1 & -2 & 3 \end{array}\right) \xrightarrow[\text{第 1 列の掃き出し}]{\text{(2,1) 成分による}} \left(\begin{array}{ccccc|c} 0 & 0 & -1 & 1 & -5 & -1 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & 1 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -3 & 0 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[\text{入れ替え}]{\text{第 1 行と第 2 行の}} \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & 1 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & -5 & -1 \\ 0 & 0 & 3 & 1 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -3 & 0 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[\text{第 3 列の掃き出し}]{\text{(2,3) 成分による}} \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & 0 & 1 & -4 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & -5 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & -12 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -3 & 0 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[\text{第 3 行を (1/4) 倍}]{\text{第 2 行を (-1) 倍}} \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & 0 & 1 & -4 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -3 & 0 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[\text{第 4 列の掃き出し}]{\text{(3,4) 成分による}} \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & 0 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

となる．よって，与えられた連立 1 次方程式は

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_5 = 2 \\ x_3 + 2x_5 = 1 \\ x_4 - 3x_5 = 0 \end{cases}$$

と同値であるから，その解は $x_2 = s,\ x_5 = t$ とおけば

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad (s, t \in \mathbb{R})$$

である．

（解答終）

未知数が n 個で係数行列の階数が r のときには，パラメータの個数は $n-r$ である．また，その際には段差が増えていない列に対応する未知数をパラメータとすると，方程式が既に解けていることを理解しておくこと．解答のように同値な連立 1 次方程式を一度書き直すとミスをしにくいが，この部分は慣れてくると省略してもよい．

連立１次方程式の係数に文字定数を含む場合には

- ただ１つの解をもつ
- 解をもたない
- 無限個の解をもつ（解のパラメータ表示）

のどれになるかを判定し，適切に場合分けしなければならない．

例題 3.9. a を実数の定数とする．次の連立１次方程式を解け．

$$\begin{cases} x + y + (a+1)z = 2 \\ x + az = 3 \\ x + 2y + (a+2)z = a \end{cases}$$

（解答）　拡大係数行列をつくり，行基本変形すれば

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & a+1 & 2 \\ 1 & 0 & a & 3 \\ 1 & 2 & a+2 & a \end{array}\right) \xrightarrow[\text{入れ替え}]{\text{第 1 行と第 2 行の}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & a & 3 \\ 1 & 1 & a+1 & 2 \\ 1 & 2 & a+2 & a \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[\text{第 1 列の掃き出し}]{\text{(1,1) 成分による}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & a & 3 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 2 & a-3 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[\text{第 2 列の掃き出し}]{\text{(2,2) 成分による}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & a & 3 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & a-1 \end{array}\right) \qquad \cdots (*)$$

となる．

(i) $a \fallingdotseq 1$ のとき，$(*)$ において一番右の列で段差が増えるから，この連立１次方程式は解をもたない．

(ii) $a = 1$ のとき

$$(*) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

となるから，求める解は

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad (t \in \mathbb{R})$$

である．

（解答終）

例題 3.10. a を実数の定数とする．次の連立 1 次方程式を解け．

$$\begin{cases} x - ay - 2z = 2 \\ ax + 2y + z = 1 \\ 4x - ay - 3z = 5 \end{cases}$$

（解答） 拡大係数行列をつくり，行基本変形すれば

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -a & -2 & 2 \\ a & 2 & 1 & 1 \\ 4 & -a & -3 & 5 \end{array}\right) \xrightarrow[\text{第 1 列の掃き出し}]{\text{(1,1) 成分による}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -a & -2 & 2 \\ 0 & a^2+2 & 2a+1 & -2a+1 \\ 0 & 3a & 5 & -3 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{\text{第 2 行を } 1/(a^2+2) \text{ 倍}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -a & -2 & 2 \\ 0 & 1 & \frac{2a+1}{a^2+2} & \frac{-2a+1}{a^2+2} \\ 0 & 3a & 5 & -3 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[\text{第 2 列の掃き出し}]{\text{(2,2) 成分による}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & \frac{a-4}{a^2+2} & \frac{a+4}{a^2+2} \\ 0 & 1 & \frac{2a+1}{a^2+2} & \frac{-2a+1}{a^2+2} \\ 0 & 0 & \frac{-(a-2)(a+5)}{a^2+2} & \frac{3(a-2)(a+1)}{a^2+2} \end{array}\right) \quad \cdots (*)$$

となる．

(i) $-a^2-3a-10 = -(a-2)(a+5) \neq 0$ つまり $a \neq 2, -5$ のとき，行基本変形を続ければ

$$(*) \xrightarrow[(a^2+2)/(-a^2-3a+10) \text{ 倍}]{\text{第 3 行を}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & \frac{a-4}{a^2+2} & \frac{a+4}{a^2+2} \\ 0 & 1 & \frac{2a+1}{a^2+2} & \frac{-2a+1}{a^2+2} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{-3(a+1)}{a+5} \end{array}\right) \xrightarrow[\text{第 3 列の掃き出し}]{\text{(3,3) 成分による}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & \frac{4}{a+5} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{4}{a+5} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{-3(a+1)}{a+5} \end{array}\right)$$

となるので，求める解は

$$(x,\, y,\, z) = \left(\frac{4}{a+5},\ \frac{4}{a+5},\ \frac{-3a-3}{a+5}\right)$$

(ii) $a=2$ のとき

$$(*) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1/3 & 1 \\ 0 & 1 & 5/6 & -1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

となるから，求める解は

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1/2 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \\ 6 \end{pmatrix} \qquad (t \in \mathbb{R})$$

(iii) $a=-5$ のとき，第 3 行に着目すると

$$(*) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & * & * \\ 0 & 1 & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 28/9 \end{array}\right)$$

となるから，一番右の列で段差が増えるので，この連立 1 次方程式は解をもたない．

（解答終）

例題 3.11.　次の連立１次方程式が解をもつような定数 a の値を求めよ．また，そのときの解を求めよ．

$$\begin{cases} x + y - 2z + u = 2 \\ -x - 2y + 3z - u = 3 \\ 2x + y - 3z + 2u = a \end{cases}$$

（解答）　拡大係数行列をつくり，行基本変形すれば

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -2 & 1 & 2 \\ -1 & -2 & 3 & -1 & 3 \\ 2 & 1 & -3 & 2 & a \end{array}\right) \xrightarrow[\text{第 1 列の掃き出し}]{\text{(1,1) 成分による}} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -2 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 5 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & a-4 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[\text{第 2 列の掃き出し}]{\text{(2,2) 成分による}} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -1 & 1 & 7 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a-9 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{\text{第 2 行を } (-1) \text{ 倍}} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -1 & 1 & 7 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a-9 \end{array}\right) \qquad \cdots (*)$$

となる．よって，方程式が解をもつための必要十分条件は

$$a - 9 = 0$$

であるから，求める値は $a = 9$ となる．

　このとき

$$(*) = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -1 & 1 & 7 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

となる．よって，与えられた連立１次方程式は

$$\begin{cases} x - z + u = 7 \\ y - z = -5 \end{cases}$$

と同値であるから，その解は $z = s,\ u = t$ とおけば

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ u \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ -5 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad (s, t \in \mathbb{R})$$

と表せる．

（解答終）

例題 3.12. 次の連立 1 次方程式が無限個の解をもつような定数 a と b の値を求めよ．また，そのときの解を求めよ．

$$\begin{cases} x - y + z + u = 2 \\ x + 2y - 2z + 4u = -1 \\ 2x + y + az - u = 1 \\ 2x - 2y + 3z + u = b \end{cases}$$

（解答） 拡大係数行列をつくり，行基本変形すれば

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & -2 & 4 & -1 \\ 2 & 1 & a & -1 & 1 \\ 2 & -2 & 3 & 1 & b \end{array}\right) \xrightarrow[\text{第 1 列の掃き出し}]{\text{(1,1) 成分による}} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & -3 & 3 & -3 \\ 0 & 3 & a-2 & -3 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & b-4 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{\text{第 2 行を 1/3 倍}} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & a-2 & -3 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & b-4 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[\text{第 2 列の掃き出し}]{\text{(2,2) 成分による}} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & a+1 & -6 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & b-4 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[\text{第 3 列の掃き出し}]{\text{(4,3) 成分による}} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & b-5 \\ 0 & 0 & 0 & a-5 & -(a+1)(b-4) \\ 0 & 0 & 1 & -1 & b-4 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[\text{入れ替え}]{\text{第 3 行と第 4 行の}} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & b-5 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & b-4 \\ 0 & 0 & 0 & a-5 & -(a+1)(b-4) \end{array}\right) \quad \cdots (*)$$

となる．よって，$a \neq 5$ なら未知数が 4 個で係数行列の階数が 4 となるため，与えられた方程式はただ 1 つの解をもつ．よって，無限個の解をもつためには $a = 5$ であることが必要である．

このとき，$(*)$ の一番右の段で段差が増えないためには

$$-(a+1)(b-4) = -6(b-4) = 0$$

でなければならない．ゆえに，求める値は $a = 5,\ b = 4$ である．さらに

$$(*) = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

となるから，求める解は

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ u \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad (t \in \mathbb{R})$$

である．

（解答終）

第6章　行列の階数と正則行列

1　行列の階数による正則性の判定

行列の階数と正則性の関係について，次が成り立つ．

定理 1.1. （行列の正則性と階数）
n 次正方行列 A に対して，次の 3 条件はすべて同値である．

(1) A は正則行列である．

(2) $\operatorname{rank} A = n$

(3) A は行基本変形により，単位行列に変形できる．

証明. (1) $\Longrightarrow$ (2) $\Longrightarrow$ (3) $\Longrightarrow$ (1) の順で証明する．

- (1)$\Longrightarrow$(2)
  定理 2.20 より，n 次正則行列 X と Y で
  $$XAY = F_{nn}(r)$$
  となるものが存在する．ここで，$r = \operatorname{rank} A$ である．仮定より A は正則であるから，正則行列の積である XAY も正則なので，$F_{nn}(r)$ は正則である．一方，$F_{nn}(r)$ は対角行列であるから，逆行列が存在するのは対角成分がすべて 0 でないときなので，$r = n$ となる．

- (2)$\Longrightarrow$(3)
  A を行基本変形により簡約階段行列 B に変形すれば，B は n 次正方行列で階数が n であるから，すべての列で段差が増えなければならない．よって，簡約階段行列の定義より，自動的に
  $$B = E_n$$
  となっている（簡約階段行列の定義 2.13 の下の注意を参照）．

- (3)$\Longrightarrow$(1)
  行基本変形を行うことは基本行列を左からかけることに対応する．よって，A が行基本変形で単位行列になるならば，基本行列の積で表される行列 P で
  $$PA = E_n$$
  となるものが存在する．基本行列は正則であるから，それらの積である P も正則なので，$A = P^{-1}$ となることより，A は正則行列である．

□

2　正則行列の逆行列の求め方

前節定理 1.1 の証明より次がわかる．

定理 2.1.（正則行列の形）
n 次正方行列 A に対して，A が正則行列であるための必要十分条件は，A が基本行列の積で表されることである．

証明.　A が正則であるための必要十分条件は定理 1.1 より，A が行基本変形により単位行列に変形できることである．行基本変形を行うことは，基本行列を左からかけることに対応する．よって，A が k 回の行基本変形で単位行列になるならば，変形に対応する k 個の基本行列 P_j の積で表される行列

$$P = P_k P_{k-1} \cdots P_2 P_1$$

で $PA = E_n$ となるものが存在する．これより

$$A = P^{-1} = P_1^{-1} P_2^{-1} \cdots P_{k-1}^{-1} P_k^{-1}$$

と表され，各 P_j^{-1} も基本行列であるから，求める主張が成り立つ．　□

上の証明と同じ記号を用いると

$$A^{-1} = P = P_k P_{k-1} \cdots P_2 P_1$$

となるから，A を単位行列に行基本変形する過程がわかれば，逆行列 A^{-1} を求めることができる．次に，この考え方を用いて逆行列を求める手法を紹介する．

＜逆行列の計算法＞
n 次正方行列 A の右側に n 次単位行列 E_n を並べて得られる $n \times 2n$ 行列 $(A \,|\, E_n)$ を考える．

(1) $(A \,|\, E_n)$ を行基本変形して左半分の行列 A を階段行列にする．このときの行基本変形を表す基本行列の積を B とすれば
$$B(A \,|\, E_n) = (BA \,|\, B)$$
であり，BA は階段行列とできる．

(2) $\operatorname{rank} BA \neq n$ ならば，A は正則ではない．

(3) $\operatorname{rank} BA = n$ ならば，$\operatorname{rank} A = n$ となるので A は正則である．さらに簡約階段行列まで行基本変形をすることで BA を単位行列に変形できる．この変形に対応する基本行列の積を C とすれば
$$C(BA \,|\, B) = (CBA \,|\, CB) = (E_n \,|\, CB)$$
である．よって，$CBA = E_n$ より CB が A の逆行列であり，これは右半分に現れている．

このような手順をとることにより，正則行列の逆行列を求めることができる．つまり

$$(A \,|\, E_n) \xrightarrow{\text{行基本変形}} (E_n \,|\, X)$$

とできるとき，A は正則で $X = A^{-1}$ が成り立つということである．

例題 2.2.　正則行列 $A=\begin{pmatrix}2&1&-1&2\\3&2&2&1\\1&1&2&0\\-1&0&3&-1\end{pmatrix}$ の逆行列を求めよ．

（解答）　右側に単位行列をつけて行基本変形すると

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc}2&1&-1&2&1&0&0&0\\3&2&2&1&0&1&0&0\\1&1&2&0&0&0&1&0\\-1&0&3&-1&0&0&0&1\end{array}\right)\xrightarrow[\text{第 1 列の掃き出し}]{\text{(3,1) 成分による}}\left(\begin{array}{cccc|cccc}0&-1&-5&2&1&0&-2&0\\0&-1&-4&1&0&1&-3&0\\1&1&2&0&0&0&1&0\\0&1&5&-1&0&0&1&1\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[\text{入れ替え}]{\text{第 1 行と第 3 行の}}\left(\begin{array}{cccc|cccc}1&1&2&0&0&0&1&0\\0&-1&-4&1&0&1&-3&0\\0&-1&-5&2&1&0&-2&0\\0&1&5&-1&0&0&1&1\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[\text{第 2 列の掃き出し}]{\text{(4,2) 成分による}}\left(\begin{array}{cccc|cccc}1&0&-3&1&0&0&0&-1\\0&0&1&0&0&1&-2&1\\0&0&0&1&1&0&-1&1\\0&1&5&-1&0&0&1&1\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[\text{入れ替え}]{\text{第 2 行と第 4 行の}}\left(\begin{array}{cccc|cccc}1&0&-3&1&0&0&0&-1\\0&1&5&-1&0&0&1&1\\0&0&0&1&1&0&-1&1\\0&0&1&0&0&1&-2&1\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[\text{第 3 列の掃き出し}]{\text{(4,3) 成分による}}\left(\begin{array}{cccc|cccc}1&0&0&1&0&3&-6&2\\0&1&0&-1&0&-5&11&-4\\0&0&0&1&1&0&-1&1\\0&0&1&0&0&1&-2&1\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[\text{入れ替え}]{\text{第 3 行と第 4 行の}}\left(\begin{array}{cccc|cccc}1&0&0&1&0&3&-6&2\\0&1&0&-1&0&-5&11&-4\\0&0&1&0&0&1&-2&1\\0&0&0&1&1&0&-1&1\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[\text{第 4 列の掃き出し}]{\text{(4,4) 成分による}}\left(\begin{array}{cccc|cccc}1&0&0&0&-1&3&-5&1\\0&1&0&0&1&-5&10&-3\\0&0&1&0&0&1&-2&1\\0&0&0&1&1&0&-1&1\end{array}\right)$$

となる．よって，$A^{-1}=\begin{pmatrix}-1&3&-5&1\\1&-5&10&-3\\0&1&-2&1\\1&0&-1&1\end{pmatrix}$ である．

（解答終）

逆行列を計算した後には，必ず検算すること．具体的には

$$AA^{-1}=\begin{pmatrix}2&1&-1&2\\3&2&2&1\\1&1&2&0\\-1&0&3&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1&3&-5&1\\1&-5&10&-3\\0&1&-2&1\\1&0&-1&1\end{pmatrix}$$

を実際に計算して，単位行列になることを確認すればよい．行基本変形が正しいかを最初から順に確認するよりも，こちらの方が確実である．

3　逆行列の計算例

例題 3.1.　次の行列 A が正則かどうか判定し，正則な場合は逆行列を求めよ．

(1) $A=\begin{pmatrix}1&2&0\\2&3&-1\\0&1&2\end{pmatrix}$　　(2) $A=\begin{pmatrix}2&-3&1\\1&0&2\\1&-1&1\end{pmatrix}$

（解答）

(1)　右側に単位行列をつけて行基本変形すると

$$(A\,|\,E_3)=\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&2&0&1&0&0\\2&3&-1&0&1&0\\0&1&2&0&0&1\end{array}\right)\xrightarrow[\text{第 1 列の掃き出し}]{\text{(1,1) 成分による}}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&2&0&1&0&0\\0&-1&-1&-2&1&0\\0&1&2&0&0&1\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{\text{第 2 行を }(-1)\text{ 倍}}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&2&0&1&0&0\\0&1&1&2&-1&0\\0&1&2&0&0&1\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[\text{第 2 列の掃き出し}]{\text{(2,2) 成分による}}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&-2&-3&2&0\\0&1&1&2&-1&0\\0&0&1&-2&1&1\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[\text{第 3 列の掃き出し}]{\text{(3,3) 成分による}}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&-7&4&2\\0&1&0&4&-2&-1\\0&0&1&-2&1&1\end{array}\right)$$

となるから，A は正則で，$A^{-1}=\begin{pmatrix}-7&4&2\\4&-2&-1\\-2&1&1\end{pmatrix}$ である．

(2)　右側に単位行列をつけて行基本変形すると

$$(A\,|\,E_3)=\left(\begin{array}{ccc|ccc}2&-3&1&1&0&0\\1&0&2&0&1&0\\1&-1&1&0&0&1\end{array}\right)\xrightarrow[\text{第 1 列の掃き出し}]{\text{(2,1) 成分による}}\left(\begin{array}{ccc|ccc}0&-3&-3&1&-2&0\\1&0&2&0&1&0\\0&-1&-1&0&-1&1\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[\text{入れ替え}]{\text{第 1 行と第 2 行の}}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&2&0&1&0\\0&-3&-3&1&-2&0\\0&-1&-1&0&-1&1\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[\text{第 2 列の掃き出し}]{\text{(3,2) 成分による}}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&2&0&1&0\\0&0&0&1&1&-3\\0&-1&-1&0&-1&1\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[\text{入れ替え}]{\text{第 2 行と第 3 行の}}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&2&0&1&0\\0&-1&-1&0&-1&1\\0&0&0&1&1&-3\end{array}\right)$$

となり，左半分の階数が 2 であるから，A は正則でない．

（解答終）

繰り返しになるが，逆行列を計算した後には必ず検算すること．(1) では

$$AA^{-1}=\begin{pmatrix}1&2&0\\2&3&-1\\0&1&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-7&4&2\\4&-2&-1\\-2&1&1\end{pmatrix}$$

を実際に計算して，単位行列になることを確認すればよい．

例題 3.2.　次の行列 A が正則かどうか判定し，正則な場合は逆行列を求めよ．

(1) $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 4 & -1 \\ -1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$　　(2) $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & 3 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

（解答）

(1)　右側に単位行列をつけて行基本変形すると

$$(A \,|\, E_3) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & -2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[\text{第 1 列の掃き出し}]{\text{(1,1) 成分による}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & -7 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 3 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[\text{第 3 行に加える}]{\text{第 2 行を 3/7 倍して}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & -7 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2/7 & 3/7 & 1 \end{array}\right)$$

となり，左半分の階数が 2 であるから，A は正則でない．

(2)　右側に単位行列をつけて行基本変形すると

$$(A \,|\, E_3) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 2 & 5 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[\text{第 1 列の掃き出し}]{\text{(3,1) 成分による}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 2 & 11 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[\text{入れ替え}]{\text{第 1 行と第 3 行の}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 0 & 3 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 11 & 1 & 0 & 2 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[\text{第 2 列の掃き出し}]{\text{(2,2) 成分による}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 0 & 3 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 1 & -2 & 2 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[\text{第 3 行を 1/5 倍}]{\text{第 1 行を } (-1) \text{ 倍}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -3 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1/5 & -2/5 & 2/5 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[\text{第 3 列の掃き出し}]{\text{(3,3) 成分による}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 3/5 & -6/5 & 1/5 \\ 0 & 1 & 0 & -3/5 & 11/5 & -6/5 \\ 0 & 0 & 1 & 1/5 & -2/5 & 2/5 \end{array}\right)$$

となるから，A は正則で

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 3/5 & -6/5 & 1/5 \\ -3/5 & 11/5 & -6/5 \\ 1/5 & -2/5 & 2/5 \end{pmatrix} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 3 & -6 & 1 \\ -3 & 11 & -6 \\ 1 & -2 & 2 \end{pmatrix}$$

である．

（解答終）

逆行列の成分に分数が現れる場合には，分母を前に出した形を答えとした方が検算や後の設問で便利なことが多い．なお，前までの設問はうまく問題を作ってあるだけで，逆行列の成分に分数が現れるのが普通である．その理由は第 7 章 5 節（余因子行列を用いた逆行列の公式）を学習した後に考えてみてほしい．

例題 3.3. 次の行列 A が正則かどうか判定し，正則な場合は逆行列を求めよ．

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 0 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

（解答） 右側に単位行列をつけて行基本変形すると

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 0 & 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 3 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 3 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[\text{第 1 列の掃き出し}]{\text{(2,1) 成分による}} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 0 & 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 3 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & -3 & 0 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[\text{入れ替え}]{\text{第 1 行と第 2 行の}} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 2 & 3 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & -3 & 0 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[\text{第 2 列の掃き出し}]{\text{(2,2) 成分による}} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 2 & 3 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -6 & -6 & -2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & -9 & -2 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{\text{第 3 行を } (-1/6) \text{ 倍}} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 2 & 3 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1/3 & 1/6 & -1/6 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & -9 & -2 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[\text{第 3 列の掃き出し}]{\text{(3,3) 成分による}} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 1 & -2/3 & 2/3 & 1/3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1/3 & -1/3 & 1/3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1/3 & 1/6 & -1/6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -6 & -1 & -1/2 & -1/2 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{\text{第 4 行を } (-1/6) \text{ 倍}} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 1 & -2/3 & 2/3 & 1/3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1/3 & -1/3 & 1/3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1/3 & 1/6 & -1/6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1/6 & 1/12 & 1/12 & -1/6 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[\text{第 4 列の掃き出し}]{\text{(4,4) 成分による}} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & -5/6 & 7/12 & 1/4 & 1/6 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1/6 & -5/12 & 1/4 & 1/6 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1/6 & 1/12 & -1/4 & 1/6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1/6 & 1/12 & 1/12 & -1/6 \end{array}\right)$$

となるから，A は正則で

$$A^{-1} = \frac{1}{12}\begin{pmatrix} -10 & 7 & 3 & 2 \\ 2 & -5 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & -3 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

である．

（解答終）

第 7 章　行列式

1　2 次行列式

1.1　2 次行列式の定義

正方行列に対しては重要な量である行列式が定義される．一般の正方行列に対する行列式の定義はやや複雑なので，まずは 2 次正方行列に限定して説明する．

定義 1.1.（2 次行列式）

2 次正方行列 $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ に対して，その**行列式 (determinant)** を

$$\det A \coloneqq ad - bc$$

で定義する．正方行列 A の行列式を簡単に $|A|$ で表すこともある（絶対値と混同しないように注意．行列式は 0 以上の値とは限らない）．

さらに，ベクトル $\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$ を並べてできる 2 次正方行列

$$A = \begin{pmatrix} \boldsymbol{a} & \boldsymbol{b} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix}$$

に対して，その行列式を

$$\det A = |A| = \begin{vmatrix} \boldsymbol{a} & \boldsymbol{b} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} (= a_1 b_2 - a_2 b_1)$$

のように書く．

天下り的に行列式の定義を与えたので，その意味を考えていくことにする．まず重要な性質として，2 次正方行列 $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ が正則である（逆行列をもつ）ための必要十分条件が

$$ad - bc \neq 0$$

であったから，これは

$$\det A \neq 0$$

と表せる．この事実から，行列式が重要な値であることが示唆される．

1.2　2 次行列式の幾何学的意味

2 次正方行列 $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ に対して，$\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix}$，$\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix}$ とおき，行列式の意味を幾何学的な視点から考察してみる．

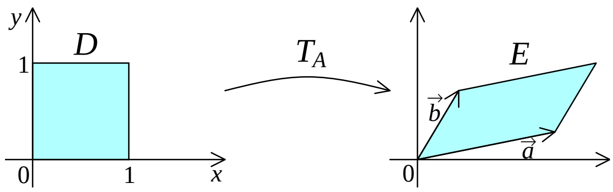
行列 A の定める $\mathbb{R}^2$ の線形変換 T_A を $T_A(\boldsymbol{x}) = A\boldsymbol{x}$ とおくと，$\mathbb{R}^2$ の基本ベクトル $\boldsymbol{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$，$\boldsymbol{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ に対して

$$T_A(\boldsymbol{e}_1) = A\boldsymbol{e}_1 = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix} = \boldsymbol{a}, \qquad T_A(\boldsymbol{e}_2) = A\boldsymbol{e}_2 = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix} = \boldsymbol{b}$$

となる．

$\det A = ad - bc \neq 0$ のときには，$\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ はともに $\boldsymbol{0}$ でなく，平行でもないから 1 次独立である．よって，この 2 本のベクトルから作られる平行四辺形 E の面積 S は

$$S = 2 \cdot \frac{1}{2}\sqrt{\|\boldsymbol{a}\|^2\|\boldsymbol{b}\|^2 - (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})^2} = |ad - bc| = |\det A|$$

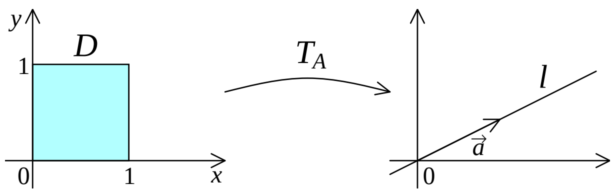


となる．また，$\boldsymbol{e}_1$ と $\boldsymbol{e}_2$ がつくる正方形 D に属する点の位置ベクトルは $s\boldsymbol{e}_1 + t\boldsymbol{e}_2$ $(s, t \in [0, 1])$ と表せるから

$$T_A(s\boldsymbol{e}_1 + t\boldsymbol{e}_2) = s\,T_A(\boldsymbol{e}_1) + t\,T_A(\boldsymbol{e}_2) = s\boldsymbol{a} + t\boldsymbol{b} \in E \qquad (s, t \in [0, 1])$$

であり，正方形 D は線形変換 T_A により平行四辺形 E に写ることがわかる．正方形 D の面積は 1，平行四辺形 E の面積は $|\det A|$ であるから，線形変換 T_A により図形の面積は $|\det A|$ 倍されていることになる．同様にして，1 辺の長さが 1 以外の正方形でも，写された平行四辺形の面積は元の正方形の $|\det A|$ 倍である．正確には微分積分学の重積分の単元で扱うことであるが，一般の図形でも（小学校で円の面積を方眼紙で考えたように）小さな正方形を敷き詰めて考えることにより， T_A で写された図形の面積は $|\det A|$ 倍されることがわかる．

$\det A = ad - bc = 0$ のときを考える．もし $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{b} = \boldsymbol{0}$ ならば，$A = O$ となり T_A により平面内のすべての点は原点に写る．そこで，$\boldsymbol{a} \neq \boldsymbol{0}$ の場合を考えることにする．このとき，$\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ は平行であるから，$\boldsymbol{b} = k\boldsymbol{a}$ となる実数 k が存在する（$\boldsymbol{b} = \boldsymbol{0}$ でも $k = 0$ とすればよい）．よって，$\mathbb{R}^2$ の任意のベクトル $x\boldsymbol{e}_1 + y\boldsymbol{e}_2$ を T_A で写すと



$$T_A(x\boldsymbol{e}_1 + y\boldsymbol{e}_2) = x\,T_A(\boldsymbol{e}_1) + y\,T_A(\boldsymbol{e}_2) = x\boldsymbol{a} + y\boldsymbol{b} = (x + ky)\boldsymbol{a}$$

となる．よって，平面の任意の点は原点を通り $\boldsymbol{a}$ を方向ベクトルとする直線 l 上の点に写ることになる．このときは正方形や円など有界などんな図形を写しても線分となり潰れてしまう．便宜上，この場合は線分の面積が 0 であると約束すれば，線形変換 T_A により図形の面積は $|\det A| = 0$ 倍されていることになる．

また，このときは線分に潰れた図形だけの情報から元の図形を復元することはできない（どのように潰れたかわからないため．円でも楕円でも正方形でも直線上に同じ影となることはある）．このことからも，逆行列 A^{-1} が存在しないことがわかる．

行列 A による変換の面積変換倍率が $|\det A|$ であることがわかった．次に，行列式 $\det A$ の正負が何によって決まるかを考えてみる．そのヒントとなるものは 2 個のベクトル $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ のなす角である．ただし，ベクトル $\boldsymbol{a}$ を原点を中心とする回転で $\boldsymbol{b}$ と同じ方向に重ね合わせるときの反時計回りの回転角を θ $(-\pi < \theta \leqq \pi)$ とする．このとき，$\boldsymbol{b}$ は $\boldsymbol{a}$ を原点中心に θ だけ回転して，さらに $\dfrac{\|\boldsymbol{b}\|}{\|\boldsymbol{a}\|}$ 倍したものであるから

$$\boldsymbol{b} = \frac{\|\boldsymbol{b}\|}{\|\boldsymbol{a}\|} R(\theta)\boldsymbol{a}$$

と表せる．これを計算すれば

$$\boldsymbol{b} = \frac{\|\boldsymbol{b}\|}{\|\boldsymbol{a}\|} R(\theta)\boldsymbol{a} = \frac{\|\boldsymbol{b}\|}{\|\boldsymbol{a}\|} \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \frac{\|\boldsymbol{b}\|}{\|\boldsymbol{a}\|} \begin{pmatrix} a_1\cos\theta - a_2\sin\theta \\ a_1\sin\theta + a_2\cos\theta \end{pmatrix}$$

であるから

$$b_1 = \frac{\|\boldsymbol{b}\|}{\|\boldsymbol{a}\|}(a_1\cos\theta - a_2\sin\theta), \qquad b_2 = \frac{\|\boldsymbol{b}\|}{\|\boldsymbol{a}\|}(a_1\sin\theta + a_2\cos\theta)$$

となる．よって

$$\begin{aligned} a_1b_2 - a_2b_1 &= a_1\left\{\frac{\|\boldsymbol{b}\|}{\|\boldsymbol{a}\|}(a_1\sin\theta + a_2\cos\theta)\right\} - a_2\left\{\frac{\|\boldsymbol{b}\|}{\|\boldsymbol{a}\|}(a_1\cos\theta - a_2\sin\theta)\right\} \\ &= \frac{\|\boldsymbol{b}\|}{\|\boldsymbol{a}\|}(a_1^2 + a_2^2)\sin\theta \\ &= \|\boldsymbol{a}\|\|\boldsymbol{b}\|\sin\theta \end{aligned}$$

が成り立つ．

したがって，$\sin\theta$ の符号で

$$\det A = \|\boldsymbol{a}\|\|\boldsymbol{b}\|\sin\theta$$

の符号が決まるので

$$\begin{cases} 0 < \theta < \pi & \Longrightarrow \quad \det A > 0 \\ -\pi < \theta < 0 & \Longrightarrow \quad \det A < 0 \\ \theta = 0, \pi & \Longrightarrow \quad \det A = 0 \end{cases}$$

が得られる．つまり簡単にまとめれば，$\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ が平行ならば $\det A = 0$ で，そうでないときは $\boldsymbol{a}$ を反時計回りに回して $\boldsymbol{b}$ に重なる方が近ければ正，時計回りの方なら負となる．

これを図形的に説明すれば，写した後に図形が裏返しになるときが $\det A < 0$ であり，そのまま伸縮・回転などした場合には $\det A > 0$ となっている．

まとめると，$A = \begin{pmatrix} \boldsymbol{a} & \boldsymbol{b} \end{pmatrix}$ の行列式 $\det A$ は『$\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ の張る平行四辺形の符号付き面積』である．

1.3　2 次行列式の性質と特徴づけ

次に行列式の重要な性質を調べていくことにする．いずれの性質も，成分計算により直接証明できるので各自で証明を試みてみよ．

(1) （多重線形性）

任意の平面ベクトル $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{a}'$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{b}'$ に対して

$$\left|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{a}' \quad \boldsymbol{b}\right| = \left|\boldsymbol{a} \quad \boldsymbol{b}\right| + \left|\boldsymbol{a}' \quad \boldsymbol{b}\right|$$

$$\left|\boldsymbol{a} \quad \boldsymbol{b}+\boldsymbol{b}'\right| = \left|\boldsymbol{a} \quad \boldsymbol{b}\right| + \left|\boldsymbol{a} \quad \boldsymbol{b}'\right|$$

が成り立つ．また，任意のスカラー α に対して

$$\left|\alpha\boldsymbol{a} \quad \boldsymbol{b}\right| = \alpha\left|\boldsymbol{a} \quad \boldsymbol{b}\right| = \left|\boldsymbol{a} \quad \alpha\boldsymbol{b}\right|$$

が成り立つ．このように列ベクトルの和を分けたり，スカラー倍を前に出せることを**多重線形性**という．

これらの等式は，$\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2$ を実数として

$$\left|\alpha_1\boldsymbol{a}+\alpha_2\boldsymbol{a}' \quad \boldsymbol{b}\right| = \alpha_1\left|\boldsymbol{a} \quad \boldsymbol{b}\right| + \alpha_2\left|\boldsymbol{a}' \quad \boldsymbol{b}\right|, \qquad \left|\boldsymbol{a} \quad \beta_1\boldsymbol{b}+\beta_2\boldsymbol{b}'\right| = \beta_1\left|\boldsymbol{a} \quad \boldsymbol{b}\right| + \beta_2\left|\boldsymbol{a} \quad \boldsymbol{b}'\right|$$

とまとめることができ，さらに 1 本の式で表せば

$$\left|\alpha_1\boldsymbol{a}+\alpha_2\boldsymbol{a}' \quad \beta_1\boldsymbol{b}+\beta_2\boldsymbol{b}'\right| = \alpha_1\beta_1\left|\boldsymbol{a} \quad \boldsymbol{b}\right| + \alpha_1\beta_2\left|\boldsymbol{a} \quad \boldsymbol{b}'\right| + \alpha_2\beta_1\left|\boldsymbol{a}' \quad \boldsymbol{b}\right| + \alpha_2\beta_2\left|\boldsymbol{a}' \quad \boldsymbol{b}'\right|$$

となる．多重線形性はこの形で用いることも多いが，まずは最初に述べた和と実数倍との関係を理解しておくこと．

(2) (退化性)

任意の平面ベクトル $\boldsymbol{a}$ に対して

$$\left|\boldsymbol{a} \quad \boldsymbol{a}\right| = 0$$

が成り立つ．この性質を**退化性**という．これは図形的には 2 本の同じベクトルから平行四辺形を作ろうとしても線分となってしまい，その面積が 0 であることを意味している．

(3) （正規化条件）

基本ベクトル $\boldsymbol{e}_1 = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{e}_2 = \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$ に対して

$$\left|\boldsymbol{e}_1 \quad \boldsymbol{e}_2\right| = 1$$

が成り立つ．この性質は $|E_2| = 1$ と表せて，**正規化条件**という．これは図形的には 1 辺の長さが 1 の正方形の面積が 1 であることを意味している．

(4) （交代性）

任意の平面ベクトル $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ に対して

$$\left|\boldsymbol{a} \quad \boldsymbol{b}\right| = -\left|\boldsymbol{b} \quad \boldsymbol{a}\right|$$

が成り立つ．このようにベクトルを入れ替えると符号が変わることを**交代性**という．成分計算でも示せるが，行列式の符号の決まり方からもこの事実が成り立つことを確認できる．

ここまで 2 次行列式がみたす性質を調べてきた．逆に，2 次正方行列 A を代入すると実数が出てくる関数 $f(A)$ $(A \in M_2(\mathbb{R}))$ で，多重線形性，退化性，正規化条件の 3 つをすべてみたすものは，行列式に限ることがわかる．なお，本来は $A = \begin{pmatrix} \boldsymbol{a} & \boldsymbol{b} \end{pmatrix}$ に対して

$$f(A) = f(\begin{pmatrix} \boldsymbol{a} & \boldsymbol{b} \end{pmatrix})$$

と書くべきであるが，かっこが多く見にくいためにここでは簡単に

$$f(A) = f(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$$

と表すことにする．

命題 1.2. （2 次行列式の特徴づけ）
2 次正方行列 A に実数を対応させる関数 $f(A)$ で，多重線形性，退化性，正規化条件の 3 つをすべてみたすならば

$$f(A) = \det A$$

が成り立つ．

証明． 任意の平面ベクトル $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ に対して，多重線形性より

$$f(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}, \boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}) = f(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{a}) + f(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) + f(\boldsymbol{b}, \boldsymbol{a}) + f(\boldsymbol{b}, \boldsymbol{b})$$

となる．ここで，退化性より 2 本の列ベクトルが同じだと 0 になるので

$$f(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}, \boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}) = f(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{a}) = f(\boldsymbol{b}, \boldsymbol{b}) = 0$$

である．よって

$$f(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) + f(\boldsymbol{b}, \boldsymbol{a}) = 0$$

となり，交代性

$$f(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = -f(\boldsymbol{b}, \boldsymbol{a})$$

が成り立つ．

ゆえに，任意の 2 次正方行列 $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ に対して

$$\begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix} = a\boldsymbol{e}_1 + c\boldsymbol{e}_2, \qquad \begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix} = b\boldsymbol{e}_1 + d\boldsymbol{e}_2$$

と見れば，多重線形性より

$$\begin{aligned} f(A) &= f(a\boldsymbol{e}_1 + c\boldsymbol{e}_2, b\boldsymbol{e}_1 + d\boldsymbol{e}_2) \\ &= ab\, f(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_1) + ad\, f(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2) + bc\, f(\boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_1) + cd\, f(\boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_2) \end{aligned}$$

となる．ここで，退化性より

$$f(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_1) = f(\boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_2) = 0$$

である．また，正規化条件と交代性より

$$f(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2) = f(E_2) = 1, \qquad f(\boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_1) = -f(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2) = -1$$

だから

$$f(A) = ab \cdot 0 + ad \cdot 1 + bc \cdot (-1) + cd \cdot 0 = ad - bc$$

が得られる．よって，条件をすべてみたす関数は 2 次行列式 $f(A) = \det A$ に限られる． □

2　3次行列式

2.1　3次行列式の定義

命題 1.2 で見たように，2 次正方行列 $A = \begin{pmatrix}\boldsymbol{a} & \boldsymbol{b}\end{pmatrix}$ に対して，その列ベクトル $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ が張る図形の符号つき面積の式を考えると，それは性質『多重線形性』『退化性』『正規化条件』をみたし，さらに具体的な公式として行列式が現れることがわかる．そこで，この事実を参考にして 3 次正方行列の場合に列ベクトルが作る平行六面体の符号付き体積を動機づけとして，これらの性質をみたすものとして行列式を定義する．

定義 2.1. （**3 次行列式**）

3 次正方行列 A に対して，スカラーを対応させる関数で以下の 3 条件をみたすものを A の行列式といい，$\det A$ または $|A|$ で表す．

(I) （列に関する多重線形性）

各列ベクトルに関して線形性が成り立つ．つまり，例えば第 1 列について，α と β をスカラーとすれば

$$\begin{vmatrix}\alpha\boldsymbol{a}_1 + \beta\boldsymbol{b} & \boldsymbol{a}_2 & \boldsymbol{a}_3\end{vmatrix} = \alpha\begin{vmatrix}\boldsymbol{a}_1 & \boldsymbol{a}_2 & \boldsymbol{a}_3\end{vmatrix} + \beta\begin{vmatrix}\boldsymbol{b} & \boldsymbol{a}_2 & \boldsymbol{a}_3\end{vmatrix}$$

が成り立つ．これを成分で表せば

$$\begin{vmatrix}\alpha a_{11} + \beta b_1 & a_{12} & a_{13} \\ \alpha a_{21} + \beta b_2 & a_{22} & a_{23} \\ \alpha a_{31} + \beta b_3 & a_{32} & a_{33}\end{vmatrix} = \alpha\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{vmatrix} + \beta\begin{vmatrix}b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33}\end{vmatrix}$$

となる．第 2 列と第 3 列についても同様の性質が成り立つ．

(II) （退化性）

$A = \begin{pmatrix}\boldsymbol{a}_1 & \boldsymbol{a}_2 & \boldsymbol{a}_3\end{pmatrix}$ の 3 個の列ベクトル $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3$ の中で同じものがあれば

$$\det A = 0$$

が成り立つ．

(III) （正規化条件）

3 次単位行列 $E_3 = \begin{pmatrix}1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$ に対して

$$\det(E_3) = 1$$

が成り立つ．

これで 3 次行列式の定義は与えられたが，2 次行列式

$$\begin{vmatrix}a & b \\ c & d\end{vmatrix} = ad - bc$$

のような具体的な公式はまだわからない．また，厳密な話をすれば，上の定義の 3 条件を全てみたすものが本当にあるかわからないし，2 個以上あるかもしれない．この点を明確にして行列式の正体に迫るために，次節では 3 次行列式の表示公式について考える．

なお，命題 1.2 の証明における議論と同様にして，どれか 2 つの列を入れ替えると

$$\begin{vmatrix}\boldsymbol{a} & \boldsymbol{b} & \boldsymbol{c}\end{vmatrix} = -\begin{vmatrix}\boldsymbol{b} & \boldsymbol{a} & \boldsymbol{c}\end{vmatrix}, \qquad \begin{vmatrix}\boldsymbol{a} & \boldsymbol{b} & \boldsymbol{c}\end{vmatrix} = -\begin{vmatrix}\boldsymbol{c} & \boldsymbol{b} & \boldsymbol{a}\end{vmatrix}, \qquad \begin{vmatrix}\boldsymbol{a} & \boldsymbol{b} & \boldsymbol{c}\end{vmatrix} = -\begin{vmatrix}\boldsymbol{a} & \boldsymbol{c} & \boldsymbol{b}\end{vmatrix}$$

のように行列式は -1 倍となることがわかる．これを交代性という．

2.2　サラスの方法

次に，3 次行列式について具体的な公式を導くことを試みる．これから先の議論を理解すれば，後で n 次行列式について同様の議論を行う際の見通しがよくなる．やや抽象的な部分であるが頑張ってほしい．

行列

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

の行列式を命題 1.2 の証明のように求めてみる．まず抽象的な定義 2.1 の多重線形性を用いるために

$$\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ a_{31} \end{pmatrix} = a_{11} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + a_{21} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + a_{31} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = a_{11}\boldsymbol{e}_1 + a_{21}\boldsymbol{e}_2 + a_{31}\boldsymbol{e}_3$$

$$\begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ a_{32} \end{pmatrix} = a_{12}\boldsymbol{e}_1 + a_{22}\boldsymbol{e}_2 + a_{32}\boldsymbol{e}_3$$

$$\begin{pmatrix} a_{13} \\ a_{23} \\ a_{33} \end{pmatrix} = a_{13}\boldsymbol{e}_1 + a_{23}\boldsymbol{e}_2 + a_{33}\boldsymbol{e}_3$$

のように各列を基本ベクトル $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3$ の 1 次結合で表しておく．

このとき，A の行列式は多重線形性より

$$\begin{aligned} \det A &= \begin{vmatrix} a_{11}\boldsymbol{e}_1 + a_{21}\boldsymbol{e}_2 + a_{31}\boldsymbol{e}_3 & a_{12}\boldsymbol{e}_1 + a_{22}\boldsymbol{e}_2 + a_{32}\boldsymbol{e}_3 & a_{13}\boldsymbol{e}_1 + a_{23}\boldsymbol{e}_2 + a_{33}\boldsymbol{e}_3 \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} \sum_{i=1}^{3} a_{i1}\boldsymbol{e}_i & \sum_{j=1}^{3} a_{j2}\boldsymbol{e}_j & \sum_{k=1}^{3} a_{k3}\boldsymbol{e}_k \end{vmatrix} \\ &= \sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3}\sum_{k=1}^{3} a_{i1}a_{j2}a_{k3} \begin{vmatrix} \boldsymbol{e}_i & \boldsymbol{e}_j & \boldsymbol{e}_k \end{vmatrix} \end{aligned}$$

と $3^3 = 27$ 個の項が現れる．これらをすべて書き下すと大変だが， 実際には 3 本の列ベクトルのうち同じベクトルが並んでいると，その項は行列式の退化性より 0 になる．例えば，$i = j = k = 1$ の項は

$$\begin{vmatrix} \boldsymbol{e}_i & \boldsymbol{e}_j & \boldsymbol{e}_k \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{e}_1 & \boldsymbol{e}_1 & \boldsymbol{e}_1 \end{vmatrix} = 0$$

となる．他にも例えば

$$\begin{vmatrix} \boldsymbol{e}_1 & \boldsymbol{e}_1 & \boldsymbol{e}_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{e}_3 & \boldsymbol{e}_2 & \boldsymbol{e}_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{e}_2 & \boldsymbol{e}_1 & \boldsymbol{e}_2 \end{vmatrix} = 0$$

のようになる．

結局，多重線形性で展開した後は

$$\begin{aligned} \det A = a_{11}a_{22}a_{33} \begin{vmatrix} \boldsymbol{e}_1 & \boldsymbol{e}_2 & \boldsymbol{e}_3 \end{vmatrix} + a_{11}a_{32}a_{23} \begin{vmatrix} \boldsymbol{e}_1 & \boldsymbol{e}_3 & \boldsymbol{e}_2 \end{vmatrix} + a_{21}a_{12}a_{33} \begin{vmatrix} \boldsymbol{e}_2 & \boldsymbol{e}_1 & \boldsymbol{e}_3 \end{vmatrix} \\ + a_{21}a_{32}a_{13} \begin{vmatrix} \boldsymbol{e}_2 & \boldsymbol{e}_3 & \boldsymbol{e}_1 \end{vmatrix} + a_{31}a_{12}a_{23} \begin{vmatrix} \boldsymbol{e}_3 & \boldsymbol{e}_1 & \boldsymbol{e}_2 \end{vmatrix} + a_{31}a_{22}a_{13} \begin{vmatrix} \boldsymbol{e}_3 & \boldsymbol{e}_2 & \boldsymbol{e}_1 \end{vmatrix} \end{aligned}$$

のように 6 個の項のみが残る．これは添字の (i, j, k) に 1,2,3 を並べる順列分だけ項が残るため $3! = 6$ 個現れると理解することができる．一度各自で手を動かして確認してみるとよい．

後は基本ベクトルを並べた行列の行列式の値がわかればよい．まずは正規化条件より

$$\begin{vmatrix} \boldsymbol{e}_1 & \boldsymbol{e}_2 & \boldsymbol{e}_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$$

となる．他の項については列ベクトルを入れ替えて単位行列に変形すればよい．見やすくするために，ここでは隣りどうしの列ベクトルの入れ替えのみを行うことにすると，1 回の入れ替えで行列式が -1 倍されることに注意して

$$\begin{aligned}
\begin{vmatrix} \boldsymbol{e}_1 & \boldsymbol{e}_3 & \boldsymbol{e}_2 \end{vmatrix} &= -\begin{vmatrix} \boldsymbol{e}_1 & \boldsymbol{e}_2 & \boldsymbol{e}_3 \end{vmatrix} = -1 \\
\begin{vmatrix} \boldsymbol{e}_2 & \boldsymbol{e}_1 & \boldsymbol{e}_3 \end{vmatrix} &= -\begin{vmatrix} \boldsymbol{e}_1 & \boldsymbol{e}_2 & \boldsymbol{e}_3 \end{vmatrix} = -1 \\
\begin{vmatrix} \boldsymbol{e}_2 & \boldsymbol{e}_3 & \boldsymbol{e}_1 \end{vmatrix} &= -\begin{vmatrix} \boldsymbol{e}_2 & \boldsymbol{e}_1 & \boldsymbol{e}_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{e}_1 & \boldsymbol{e}_2 & \boldsymbol{e}_3 \end{vmatrix} = 1 \\
\begin{vmatrix} \boldsymbol{e}_3 & \boldsymbol{e}_1 & \boldsymbol{e}_2 \end{vmatrix} &= -\begin{vmatrix} \boldsymbol{e}_1 & \boldsymbol{e}_3 & \boldsymbol{e}_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{e}_1 & \boldsymbol{e}_2 & \boldsymbol{e}_3 \end{vmatrix} = 1 \\
\begin{vmatrix} \boldsymbol{e}_3 & \boldsymbol{e}_2 & \boldsymbol{e}_1 \end{vmatrix} &= -\begin{vmatrix} \boldsymbol{e}_3 & \boldsymbol{e}_1 & \boldsymbol{e}_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{e}_1 & \boldsymbol{e}_3 & \boldsymbol{e}_2 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} \boldsymbol{e}_1 & \boldsymbol{e}_2 & \boldsymbol{e}_3 \end{vmatrix} = -1
\end{aligned}$$

となる（入れ替えた番号を赤字で記載した）．2 回入れ替えた場合にはマイナスが 2 回現れて結局プラスになることに注意すること．結局のところ，基本ベクトルを重複なく並べた行列式の値について，隣りどうしの列ベクトルを入れ替えて単位行列へ変形する際の操作が偶数回なら 1，奇数回なら -1 となる．

まとめると，3 次行列式は

$$\begin{aligned}
|A| &= a_{11}a_{22}a_{33}\begin{vmatrix} \boldsymbol{e}_1 & \boldsymbol{e}_2 & \boldsymbol{e}_3 \end{vmatrix} + a_{11}a_{32}a_{23}\begin{vmatrix} \boldsymbol{e}_1 & \boldsymbol{e}_3 & \boldsymbol{e}_2 \end{vmatrix} + a_{21}a_{12}a_{33}\begin{vmatrix} \boldsymbol{e}_2 & \boldsymbol{e}_1 & \boldsymbol{e}_3 \end{vmatrix} \\
&\qquad + a_{21}a_{32}a_{13}\begin{vmatrix} \boldsymbol{e}_2 & \boldsymbol{e}_3 & \boldsymbol{e}_1 \end{vmatrix} + a_{31}a_{12}a_{23}\begin{vmatrix} \boldsymbol{e}_3 & \boldsymbol{e}_1 & \boldsymbol{e}_2 \end{vmatrix} + a_{31}a_{22}a_{13}\begin{vmatrix} \boldsymbol{e}_3 & \boldsymbol{e}_2 & \boldsymbol{e}_1 \end{vmatrix} \\
&= a_{11}a_{22}a_{33}\cdot 1 + a_{11}a_{32}a_{23}\cdot(-1) + a_{21}a_{12}a_{33}\cdot(-1) \\
&\qquad + a_{21}a_{32}a_{13}\cdot 1 + a_{31}a_{12}a_{23}\cdot 1 + a_{31}a_{22}a_{13}\cdot(-1) \\
&= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{21}a_{32}a_{13} + a_{31}a_{12}a_{23} - a_{11}a_{32}a_{23} - a_{21}a_{12}a_{33} - a_{31}a_{22}a_{13}
\end{aligned}$$

となる．これは行列の左上から斜めに成分をかけたものと右上から斜めに成分をかけたものに符号をつけたものの和となっている．このような計算法はサラスの方法と呼ばれる．

定理 2.2. （3 次行列式の形）

3 次行列式について，以下が成り立つ．

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{21}a_{32}a_{13} + a_{31}a_{12}a_{23} - a_{11}a_{32}a_{23} - a_{21}a_{12}a_{33} - a_{31}a_{22}a_{13}$$

この公式の有効な場面は多いが，具体的な行列式の計算では大変なこともある．例えば，計算例を 1 つ挙げると

$$\begin{vmatrix} 8 & 1 & 6 \\ 3 & 5 & 7 \\ 4 & 9 & 2 \end{vmatrix} = 8\cdot 5\cdot 2 + 3\cdot 9\cdot 6 + 4\cdot 7\cdot 1 - 4\cdot 5\cdot 6 - 1\cdot 3\cdot 2 - 8\cdot 7\cdot 9 = -360$$

となるが，このように計算するとミスが起こりやすい．また，もし成分の値が大きいと掛け算をとってから足し引きするのも大変である．

さらに，後で 4 次行列式を同様の方法で計算しようとすると，4 個の数字の積からなる 24 項の足し算・引き算を計算しなければならない（なぜ 24 項となるかを考えてみよ）．5 次行列式ならば 120 項を考えなければならず，もはやこれは手計算で実行するには現実的な方法ではない．

ここでサラスの公式を振り返ると，行列の成分に 0 が多ければ計算は簡単そうである．そこで，行列の基本変形を用いて成分に 0 が多い行列に変形することで，簡単に行列式を計算する方法も次に考察したい．

2.3　3 次行列式のみたす性質

まず，行列式はその定義から列基本変形との相性が良いことがわかる．

定理 2.3.（列基本変形と行列式の関係）
3 次正方行列に対して，列基本変形と行列式について以下が成り立つ．

(1) ある列に別の列のスカラー倍を加えても行列式は変わらない

(2) ある列を α 倍すると行列式も α 倍される（α がくくり出される）

(3) 列を入れ替えると行列式は -1 倍される

特にスカラー倍で $\alpha = 0$ とすれば，すべて成分が 0 である列があれば行列式の値は 0 となる．

証明.　3 次正方行列を $A = \begin{pmatrix} \boldsymbol{a}_1 & \boldsymbol{a}_2 & \boldsymbol{a}_3 \end{pmatrix}$ と列ベクトル分解する．

(1)　例えば A の第 1 列に第 2 列の α 倍を加えた行列を B とすると，行列式の多重線形性と退化性より

$$\begin{aligned} \det B &= \begin{vmatrix} \boldsymbol{a}_1 + \alpha \boldsymbol{a}_2 & \boldsymbol{a}_2 & \boldsymbol{a}_3 \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} \boldsymbol{a}_1 & \boldsymbol{a}_2 & \boldsymbol{a}_3 \end{vmatrix} + \alpha \begin{vmatrix} \boldsymbol{a}_2 & \boldsymbol{a}_2 & \boldsymbol{a}_3 \end{vmatrix} \\ &= \det A + \alpha \cdot 0 \\ &= \det A \end{aligned}$$

となる．他の列の場合も同様である．

(2)　これは多重線形性の一部であるが繰り返しておく．例えば A の第 1 列を α 倍した行列を B とおくと

$$\det B = \begin{vmatrix} \alpha \boldsymbol{a}_1 & \boldsymbol{a}_2 & \boldsymbol{a}_3 \end{vmatrix} = \alpha \begin{vmatrix} \boldsymbol{a}_1 & \boldsymbol{a}_2 & \boldsymbol{a}_3 \end{vmatrix} = \alpha \det A$$

となる．他の列の場合も同様である．

(3)　例えば A の第 1 列と第 2 列を入れ替えた行列を B とおく．まず，行列式の退化性より

$$\begin{vmatrix} \boldsymbol{a}_1 + \boldsymbol{a}_2 & \boldsymbol{a}_1 + \boldsymbol{a}_2 & \boldsymbol{a}_3 \end{vmatrix} = 0$$

である．一方，この左辺を多重線形性で展開すれば

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} \boldsymbol{a}_1 + \boldsymbol{a}_2 & \boldsymbol{a}_1 + \boldsymbol{a}_2 & \boldsymbol{a}_3 \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} \boldsymbol{a}_1 & \boldsymbol{a}_1 & \boldsymbol{a}_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \boldsymbol{a}_1 & \boldsymbol{a}_2 & \boldsymbol{a}_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \boldsymbol{a}_2 & \boldsymbol{a}_1 & \boldsymbol{a}_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \boldsymbol{a}_2 & \boldsymbol{a}_2 & \boldsymbol{a}_3 \end{vmatrix} \\ &= 0 + \det A + \det B + 0 \end{aligned}$$

である．よって，$\det A + \det B = 0$ より，$\det B = -\det A$ が成り立つ．

□

これより，行列を列基本変形すれば行列式の値がどのように変化するかがわかった．しかし，前章までは行列の基本変形といえば行基本変形のみであった．その計算には慣れているから，行列式の計算に行基本変形も使えるようにしたい．それを可能にするのが，次の定理である．

定理 2.4. （転置行列の行列式）
3 次正方行列 A について
$$\det A = \det({}^t\!A)$$
が成り立つ．つまり，転置をとっても行列式の値は変わらない．

証明. 3 次正方行列の成分を
$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}, \qquad {}^t\!A = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix}$$
とおけば，転置行列の定義より
$${}^t\!A = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix}$$
が成り立つ．よって，定理 2.2（サラスの方法）より
$$\begin{aligned} \det({}^t\!A) &= b_{11}b_{22}b_{33} + b_{21}b_{32}b_{13} + b_{31}b_{12}b_{23} - b_{11}b_{32}b_{23} - b_{21}b_{12}b_{33} - b_{31}b_{22}b_{13} \\ &= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31} \\ &= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{21}a_{32}a_{13} + a_{31}a_{12}a_{23} - a_{11}a_{32}a_{23} - a_{21}a_{12}a_{33} - a_{31}a_{22}a_{13} = \det A \end{aligned}$$
であるから，転置をとっても行列式の値は変わらない． □

行列 A に対して行基本変形を行うことは，転置をとって考えると縦と横が入れ替わるために ${}^t\!A$ において列基本変形を行うことに対応する．よって，列基本変形に関する性質は定理 2.4 を通して，行基本変形でも成り立つことになる．既に列基本変形について調べた性質を行基本変形版に翻訳してまとめると，次のようになる．

定理 2.5. （行基本変形と行列式の関係）
3 次正方行列に対して，行基本変形と行列式について以下が成り立つ．

(1) ある行に別の行のスカラー倍を加えても行列式は変わらない

(2) ある行を α 倍すると行列式も α 倍される（α がくくり出される）

(3) 行を入れ替えると行列式は -1 倍される

特にスカラー倍で $\alpha = 0$ とすれば，すべて成分が 0 である行があれば行列式の値は 0 となる．

これより，行列式の値を計算する場合には行基本変形や列基本変形を用いて行列を簡単な形に変形すればよいことがわかった．

注意 2.6. 連立 1 次方程式における拡大係数行列や逆行列の計算では行基本変形のみが許されていた．行列式の計算練習に慣れると，いつでも列基本変形をしてよいと勘違いしやすいので注意すること．混乱を避けるために行列式の計算を行基本変形だけで行ってもよいが，列基本変形を利用した方が圧倒的に速い場合もある．どの基本変形が許されるかを理解したうえで，場合に応じて適切に計算できるようになることが望ましい．

さらに行列式の計算を簡単にできないか考えてみると，3 次正方行列 A において $(1,1)$ 成分で第 1 列を掃き出せば

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ 0 & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

という形に変形できる．これはブロック分けされた行列の形となっており，サラスの方法を用いて計算すると

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ 0 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} = a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}) = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

となる．これを公式の形としてまとめると次のようになる．

定理 2.7. （ブロック分けされた行列式）
3 次行列式について

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ 0 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \qquad \begin{vmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

が成り立つ．

この公式によって，3 次行列式は行または列について掃き出せば，行列式のサイズを 2 次に減らすことができる．2 次行列式の公式は簡単なので，これにより具体的な行列式の値が容易に計算可能となる．

他には，三角行列と呼ばれる行列の行列式も，サラスの方法より簡単に計算できる．

定理 2.8. （三角行列の行列式）
3 次行列式について

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ 0 & 0 & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33}, \qquad \begin{vmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33}$$

が成り立つ．

これより，左下半分や右上半分の成分を 0 にすれば，行列式は対角成分の積であることがわかる．特別な形の行列の場合には，これが便利なことも多い．もっとも，改めて定理として暗記しなくても，サラスの方法を用いればすぐに得られる公式ではある．

また，ここでは 3 次行列式に対しての定理

- 定理 2.3（行基本変形と行列式の関係）
- 定理 2.4（転置行列の行列式）
- 定理 2.5（行基本変形と行列式の関係）
- 定理 2.7（ブロック分けされた行列式）
- 定理 2.8（三角行列の行列式）

を説明したが，実はこれらはすべて n 次行列式についても成り立つことが，後の節でわかる．

2.4　3 次行列式の計算例

さまざまな計算法を紹介してきたので，再度計算法をまとめれば次のようになる．

- 行基本変形や列基本変形を利用して（値がどのように変わるかは注意），三角行列に変形するか 2 次行列式にサイズを小さくする．
- サラスの方法を適用する．

例題 2.9.　行列式 $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 8 & 9 & 4 \\ 7 & 6 & 5 \end{vmatrix}$ の値を求めよ．

（解答）　計算法は複数考えられる．最初なので複数の解答を紹介する．

(i)　基本変形で三角行列に変形すれば

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 8 & 9 & 4 \\ 7 & 6 & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -7 & -20 \\ 0 & -8 & -16 \end{vmatrix} \qquad ((1,1) \text{ 成分による第 1 列の掃き出し})$$

$$= -8 \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -7 & -20 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} \qquad (\text{第 3 行から } (-8) \text{ をくくりだす})$$

$$= -8 \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & -6 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} \qquad (\text{第 3 行の 7 倍を第 2 行に加える})$$

$$= 8 \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -6 \end{vmatrix} \qquad (\text{第 2 行と第 3 行の入れ替え})$$

$$= 8 \cdot 1 \cdot 1 \cdot \ (-6) = -48$$

(ii)　行列式のサイズを小さくする方針で計算すれば

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 8 & 9 & 4 \\ 7 & 6 & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -7 & -20 \\ 0 & -8 & -16 \end{vmatrix} \qquad ((1,1) \text{ 成分による第 1 列の掃き出し})$$

$$= 1 \cdot \begin{vmatrix} -7 & -20 \\ -8 & -16 \end{vmatrix} = (-1)(-8) \begin{vmatrix} 7 & 20 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 8(14-20) = -48$$

(iii)　サラスの方法を使えば

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 8 & 9 & 4 \\ 7 & 6 & 5 \end{vmatrix} = 1 \cdot 9 \cdot 5 + 8 \cdot 6 \cdot 3 + 7 \cdot 4 \cdot 2 - 3 \cdot 9 \cdot 7 - 4 \cdot 6 \cdot 1 - 5 \cdot 8 \cdot 2$$

$$= 45 + 144 + 56 - 189 - 24 - 80 = -48$$

（解答終）

上の解法 (i) において，三角行列にするために行を入れ替える部分は，後で学習する余因子展開を用いれば実は省略できる．解法 (ii) できれいにブロック分けされた形にするための行や列の入れ替えも省略可能である．ただし，最初は行や列を 1 回入れ替える度に -1 倍されることを意識するために丁寧に計算した方がよい．

例題 2.10. 次の行列式の値を求めよ．

(1) $\begin{vmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 5 & 0 & 6 \\ 1 & 4 & -2 \end{vmatrix}$　　(2) $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 4 & 2 & -3 \\ -2 & 5 & 1 \end{vmatrix}$　　(3) $\begin{vmatrix} 2 & 5 & 0 \\ 3 & 1 & 2 \\ 1 & 4 & 6 \end{vmatrix}$

（解答） 計算法は複数考えられるので，以下では一例を挙げる．

(1) 基本変形で下三角行列に変形すれば

$$\begin{aligned}
\begin{vmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 5 & 0 & 6 \\ 1 & 4 & -2 \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 5 & 0 & 6 \\ 13 & 4 & 6 \end{vmatrix} && \text{((1,2) 成分による第 1 行の掃き出し)} \\
&= -\begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 6 \\ 4 & 13 & 6 \end{vmatrix} && \text{(第 1 列と第 2 列の入れ替え)} \\
&= -\begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 \\ -4 & -8 & 0 \\ 4 & 13 & 6 \end{vmatrix} && \text{(第 2 行に第 3 行の (−1) 倍を加える)} \\
&= -(-1)\cdot(-8)\cdot 6 = -48
\end{aligned}$$

(2) 掃き出してサイズを小さくすれば

$$\begin{aligned}
\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 4 & 2 & -3 \\ -2 & 5 & 1 \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 4 & 6 & -11 \\ -2 & 3 & 5 \end{vmatrix} && \text{((1,1) 成分による第 1 行の掃き出し)} \\
&= 1\cdot\begin{vmatrix} 6 & -11 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} && \text{(ブロック分けされた行列式の性質)} \\
&= 30-(-33) = 63
\end{aligned}$$

(3) 掃き出してサイズを小さくすれば

$$\begin{aligned}
\begin{vmatrix} 2 & 5 & 0 \\ 3 & 1 & 2 \\ 1 & 4 & 6 \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} 2 & 5 & 0 \\ 3 & 1 & 2 \\ -8 & 1 & 0 \end{vmatrix} && \text{(第 3 行に第 2 行の (−3) 倍を加える)} \\
&= -\begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 2 & 5 & 0 \\ -8 & 1 & 0 \end{vmatrix} && \text{(第 1 行と第 2 行の入れ替え)} \\
&= \begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & 5 & 2 \\ 0 & 1 & -8 \end{vmatrix} && \text{(第 1 列と第 3 列の入れ替え)} \\
&= 2\cdot\begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 1 & -8 \end{vmatrix} && \text{(ブロック分けされた行列式の性質)} \\
&= 2(-40-2) = -84
\end{aligned}$$

（解答終）

サイズを小さくする方法は入れ替えの操作が手間なように見える．しかし，後で学習する余因子展開を用いれば入れ替えが不要となり，掃き出した後すぐにサイスを小さくできるようになる．そのため，どの方法が最適かは場合によるので，あまり方法にこだわらずに正確に計算できるようにすること．

例題 2.11.　次の行列式を計算せよ．

(1) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix}$　　(2) $\begin{vmatrix} a+b & a & a \\ a & a+b & a \\ a & a & a+b \end{vmatrix}$　　(3) $\begin{vmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{vmatrix}$

（解答）　文字式を含む行列式の場合には，工夫した計算が求められることもある．

(1)　対称性に着目して基本変形すれば

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ 0 & b^2-ab & c^2-ac \end{vmatrix} \quad (\text{第 3 行に第 2 行の } (-a) \text{ 倍を加える})$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & b-a & c-a \\ 0 & b(b-a) & c(c-a) \end{vmatrix} \quad (\text{第 2 行に第 1 行の } (-a) \text{ 倍を加える})$$

$$= 1 \cdot \begin{vmatrix} b-a & c-a \\ b(b-a) & c(c-a) \end{vmatrix} \quad (\text{ブロック分けされた行列式の性質})$$

$$= (b-a)(c-a)\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ b & c \end{vmatrix} \quad \begin{pmatrix}\text{第 1 列から } b-a \text{ を，} \\ \text{第 2 列から } c-a \text{ をくくりだす}\end{pmatrix}$$

$$= (b-a)(c-a)(c-b) = (a-b)(b-c)(c-a)$$

(2)　各行について成分の和が等しいことに着目して

$$\begin{vmatrix} a+b & a & a \\ a & a+b & a \\ a & a & a+b \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3a+b & a & a \\ 3a+b & a+b & a \\ 3a+b & a & a+b \end{vmatrix} \quad \begin{pmatrix}\text{第 1 列に第 2 列を加え，} \\ \text{さらに第 1 列に第 3 列を加える}\end{pmatrix}$$

$$= (3a+b)\begin{vmatrix} 1 & a & a \\ 1 & a+b & a \\ 1 & a & a+b \end{vmatrix} \quad (\text{第 1 列から } 3a+b \text{ をくくりだす})$$

$$= (3a+b)\begin{vmatrix} 1 & a & a \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & b \end{vmatrix} \quad ((1,1) \text{ 成分による第 1 列の掃き出し})$$

$$= (3a+b) \cdot 1 \cdot b \cdot b = b^2(3a+b)$$

(3)　サラスの方法より

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{vmatrix} = a^3+b^3+c^3-acb-bca-cab = a^3+b^3+c^3-3abc$$

（解答終）

対称性に着目して基本変形するのがよい場合もあれば，サラスの方法の方が簡単なものもある．もし各行の成分の和がすべて等しければ，(2) のように基本変形するとうまくいくことが多い．また，(1) のような行列式は $a=b$ とすると第 1 列と第 2 列が等しくなり 0 となるので，行列式は $a-b$ を因数にもつことが予想される．なお (3) の答えは因数分解できるので，問題によっては基本変形を用いて計算しておいた方がよいこともある．(2) をヒントに各自で考えてみよ．

3 n 次行列式の具体的な表示式

命題 1.2 で見たように，行列に対してその列ベクトルが張る図形の符号つき面積の式を考えると，それは性質『多重線形性』『退化性』『正規化条件』をみたし，さらに具体的な公式として行列式が現れることがわかる．そこで，この事実を参考にして n 次行列式を定義することにする．

定義 3.1. （n 次行列式）

D_n を n 次正方行列にスカラーを対応させる関数で，次の 3 つの性質をみたすものとする．ただし，n 次正方行列 A を

$$A = \begin{pmatrix} \boldsymbol{a}_1 & \boldsymbol{a}_2 & \cdots & \boldsymbol{a}_n \end{pmatrix}$$

と列ベクトルに分解したときに

$$D_n(A) = D_n \begin{pmatrix} \boldsymbol{a}_1 & \boldsymbol{a}_2 & \cdots & \boldsymbol{a}_n \end{pmatrix}$$

と表すものとする．

(I) （列に関する多重線形性）

α と β をスカラーとする．ある j に対して，$A = \begin{pmatrix} \boldsymbol{a}_1 & \boldsymbol{a}_2 & \cdots & \boldsymbol{a}_n \end{pmatrix}$ の第 j 列が $\boldsymbol{a}_j = \alpha \boldsymbol{a}'_j + \beta \boldsymbol{a}''_j$ と表されているとき，A の第 j 列を $\boldsymbol{a}'_j$ に置き換えた行列を A' とし，A の第 j 列を $\boldsymbol{a}''_j$ に置き換えた行列を A'' とすると

$$D_n(A) = \alpha D_n(A') + \beta D_n(A'')$$

すなわち

$$\begin{aligned} &D_n \begin{pmatrix} \boldsymbol{a}_1 & \cdots & \alpha \boldsymbol{a}'_j + \beta \boldsymbol{a}''_j & \cdots & \boldsymbol{a}_n \end{pmatrix} \\ &\qquad = \alpha D_n \begin{pmatrix} \boldsymbol{a}_1 & \cdots & \boldsymbol{a}'_j & \cdots & \boldsymbol{a}_n \end{pmatrix} + \beta D_n \begin{pmatrix} \boldsymbol{a}_1 & \cdots & \boldsymbol{a}''_j & \cdots & \boldsymbol{a}_n \end{pmatrix} \end{aligned}$$

が成り立つ．

(II) （退化性）

ある異なる j と k に対して，A の第 j 列 $\boldsymbol{a}_j$ と第 k 列 $\boldsymbol{a}_k$ が等しいとき

$$D_n(A) = 0$$

が成り立つ．

(III) （正規化条件）

n 次単位行列 E_n に対して

$$D_n(E_n) = 1$$

が成り立つ．

このとき，n 次正方行列 A に対して，$D_n(A)$ を A の**行列式**といい，$|A|$ または $\det A$ で表す．n 次正方行列の行列式を n 次行列式という．

この定義だと 3 条件 (I), (II), (III) を満たす関数が複数個存在するかもしれないし，そもそも 1 個も存在しないかもしれない．ただし，実は 2 次行列式のときと同様に，これら 3 条件から

$$D_2(A) = D_2 \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = ad - bc$$

のように具体的に行列 A の成分の式で書くことができ，D_n は 1 つだけに決まることが証明される．しかし，そのためにはいくつか準備が必要なので，この事実の証明は後回しにして先に計算方法を説明し，計算に慣れたころに理論に戻ることにする．

また，4 次元以上の図形をイメージすることは難しいが，$\det A$ は『A の n 本の列ベクトルの張る n 次元図形の体積』であることも知られている．

行列式の定義から，行列式は列基本変形と深い結びつきがある．これは具体的な行列式の計算に便利なので，定理の形でまとめておく．

命題 3.2. （列基本変形と行列式）
n 次行列式は列基本変形について次の性質をみたす．

(1) 行列 A の第 j 列の α 倍を第 k 列（ただし $k \neq j$ とする）に加えて得られる行列を A' とするとき

$$|A| = |A'|$$

すなわち

$$\begin{vmatrix} \boldsymbol{a}_1 & \cdots & \boldsymbol{a}_k + \alpha\boldsymbol{a}_j & \cdots & \boldsymbol{a}_n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{a}_1 & \cdots & \boldsymbol{a}_k & \cdots & \boldsymbol{a}_n \end{vmatrix}$$

が成り立つ．

(2) A の第 j 列を α 倍して得られる行列の行列式は $\alpha|A|$ となる．すなわち

$$\begin{vmatrix} \boldsymbol{a}_1 & \cdots & \boldsymbol{a}_{j-1} & \alpha\boldsymbol{a}_j & \boldsymbol{a}_{j+1} & \cdots & \boldsymbol{a}_n \end{vmatrix} = \alpha \begin{vmatrix} \boldsymbol{a}_1 & \cdots & \boldsymbol{a}_{j-1} & \boldsymbol{a}_j & \boldsymbol{a}_{j+1} & \cdots & \boldsymbol{a}_n \end{vmatrix}$$

が成り立つ．

(3) （交代性）
A の 2 つの列ベクトルを交換して得られる行列の行列式は $-|A|$ となる．すなわち

$$\begin{vmatrix} \boldsymbol{a}_1 & \cdots & \boldsymbol{a}_j & \cdots & \boldsymbol{a}_k & \cdots & \boldsymbol{a}_n \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} \boldsymbol{a}_1 & \cdots & \boldsymbol{a}_k & \cdots & \boldsymbol{a}_j & \cdots & \boldsymbol{a}_n \end{vmatrix}$$

が成り立つ．

証明． (1) 行列式の多重線形性と退化性より

$$\begin{aligned} |A'| &= \begin{vmatrix} \boldsymbol{a}_1 & \cdots & \boldsymbol{a}_j & \cdots & \boldsymbol{a}_k + \alpha\boldsymbol{a}_j & \cdots & \boldsymbol{a}_n \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} \boldsymbol{a}_1 & \cdots & \boldsymbol{a}_j & \cdots & \boldsymbol{a}_k & \cdots & \boldsymbol{a}_n \end{vmatrix} + \alpha \begin{vmatrix} \boldsymbol{a}_1 & \cdots & \boldsymbol{a}_j & \cdots & \boldsymbol{a}_j & \cdots & \boldsymbol{a}_n \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} \boldsymbol{a}_1 & \cdots & \boldsymbol{a}_j & \cdots & \boldsymbol{a}_k & \cdots & \boldsymbol{a}_n \end{vmatrix} + \alpha \cdot 0 = |A| \end{aligned}$$

(2) これは多重線形性の一部である．

(3) A の第 j 列と第 k 列を互いに入れ替えた行列を A' とおき，A の第 j 列と第 k 列を $\boldsymbol{a}_j + \boldsymbol{a}_k$ に置き換えた行列を A'' とおく．このとき，まずは退化性より，$|A''| = 0$ となる．一方，多重線形性より

$$\begin{aligned} |A''| &= \begin{vmatrix} \boldsymbol{a}_1 & \cdots & \boldsymbol{a}_j + \boldsymbol{a}_k & \cdots & \boldsymbol{a}_j + \boldsymbol{a}_k & \cdots & \boldsymbol{a}_n \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} \boldsymbol{a}_1 & \cdots & \boldsymbol{a}_j & \cdots & \boldsymbol{a}_j & \cdots & \boldsymbol{a}_n \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \boldsymbol{a}_1 & \cdots & \boldsymbol{a}_j & \cdots & \boldsymbol{a}_k & \cdots & \boldsymbol{a}_n \end{vmatrix} \\ &\qquad + \begin{vmatrix} \boldsymbol{a}_1 & \cdots & \boldsymbol{a}_k & \cdots & \boldsymbol{a}_j & \cdots & \boldsymbol{a}_n \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \boldsymbol{a}_1 & \cdots & \boldsymbol{a}_k & \cdots & \boldsymbol{a}_k & \cdots & \boldsymbol{a}_n \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} \boldsymbol{a}_1 & \cdots & \boldsymbol{a}_j & \cdots & \boldsymbol{a}_k & \cdots & \boldsymbol{a}_n \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \boldsymbol{a}_1 & \cdots & \boldsymbol{a}_k & \cdots & \boldsymbol{a}_j & \cdots & \boldsymbol{a}_n \end{vmatrix} \\ &= |A| + |A'| \end{aligned}$$

である．よって，$|A| + |A'| = 0$ より，$|A'| = -|A|$ が成り立つ．

□

上のスカラー倍との関係 (2) において $\alpha = 0$ とすれば，行列の列ベクトルのうちどれか 1 つが $\boldsymbol{0}$ ならば，その行列式について

$$\begin{vmatrix} \boldsymbol{a}_1 & \cdots & \boldsymbol{a}_{j-1} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{a}_{j+1} & \cdots & \boldsymbol{a}_n \end{vmatrix} = 0$$

が成り立つことがわかる．

列基本変形との関係をまとめると以下のようになる．

定理 3.3. （列基本変形と行列式の関係）

n 次正方行列に対して，列基本変形と行列式について以下が成り立つ．

(1) ある列に別の列のスカラー倍を加えても行列式は変わらない

(2) ある列を α 倍すると行列式も α 倍される（α がくくり出される）

(3) 2 つの列を入れ替えると行列式は -1 倍される

特にスカラー倍で $\alpha = 0$ とすると，すべて成分が 0 である列があれば，その行列式の値は 0 となる．

三角行列の行列式については次が成り立つ．

命題 3.4. （三角行列の行列式）

三角行列の行列式は対角成分の積で与えられる．すなわち

$$\begin{vmatrix} \alpha_1 & & & * \\ & \alpha_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \alpha_n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \alpha_1 & & & 0 \\ & \alpha_2 & & \\ & & \ddots & \\ * & & & \alpha_n \end{vmatrix} = \alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_n$$

が成り立つ．ここで，例えば上三角行列については，対角成分より右上の成分は行列式の値に無関係なので，$*$ のように省略して書いてある．

証明． 上三角行列の場合を証明する．まず最初に $j = 1, 2, \ldots, n$ に対して，第 j 列から α_j をくくり出せば

$$\begin{vmatrix} \alpha_1 & & & * \\ & \alpha_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \alpha_n \end{vmatrix} = \alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_n \begin{vmatrix} 1 & & & * \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & 1 \end{vmatrix}$$

となる（対角成分より右上の $*$ の部分の成分は変わっているが，同じ $*$ で表している）．この行列式の部分は，$j = 1, 2, \ldots, n$ に対して (j, j) 成分で第 j 行の掃き出しを行えば，定理 3.3(1) より掃き出しで行列式の値は変わらないので，正規化条件も用いれば

$$\begin{vmatrix} 1 & & & * \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & & & 0 \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & 1 \end{vmatrix} = |E_n| = 1$$

である．よって

$$\begin{vmatrix} \alpha_1 & & & * \\ & \alpha_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \alpha_n \end{vmatrix} = \alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_n \begin{vmatrix} 1 & & & * \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & 1 \end{vmatrix} = \alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_n$$

が成り立つ．下三角行列の場合も同様である．□

与えられた行列を列基本変形で三角行列に変形すれば，命題3.4 より行列式が計算できる．列を 1 回入れ替えると行列式の値が -1 倍されることに注意すること．

例題 3.5. 次の行列式の値を，三角行列に列基本変形することで計算せよ．

(1) $\begin{vmatrix} -2 & 4 & 3 \\ 6 & -2 & 1 \\ 2 & 4 & 3 \end{vmatrix}$ (2) $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 3 & -1 & 4 & 5 \\ 1 & 4 & -3 & 5 \\ 4 & -3 & 10 & 7 \end{vmatrix}$

（解答）

(1) 列基本変形の説明を右側に書くと

$$\begin{vmatrix} -2 & 4 & 3 \\ 6 & -2 & 1 \\ 2 & 4 & 3 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} -1 & 4 & 3 \\ 3 & -2 & 1 \\ 1 & 4 & 3 \end{vmatrix} \qquad (\text{第 1 列から 2 をくくり出す})$$

$$= 2\begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 3 & 10 & 10 \\ 1 & 8 & 6 \end{vmatrix} \qquad ((1,1)\text{ 成分による第 1 行の掃き出し})$$

$$= 2\begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 3 & 10 & 0 \\ 1 & 8 & -2 \end{vmatrix} \qquad (\text{第 3 列に第 2 列の } (-1) \text{ 倍を加える})$$

$$= 2 \cdot (-1) \cdot 10 \cdot (-2) = 40$$

(2) 列基本変形の説明を右側に書くと

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 3 & -1 & 4 & 5 \\ 1 & 4 & -3 & 5 \\ 4 & -3 & 10 & 7 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & -2 & 2 \\ 1 & 5 & -5 & 4 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} \qquad ((1,1)\text{ 成分による第 1 行の掃き出し})$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 5 & 0 & -1 \\ 4 & 1 & 3 & 2 \end{vmatrix} \qquad \begin{matrix}(\text{第 3 列に第 2 列の 1 倍を，} \\ \text{第 4 列に第 2 列の } (-1) \text{ 倍を加える})\end{matrix}$$

$$= -\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 5 & -1 & 0 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} \qquad (\text{第 3 列と第 4 列の入れ替え})$$

$$= (-1) \cdot 1 \cdot 2 \cdot (-1) \cdot 3 = 6$$

（解答終）

行列式の計算においては，列基本変形でどのように値が変わりうるかを気にしつつイコールでつないで説明すること．連立 1 次方程式や逆行列の解法においては，行列自体は基本変形で変わるために矢印でつないでいたが，行列式は値そのものの計算なので適切にイコールでつながなければならない．

また，これまでの連立 1 次方程式や逆行列の解法では，ある行を 2 倍したり行を入れ替えるのは自由だった．行列式の計算でもそれらに相当することは行ってよいが，ある列からスカラーをくくり出したり，列を入れ替えたりしたら値がどう変わるかには注意すること．

3 次行列式に対しては，定理 2.2 のように行列の成分を用いた具体的な表示公式を導くことができた．そこで，次に定義 3.1 で定義した n 次行列式 $\det A$ の形を同様にして具体的に調べてみる．

まずは n 次正方行列 $A = (a_{ij})$ を

$$A = \begin{pmatrix} \boldsymbol{a}_1 & \boldsymbol{a}_2 & \cdots & \boldsymbol{a}_n \end{pmatrix}$$

と列ベクトル分解し，さらに各列ベクトル $\boldsymbol{a}_j$ $(j = 1, 2, \ldots, n)$ を

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{a}_j = \begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{nj} \end{pmatrix} &= a_{1j} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + a_{2j} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + \cdots + a_{nj} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \\
&= a_{1j}\boldsymbol{e}_1 + a_{2j}\boldsymbol{e}_2 + \cdots + a_{nj}\boldsymbol{e}_n = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}\boldsymbol{e}_i
\end{aligned}$$

と基本ベクトル $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \ldots, \boldsymbol{e}_n$ の 1 次結合で表しておく．このとき，行列式の多重線形性より

$$\begin{aligned}
\det A &= \begin{vmatrix} \sum\limits_{i_1=1}^{n} a_{i_1 1}\boldsymbol{e}_{i_1} & \sum\limits_{i_2=1}^{n} a_{i_2 2}\boldsymbol{e}_{i_2} & \cdots & \sum\limits_{i_n=1}^{n} a_{i_n n}\boldsymbol{e}_{i_n} \end{vmatrix} \\
&= \sum_{i_1=1}^{n} \sum_{i_2=1}^{n} \cdots \sum_{i_n=1}^{n} a_{i_1 1} a_{i_2 2} \cdots a_{i_n n} \begin{vmatrix} \boldsymbol{e}_{i_1} & \boldsymbol{e}_{i_2} & \cdots & \boldsymbol{e}_{i_n} \end{vmatrix}
\end{aligned}$$

となる．ここで，$T_n \coloneqq \{\, (i_1, i_2, \ldots, i_n) \mid 1 \leqq i_j \leqq n \,\}$ とおくと

$$\det A = \sum_{(i_1, i_2, \ldots, i_n) \in T_n} a_{i_1 1} a_{i_2 2} \cdots a_{i_n n} \begin{vmatrix} \boldsymbol{e}_{i_1} & \boldsymbol{e}_{i_2} & \cdots & \boldsymbol{e}_{i_n} \end{vmatrix}$$

と表すことができる．ここで，シグマ記号は T_n の要素すべてについての和をとるという意味である．この和は複雑であるが，退化条件より $i_1, i_2, \ldots, i_n$ の中に同じ数字があれば

$$\begin{vmatrix} \boldsymbol{e}_{i_1} & \boldsymbol{e}_{i_2} & \cdots & \boldsymbol{e}_{i_n} \end{vmatrix} = 0$$

となるのは 3 次行列式の場合と同様である．つまり，$i_1, i_2, \ldots, i_n$ がすべて異なる数字の場合，つまり $i_1, i_2, \ldots, i_n$ が $1, 2, \ldots, n$ の並び替えの場合について考えればよい．

そこで，$1, 2, \ldots, n$ を並び替えてできる n 個の数字の列を $[i_1, i_2, \ldots, i_n]$ で表し，n 次の順列という．n 次の順列全体のなす集合を S_n とおく．例えば，$n = 2$ のときは

$$S_2 = \{\, [1, 2], [2, 1] \,\}$$

であり，$n = 3$ のときは

$$S_3 = \{\, [1, 2, 3], [1, 3, 2], [2, 1, 3], [2, 3, 1], [3, 1, 2], [3, 2, 1] \,\}$$

である．$n = 4$ のとき，S_4 は $4! = 24$ 個の要素からなる．実際に列挙するのは大変であるが，各自で試みてみよ．

この順列の記号を用いれば

$$\det A = \sum_{[i_1,i_2,\ldots,i_n]\in S_n} a_{i_1 1}a_{i_2 2}\cdots a_{i_n n} \begin{vmatrix} \boldsymbol{e}_{i_1} & \boldsymbol{e}_{i_2} & \cdots & \boldsymbol{e}_{i_n} \end{vmatrix} \tag{3.1}$$

が得られる．ここで，シグマ記号は n 次の順列すべてについての和をとるという意味である．よって，後は

$$\begin{vmatrix} \boldsymbol{e}_{i_1} & \boldsymbol{e}_{i_2} & \cdots & \boldsymbol{e}_{i_n} \end{vmatrix}$$

の値を決定できればよい．ここで，$i_1, i_2, \ldots, i_n$ は $1, 2, \ldots, n$ の並び替えだから，列の入れ替えを行えば

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{e}_{i_1} & \boldsymbol{e}_{i_2} & \cdots & \boldsymbol{e}_{i_n} \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} \boldsymbol{e}_1 & \boldsymbol{e}_2 & \cdots & \boldsymbol{e}_{\boldsymbol{n}} \end{pmatrix} = E_n$$

と基本変形できる．行列式の定義より，2 つの列ベクトルを 1 回入れ替えるたびに値が -1 倍されるから，N 回入れ替えて単位行列になったとすれば，正規化条件より

$$\begin{vmatrix} \boldsymbol{e}_{i_1} & \boldsymbol{e}_{i_2} & \cdots & \boldsymbol{e}_{i_n} \end{vmatrix} = (-1)^N \det E_n = (-1)^N$$

となる．ゆえに，順列 $[i_1, i_2, \ldots, i_n]$ に対して，何回数字を入れ替えれば $[1, 2, \ldots, n]$ になるかが重要になるので，用語を以下のように定義する．

定義 3.6. （転倒数）
n 次の順列 $[i_1, i_2, \ldots, i_n]$ に対して，$j < k$ かつ $i_j > i_k$ となるような組 (i_j, i_k) の個数を**転倒数**または**反転数**といい，$N_{[i_1,i_2,\ldots,i_n]}$ で表す．

例 3.7. 5 次の順列 $[3, 1, 5, 4, 2]$ について，左側の方が大きい 2 つの番号の選び方は

$$(3,1),\ (5,4),\ (3,2),\ (5,2),\ (4,2)$$

の 5 個なので，転倒数は $N_{[3,1,5,4,2]} = 5$ である．また，3 次の順列の転倒数を列挙すると

$$N_{[1,2,3]} = 0, \qquad N_{[1,3,2]} = 1, \qquad N_{[2,1,3]} = 1, \qquad N_{[2,3,1]} = 2, \qquad N_{[3,1,2]} = 2, \qquad N_{[3,2,1]} = 3$$

のようになる．

命題 3.8. （転倒数の意味）
n 次の順列 $[i_1, i_2, \ldots, i_n]$ に対して，行列 $\begin{pmatrix} \boldsymbol{e}_{i_1} & \boldsymbol{e}_{i_2} & \cdots & \boldsymbol{e}_{i_n} \end{pmatrix}$ は 2 つの列の交換を $N_{[i_1,i_2,\ldots,i_n]}$ 回行うことで単位行列に変形できる．

この命題は一般的に証明できるが，要は転倒数を求める際に列挙した 2 つの番号の組の数だけ順番に入れ替えればよいということである．以下の例で雰囲気をつかんでみてほしい．

例 3.9. 5 次の順列 $[3, 1, 5, 4, 2]$ の転倒数は $N_{[3,1,5,4,2]} = 5$ であり，対応する行列は

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} \boldsymbol{e}_3 & \boldsymbol{e}_1 & \boldsymbol{e}_5 & \boldsymbol{e}_4 & \boldsymbol{e}_2 \end{pmatrix} &\longrightarrow \begin{pmatrix} \boldsymbol{e}_1 & \boldsymbol{e}_3 & \boldsymbol{e}_5 & \boldsymbol{e}_4 & \boldsymbol{e}_2 \end{pmatrix} \\
&\longrightarrow \begin{pmatrix} \boldsymbol{e}_1 & \boldsymbol{e}_3 & \boldsymbol{e}_5 & \boldsymbol{e}_2 & \boldsymbol{e}_4 \end{pmatrix} \\
&\longrightarrow \begin{pmatrix} \boldsymbol{e}_1 & \boldsymbol{e}_3 & \boldsymbol{e}_2 & \boldsymbol{e}_5 & \boldsymbol{e}_4 \end{pmatrix} \\
&\longrightarrow \begin{pmatrix} \boldsymbol{e}_1 & \boldsymbol{e}_2 & \boldsymbol{e}_3 & \boldsymbol{e}_5 & \boldsymbol{e}_4 \end{pmatrix} \\
&\longrightarrow \begin{pmatrix} \boldsymbol{e}_1 & \boldsymbol{e}_2 & \boldsymbol{e}_3 & \boldsymbol{e}_4 & \boldsymbol{e}_5 \end{pmatrix} = E_5
\end{aligned}$$

と列の入れ替えを 5 回行えば単位行列 E_5 になる（見やすくするため左側から揃えるように変形した）．

命題 3.8 より，n 次の順列 $[i_1, i_2, \ldots, i_n]$ に対しては，その転倒数 $N_{[i_1,i_2,\ldots,i_n]}$ を用いて

$$\left|\boldsymbol{e}_{i_1} \quad \boldsymbol{e}_{i_2} \quad \cdots \quad \boldsymbol{e}_{i_n}\right| = (-1)^{N_{[i_1,i_2,\ldots,i_n]}} \left|\boldsymbol{e}_1 \quad \boldsymbol{e}_2 \quad \cdots \quad \boldsymbol{e}_n\right| = (-1)^{N_{[i_1,i_2,\ldots,i_n]}}$$

が成り立つ．したがって，これを多重線形性で展開した式 (3.1)の各項に代入すれば，n 次行列式の具体的な表示公式がわかる．

定理 3.10. （n 次行列式の具体的な表示式）

n 次正方行列 $A = (a_{ij})$ に対して

$$\det A = \sum_{[i_1,i_2,\ldots,i_n]\in S_n} (-1)^{N_{[i_1,i_2,\ldots,i_n]}}\, a_{i_1 1} a_{i_2 2} \cdots a_{i_n n}$$

が成り立つ．

定義 3.1 の 3 条件（多重線形性，退化性，正規化条件）をみたすような $\det A$ が存在するならば，ここまでの議論から上の表示公式をもつ．逆に，上の表示公式は確かにこれらの 3 条件をみたすことが成分計算により直接証明できる．よって，確かに定義 3.1 の 3 条件をみたすような行列式は存在し，さらにそのようなものは上の公式で定まるもの唯一つに限ることが示された．

次に $n = 2, 3$ の場合に上の表示公式を具体的に書き下してみる．$n = 2$ のときは

$$S_2 = \{\, [1, 2], [2, 1]\, \}$$

であるから，$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ に対して，$\det A$ は

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = (-1)^{N_{[1,2]}}\, a_{11}a_{22} + (-1)^{N_{[2,1]}}\, a_{21}a_{12} = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}$$

となり，確かに 2 次行列式と一致する．

$n = 3$ のときは

$$S_3 = \{\, [1, 2, 3], [1, 3, 2], [2, 1, 3], [2, 3, 1], [3, 1, 2], [3, 2, 1]\, \}$$

であり，転倒数は

$$N_{[1,2,3]} = 0, \quad N_{[1,3,2]} = 1, \quad N_{[2,1,3]} = 1, \quad N_{[2,3,1]} = 2, \quad N_{[3,1,2]} = 2, \quad N_{[3,2,1]} = 3$$

であるから，$\det A$ は

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{21}a_{32}a_{13} + a_{31}a_{12}a_{23} - a_{31}a_{22}a_{13} - a_{21}a_{12}a_{33} - a_{11}a_{32}a_{23}$$

となり，確かに定理 2.2 と一致する．

$n = 4$ のときは，S_4 の要素の個数が $4! = 24$ 個なので，24 個の項の足し算になり，**この定義から行列式を求めるのは不可能ではないが現実的ではない．**さらに，この事実から 4 次以上の行列式にサラスの方法は使えないことがわかる．実際，4 次の場合にサラスの方法を強引に適用すると，斜めにかけて計算するルートが左上から 4 通りと右上から 4 通りの計 8 通りである．これは本来足されるべき 24 項に全然足りない．

また，$n = 5$ のときは S_5 の要素の個数が $5! = 120$ 個なので，120 個の項の足し算になり，事実上ミス無く計算するのは不可能に近い．やはり，行列の基本変形を用いて計算するか，後で紹介する余因子展開を利用する方が圧倒的に速くて確実である．**結局のところ，この表示公式を具体的な行列式の計算に利用しようとしても，公式自体が複雑なためにあまり有用ではない．**表示公式は理論的に定理を証明する道具としては向いている．まずは公式を暗記するよりも，その導出方法を理解する方が重要である．

4　n 次行列式の性質

4.1　3 次行列式で成り立つ公式の一般化

前節で n 次行列式の具体的な表示式を導いた．その証明と同様にすれば，n 次行列式におけるさまざまな公式を導出できる．そこで，以前に予告した 3 次行列式に対する定理

- 定理 2.4（転置行列の行列式）
- 定理 2.5（行基本変形と行列式の関係）
- 定理 2.7（ブロック分けされた行列式）

が n 次行列式についても成り立つことを示す．

まず準備として，それ自身も重要な結果である積の行列式について説明する．

定理 4.1.（積の行列式）
n 次正方行列 A と B の積 AB の行列式に対して

$$\det(AB) = (\det A)(\det B)$$

が成り立つ．つまり，積の行列式の値は，行列式の値の積となる．

証明.　行列 B を $B = \begin{pmatrix} \boldsymbol{b}_1 & \boldsymbol{b}_2 & \cdots & \boldsymbol{b}_n \end{pmatrix}$ と列ベクトル分解すれば，積 AB は

$$AB = \begin{pmatrix} A\boldsymbol{b}_1 & A\boldsymbol{b}_2 & \cdots & A\boldsymbol{b}_n \end{pmatrix}$$

と列ベクトル分解できる．さらに，各列ベクトル $A\boldsymbol{b}_j$ を

$$A\boldsymbol{b}_j = b_{1j}A\boldsymbol{e}_1 + b_{2j}A\boldsymbol{e}_2 + \cdots + b_{nj}A\boldsymbol{e}_n = \sum_{i=1}^{n} b_{ij}A\boldsymbol{e}_i = \sum_{i=1}^{n} b_{ij}\boldsymbol{a}_i$$

と表せば，行列式の多重線形性と退化性より

$$\begin{aligned}\det(AB) &= \begin{vmatrix} \sum\limits_{i_1=1}^{n} b_{i_1 1}\boldsymbol{a}_{i_1} & \sum\limits_{i_2=1}^{n} b_{i_2 2}\boldsymbol{a}_{i_2} & \cdots & \sum\limits_{i_n=1}^{n} b_{i_n n}\boldsymbol{a}_{i_n} \end{vmatrix} \\ &= \sum_{[i_1,i_2,\ldots,i_n]\in S_n} b_{i_1 1}b_{i_2 2}\cdots b_{i_n n} \begin{vmatrix} \boldsymbol{a}_{i_1} & \boldsymbol{a}_{i_2} & \cdots & \boldsymbol{a}_{i_n} \end{vmatrix}\end{aligned}$$

となる．ここで，行列式の部分について列の入れ替えを行えば

$$\begin{aligned}\begin{vmatrix} \boldsymbol{a}_{i_1} & \boldsymbol{a}_{i_2} & \cdots & \boldsymbol{a}_{i_n} \end{vmatrix} &= (-1)^{N[i_1,i_2,\ldots,i_n]} \begin{vmatrix} \boldsymbol{a}_1 & \boldsymbol{a}_2 & \cdots & \boldsymbol{a}_n \end{vmatrix} \\ &= (-1)^{N[i_1,i_2,\ldots,i_n]} \det A\end{aligned}$$

であるから

$$\begin{aligned}\det(AB) &= \sum_{[i_1,i_2,\ldots,i_n]\in S_n} b_{i_1 1}b_{i_2 2}\cdots b_{i_n n}\cdot(-1)^{N[i_1,i_2,\ldots,i_n]} \det A \\ &= \det A \sum_{[i_1,i_2,\ldots,i_n]\in S_n} (-1)^{N[i_1,i_2,\ldots,i_n]} b_{i_1 1}b_{i_2 2}\cdots b_{i_n n} = (\det A)(\det B)\end{aligned}$$

が成り立つ．　□

2 次正方行列 $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ と $B = \begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix}$ に対しては

$$AB = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax+bz & ay+bw \\ cx+dz & cy+dw \end{pmatrix}$$

なので，積 AB の行列式は

$$\begin{aligned} \det(AB) &= \begin{vmatrix} ax+bz & ay+bw \\ cx+dz & cy+dw \end{vmatrix} \\ &= (ax+bz)(cy+dw) - (ay+bw)(cx+dz) \\ &= acxy + adxw + bcyz + adzw - (acxy + adyz + bcxw + adzw) \\ &= ad(xw - yz) + bc(yz - xw) \\ &= (ad - bc)(xw - yz) \\ &= (\det A)(\det B) \end{aligned}$$

と成分計算で証明することもできる．ただし，3 次以上の場合に成分計算で直接証明するのは難しい．

例題 4.2. 行列を

$$A = \begin{pmatrix} 0 & a & b \\ a & 0 & c \\ b & c & 0 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} a^2+b^2 & bc & ac \\ bc & a^2+c^2 & ab \\ ac & ab & b^2+c^2 \end{pmatrix}$$

とおく．

(1) $A^2 = B$ であることを示せ．

(2) $\det B$ を求めよ．

（解答）

(1) 実際に計算すれば

$$A^2 = \begin{pmatrix} 0 & a & b \\ a & 0 & c \\ b & c & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & a & b \\ a & 0 & c \\ b & c & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2+b^2 & bc & ac \\ cb & a^2+c^2 & ab \\ ca & ba & b^2+c^2 \end{pmatrix} = B$$

(2) A の行列式はサラスの公式より

$$\det A = \begin{vmatrix} 0 & a & b \\ a & 0 & c \\ b & c & 0 \end{vmatrix} = abc + abc = 2abc$$

である．よって，定理 4.1 より

$$\det B = \det(A^2) = (\det A)^2 = 4a^2b^2c^2$$

となる．

（解答終）

この例題の $\det B$ を直接計算するのはやや面倒であるが，このように工夫して計算できることもある．

積の行列式の性質により，3 次正方行列に関する定理 2.4 が n 次正方行列でも成り立つことが示される．

定理 4.3. （転置行列の行列式）
n 次正方行列 A について

$$\det(A) = \det({}^t\!A)$$

が成り立つ．つまり，転置をとっても行列式の値は変わらない．

証明. $\operatorname{rank} A = r$ とする．このとき，第 3 章定理 2.20 より基本行列 $X_1, \ldots, X_m$ と $Y_1, \ldots, Y_l$ で

$$X_1 \cdots X_m A Y_1 \cdots Y_l = F_{nn}(r)$$

となるものが存在する．つまり，行基本変形と列基本変形を繰り返すことにより対角線上に 1 が r 個並ぶ形にできる．この両辺の転置をとれば，右辺 $F_{nn}(r)$ は対称行列なので転置をとっても変わらないから

$${}^tY_l \cdots {}^tY_1\, {}^t\!A\, {}^tX_m \cdots {}^tX_1 = F_{nn}(r)$$

となる．よって

$$X_1 \cdots X_m A Y_1 \cdots Y_l = {}^tY_l \cdots {}^tY_1\, {}^t\!A\, {}^tX_m \cdots {}^tX_1$$

が得られ，この両辺の行列式を考えれば，定理 4.1 より

$$|X_1| \cdots |X_m|\, |A|\, |Y_1| \cdots |Y_l| = |{}^tY_l| \cdots |{}^tY_1|\, |{}^t\!A|\, |{}^tX_m| \cdots |{}^tX_1|$$

が成り立つ．

ここで基本行列については，第 3 章定義 1.1 と第 3 章定理 1.9 より $Q_n(i;c)$ と $R_n(i,j)$ は対称行列で，さらに行列式について

$$|P_n(i,j;c)| = |{}^tP_n(i,j;c)| = 1, \qquad |Q_n(i;c)| = c, \qquad |R_n(i,j)| = -1$$

となる．ゆえに，任意の基本行列 X に対して，$|X| = |{}^tX| \fallingdotseq 0$ が成り立つ．したがって

$$\begin{aligned} |X_1| \cdots |X_m|\, |A|\, |Y_1| \cdots |Y_l| &= |{}^tY_l| \cdots |{}^tY_1|\, |{}^t\!A|\, |{}^tX_m| \cdots |{}^tX_1| \\ &= |Y_l| \cdots |Y_1|\, |{}^t\!A|\, |X_m| \cdots |X_1| \end{aligned}$$

より，$|A| = |{}^t\!A|$ が成り立つ． □

行列 A を行基本変形することは，左から基本行列 X をかけることに相当した．これは

$${}^t(XA) = {}^t\!A\, {}^tX$$

と見れば，転置行列 ${}^t\!A$ に右から基本行列 ${}^tX$ をかけているので，${}^t\!A$ を列基本変形することと同じである．つまり，言い換えれば元の行列 A の行基本変形は，転置行列 ${}^t\!A$ を列基本変形し，さらにその転置をとることと同値になる．行列式の値は定理 4.3 より転置をとる操作で変わらないので，列について成り立つ性質はすべて行についても成り立つ．したがって，次が証明できたことになる．

定理 4.4. （行基本変形と行列式の関係）
n 次正方行列に対して，行基本変形と行列式について以下が成り立つ．

(1) ある行に別の行のスカラー倍を加えても行列式は変わらない

(2) ある行を α 倍すると行列式も α 倍される（α がくくり出される）

(3) 行を入れ替えると行列式は -1 倍される

特にスカラー倍で $\alpha = 0$ とすれば，すべて成分が 0 である行があれば行列式の値は 0 となる．

定理 2.7 についても，n 次正方行列の場合に一般化できる．具体的な表示式を用いても証明できるが，表示式の導出をなぞる形で証明する．

定理 4.5. （ブロック分けされた行列の行列式）

A を m 次正方行列，B を n 次正方行列，X を $m \times n$ 行列とする．このとき，ブロック分けされた $(m+n)$ 次正方行列の行列式について

$$\det \begin{pmatrix} A & X \\ O & B \end{pmatrix} = (\det A)(\det B)$$

が成り立つ．

証明. $A = (a_{ij})$，$B = (b_{ij})$，$X = (x_{ij})$ とおいて，$\begin{pmatrix} A & X \\ O_{n,m} & B \end{pmatrix}$ の列ベクトル分解を考える．第 j 列について，$1 \leqq j \leqq m$ のときは

$$a_{1j}\boldsymbol{e}_1 + \cdots + a_{mj}\boldsymbol{e}_m + 0\boldsymbol{e}_{m+1} + \cdots + 0\boldsymbol{e}_{m+n} = \sum_{i=1}^{m} a_{ij}\boldsymbol{e}_i$$

と表せる．また，$m+1 \leqq j \leqq m+n$ のときは，$s = j - m$ とおけば，$1 \leqq s \leqq n$ に対して

$$x_{1s}\boldsymbol{e}_1 + \cdots + x_{ms}\boldsymbol{e}_m + b_{1s}\boldsymbol{e}_{m+1} + \cdots + b_{ns}\boldsymbol{e}_{m+n} = \sum_{k=1}^{m} x_{ks}\boldsymbol{e}_k + \sum_{l=1}^{n} b_{ls}\boldsymbol{e}_{m+l}$$

と表せる．よって，行列式 $\begin{vmatrix} A & X \\ O & B \end{vmatrix}$ を多重線形性で展開すれば

$$\begin{aligned}
&\left| \sum_{i_1=1}^{m} a_{i_1 1}\boldsymbol{e}_{i_1} \quad \cdots \quad \sum_{i_m=1}^{m} a_{i_m m}\boldsymbol{e}_{i_m} \quad \sum_{k_1=1}^{m} x_{k_1 1}\boldsymbol{e}_{k_1} + \sum_{l_1=1}^{n} b_{l_1 1}\boldsymbol{e}_{m+l_1} \quad \cdots \quad \sum_{k_n=1}^{m} x_{k_n n}\boldsymbol{e}_{k_n} + \sum_{l_n=1}^{n} b_{l_n n}\boldsymbol{e}_{m+l_n} \right| \\
&\qquad = \left| \sum_{i_1=1}^{m} a_{i_1 1}\boldsymbol{e}_{i_1} \quad \cdots \quad \sum_{i_m=1}^{m} a_{i_m m}\boldsymbol{e}_{i_m} \quad \sum_{l_1=1}^{n} b_{l_1 1}\boldsymbol{e}_{m+l_1} \quad \cdots \quad \sum_{l_n=1}^{n} b_{l_n n}\boldsymbol{e}_{m+l_n} \right| \\
&\qquad = \sum_{[i_1,i_2,\ldots,i_m]\in S_m} \sum_{[l_1,l_2,\ldots,l_n]\in S_n} a_{i_1 1}\cdots a_{i_m m} b_{l_1 1}\cdots b_{l_n n} \left| \boldsymbol{e}_{i_1} \quad \cdots \quad \boldsymbol{e}_{i_m} \quad \boldsymbol{e}_{m+l_1} \quad \cdots \quad \boldsymbol{e}_{m+l_n} \right|
\end{aligned}$$

が成り立つ．実際，第 m 列までは $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \ldots, \boldsymbol{e}_m$ しかないため，それ以降の列からこれらと同じ単位ベクトルを選ぶと退化性より 0 となる．ゆえに，第 $m+1$ 列以降は $\boldsymbol{e}_{m+1}, \ldots, \boldsymbol{e}_{m+n}$ の中から選ぶしかなく，係数が x_{ij} の形の項は現れない．また，行列式の部分は単位行列になるように列を入れ替えれば

$$\begin{aligned}
\left| \boldsymbol{e}_{i_1} \quad \cdots \quad \boldsymbol{e}_{i_m} \quad \boldsymbol{e}_{m+l_1} \quad \cdots \quad \boldsymbol{e}_{m+l_n} \right| &= (-1)^{N[i_1,i_2,\ldots,i_m]}(-1)^{N[l_1,l_2,\ldots,l_n]} \left| \boldsymbol{e}_1 \quad \cdots \quad \boldsymbol{e}_m \quad \boldsymbol{e}_{m+1} \quad \cdots \quad \boldsymbol{e}_{m+n} \right| \\
&= (-1)^{N[i_1,i_2,\ldots,i_m]}(-1)^{N[l_1,l_2,\ldots,l_n]}
\end{aligned}$$

となるから

$$\begin{aligned}
\begin{vmatrix} A & X \\ O & B \end{vmatrix} &= \sum_{[i_1,i_2,\ldots,i_m]\in S_m} \sum_{[l_1,l_2,\ldots,l_n]\in S_n} a_{i_1 1}\cdots a_{i_m m} b_{l_1 1}\cdots b_{l_n n} (-1)^{N[i_1,i_2,\ldots,i_m]}(-1)^{N[l_1,l_2,\ldots,l_n]} \\
&= \sum_{[i_1,i_2,\ldots,i_m]\in S_m} (-1)^{N[i_1,i_2,\ldots,i_m]} a_{i_1 1}\cdots a_{i_m m} \sum_{[l_1,l_2,\ldots,l_n]\in S_n} (-1)^{N[l_1,l_2,\ldots,l_n]} b_{l_1 1}\cdots b_{l_n n} \\
&= (\det A)(\det B)
\end{aligned}$$

が成り立つ． $\square$

ブロック分けされた行列式の計算法より，3 次行列式に関する定理 2.7 が n 次行列式についても成り立ち

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

となることがわかる．

これより，4 次行列式に対しても

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 \\ 4 & 0 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 & 10 \\ 11 & 0 & 12 & 13 \end{vmatrix} &= - \begin{vmatrix} 7 & 8 & 9 & 10 \\ 4 & 0 & 5 & 6 \\ 1 & 0 & 2 & 3 \\ 11 & 0 & 12 & 13 \end{vmatrix} & \quad &\text{(第 1 行と第 3 行の入れ替え)} \\ &= \begin{vmatrix} 8 & 7 & 9 & 10 \\ 0 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 11 & 12 & 13 \end{vmatrix} & &\text{(第 1 列と第 2 列の入れ替え)} \\ &= 8 \begin{vmatrix} 4 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 3 \\ 11 & 12 & 13 \end{vmatrix} \end{aligned}$$

と行列式のサイズを小さくできる．ただし，毎回このように行や列の入れ替えを行うのは手間である．また，適当に行や列を入れ替えると成分がシャッフルされて元の行列式との関係性が見えにくい．そこで，次のように隣りどうしを行または列を入れ替えれて考えれば

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 \\ 4 & 0 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 & 10 \\ 11 & 0 & 12 & 13 \end{vmatrix} &= - \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 \\ 7 & 8 & 9 & 10 \\ 4 & 0 & 5 & 6 \\ 11 & 0 & 12 & 13 \end{vmatrix} & \quad &\text{(第 2 行と第 3 行の入れ替え)} \\ &= (-1)^2 \begin{vmatrix} 7 & 8 & 9 & 10 \\ 1 & 0 & 2 & 3 \\ 4 & 0 & 5 & 6 \\ 11 & 0 & 12 & 13 \end{vmatrix} & &\text{(第 1 行と第 2 行の入れ替え)} \\ &= (-1)^3 \begin{vmatrix} 8 & 7 & 9 & 10 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 11 & 12 & 13 \end{vmatrix} & &\text{(第 1 列と第 2 列の入れ替え)} \\ &= (-1)^3 8 \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 11 & 12 & 13 \end{vmatrix} \end{aligned}$$

となり，まとめると

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 \\ 4 & 0 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 & 10 \\ 11 & 0 & 12 & 13 \end{vmatrix} = (-1)^3 8 \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 11 & 12 & 13 \end{vmatrix}$$

とできる．このように青い行と列を削除して，交差点である成分を前に出せばよい．後は交差点が (i, j) 成分ならば，$i+j$ の偶奇に応じて最後に -1 倍が残るかどうかがわかる．これを公式として使えるようにまとめると次のようになる．

定理 4.6. （行列式のサイズダウン）

ある列が 1 つの成分を除いて 0 である行列式において

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1,j-1} & 0 & a_{1,j+1} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i-1,1} & \cdots & a_{i-1,j-1} & 0 & a_{i-1,j+1} & \cdots & a_{i-1,n} \\ a_{i,1} & \cdots & a_{i,j-1} & a_{ij} & a_{i,j+1} & \cdots & a_{i,n} \\ a_{i+1,1} & \cdots & a_{i+1,j-1} & 0 & a_{i+1,j+1} & \cdots & a_{i+1,n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & \cdots & a_{n,j-1} & 0 & a_{n,j+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$= (-1)^{i+j} a_{ij} \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1,j-1} & a_{1,j+1} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i-1,1} & \cdots & a_{i-1,j-1} & a_{i-1,j+1} & \cdots & a_{i-1,n} \\ a_{i+1,1} & \cdots & a_{i+1,j-1} & a_{i+1,j+1} & \cdots & a_{i+1,n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & \cdots & a_{n,j-1} & a_{n,j+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

が成り立つ．ここで，左辺は n 次行列式，右辺は $n-1$ 次行列式である．

ある行が 1 つの成分を除いて 0 である場合の行列式についても，これと同様の式が成り立つ．

証明. 第 i 行を順次 1 つ上の行と交換して第 1 行までもってくると，2 つの行を $i-1$ 回入れ替えるので

$$（左辺）= (-1)^{i-1} \begin{vmatrix} a_{i,1} & \cdots & a_{i,j-1} & a_{ij} & a_{i,j+1} & \cdots & a_{i,n} \\ a_{11} & \cdots & a_{1,j-1} & 0 & a_{1,j+1} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i-1,1} & \cdots & a_{i-1,j-1} & 0 & a_{i-1,j+1} & \cdots & a_{i-1,n} \\ a_{i+1,1} & \cdots & a_{i+1,j-1} & 0 & a_{i+1,j+1} & \cdots & a_{i+1,n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & \cdots & a_{n,j-1} & 0 & a_{n,j+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \quad \cdots (*)$$

となる．次に，第 j 列を順次 1 つ左の列と交換して第 1 列までもってくると，2 つの列を $j-1$ 回入れ替えるので

$$(*) = (-1)^{i-1}(-1)^{j-1} \begin{vmatrix} a_{ij} & a_{i,1} & \cdots & a_{i,j-1} & a_{i,j+1} & \cdots & a_{i,n} \\ 0 & a_{11} & \cdots & a_{1,j-1} & a_{1,j+1} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & a_{i-1,1} & \cdots & a_{i-1,j-1} & a_{i-1,j+1} & \cdots & a_{i-1,n} \\ 0 & a_{i+1,1} & \cdots & a_{i+1,j-1} & a_{i+1,j+1} & \cdots & a_{i+1,n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & a_{n,1} & \cdots & a_{n,j-1} & a_{n,j+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$= (-1)^{i+j} a_{ij} \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1,j-1} & a_{1,j+1} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i-1,1} & \cdots & a_{i-1,j-1} & a_{i-1,j+1} & \cdots & a_{i-1,n} \\ a_{i+1,1} & \cdots & a_{i+1,j-1} & a_{i+1,j+1} & \cdots & a_{i+1,n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & \cdots & a_{n,j-1} & a_{n,j+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

が成り立つ．ここで，最後に定理 4.5 と $(-1)^{-2} = 1$ となることを用いた． □

4.2　4 次行列式および行列式の性質を用いた計算例

例題 4.7.　次の行列式の値を求めよ.

(1) $\begin{vmatrix} 5 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 4 \\ 3 & 6 & 0 & 1 \\ 4 & 7 & 0 & 2 \end{vmatrix}$　(2) $\begin{vmatrix} 0 & 1 & -2 & 3 \\ 1 & 0 & 3 & -2 \\ -2 & 3 & -1 & 0 \\ 3 & 2 & 0 & 1 \end{vmatrix}$　(3) $\begin{vmatrix} 2 & 8 & 4 & 1 \\ 7 & 6 & 7 & 1 \\ 2 & 4 & 4 & 0 \\ 1 & 2 & 5 & 1 \end{vmatrix}$

（解答）　計算法は複数考えられるので，以下では一例を挙げる.

(1)

$$\begin{vmatrix} 5 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 4 \\ 3 & 6 & 0 & 1 \\ 4 & 7 & 0 & 2 \end{vmatrix} = (-1)^5 \cdot 2 \begin{vmatrix} 5 & 2 & 1 \\ 3 & 6 & 1 \\ 4 & 7 & 2 \end{vmatrix} \qquad (\text{第 3 列について定理 4.6})$$

$$= -2 \begin{vmatrix} 5 & 2 & 1 \\ -2 & 4 & 0 \\ -6 & 3 & 0 \end{vmatrix} \qquad ((1,3)\ \text{成分による第 3 列の掃き出し})$$

$$= -2 \cdot (-1)^4 \begin{vmatrix} -2 & 4 \\ -6 & 3 \end{vmatrix} = -2(-6+24) = -36$$

(2)

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & -2 & 3 \\ 1 & 0 & 3 & -2 \\ -2 & 3 & -1 & 0 \\ 3 & 2 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & -2 & 3 \\ 1 & 0 & 3 & -2 \\ 0 & 3 & 5 & -4 \\ 0 & 2 & -9 & 7 \end{vmatrix} \qquad ((2,1)\ \text{成分による第 1 列の掃き出し})$$

$$= (-1)^3 \cdot 1 \begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 3 & 5 & -4 \\ 2 & -9 & 7 \end{vmatrix} \qquad (\text{第 1 列について定理 4.6})$$

$$= - \begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 11 & -13 \\ 0 & -5 & 1 \end{vmatrix} \qquad ((1,1)\ \text{成分による第 1 列の掃き出し})$$

$$= -1 \begin{vmatrix} 11 & -13 \\ -5 & 1 \end{vmatrix} = -(11-65) = 54$$

(3)

$$\begin{vmatrix} 2 & 8 & 4 & 1 \\ 7 & 6 & 7 & 1 \\ 2 & 4 & 4 & 0 \\ 1 & 2 & 5 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 6 & -1 & 0 \\ 6 & 4 & 2 & 0 \\ 2 & 4 & 4 & 0 \\ 1 & 2 & 5 & 1 \end{vmatrix} \qquad ((4,4)\ \text{成分による第 4 列の掃き出し})$$

$$= (-1)^8 \cdot 1 \begin{vmatrix} 1 & 6 & -1 \\ 6 & 4 & 2 \\ 2 & 4 & 4 \end{vmatrix} \qquad (\text{第 4 列について定理 4.6})$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 6 & -1 \\ 0 & -32 & 8 \\ 0 & -8 & 6 \end{vmatrix} \qquad ((1,1)\ \text{成分による第 1 列の掃き出し})$$

$$= 1 \begin{vmatrix} -32 & 8 \\ -8 & 6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 8 \\ 16 & 6 \end{vmatrix} = -128$$

（解答終）

ブロック分けされた行列については，そのブロック単位で行基本変形や列基本変形を行うと計算が便利なことがある．

例題 4.8. 次の行列式を計算し，因数分解された形で答えよ．

$$\begin{vmatrix} a & b & a & b \\ b & a & b & a \\ -a & -b & a & b \\ -b & -a & b & a \end{vmatrix}$$

（解答） 第 3 行に第 1 行を，第 4 行に第 2 行を加えれば

$$\begin{vmatrix} a & b & a & b \\ b & a & b & a \\ -a & -b & a & b \\ -b & -a & b & a \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b & a & b \\ b & a & b & a \\ 0 & 0 & 2a & 2b \\ 0 & 0 & 2b & 2a \end{vmatrix}$$

となる．よって，ブロック分けされた行列式なので

$$\begin{vmatrix} a & b & a & b \\ b & a & b & a \\ 0 & 0 & 2a & 2b \\ 0 & 0 & 2b & 2a \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b \\ b & a \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 2a & 2b \\ 2b & 2a \end{vmatrix} = (a^2-b^2)\cdot(4a^2-4b^2) = 4(a+b)^2(a-b)^2$$

である．

（別解） 2 次正方行列を $A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}$ とおけば，求める行列式は

$$\begin{vmatrix} a & b & a & b \\ b & a & b & a \\ -a & -b & a & b \\ -b & -a & b & a \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A & A \\ -A & A \end{vmatrix}$$

と表せる．よって，サイズの等しいブロック単位で基本変形を行えば

$$\begin{vmatrix} A & A \\ -A & A \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A & A \\ O & 2A \end{vmatrix} = |A|\cdot|2A| = (a^2-b^2)\cdot 4(a^2-b^2) = 4(a+b)^2(a-b)^2$$

である．

（解答終）

この解答のように，サイズが等しい分割ならばブロック単位で加える基本変形を行ってもよい（この操作を成分ごとに書いたものが最初の解答である）．ただし，ブロック単位のスカラー倍や行または列の入れ替えについては注意が必要である．実際，A, B, C, D が 2 次正方行列ならば

$$\begin{vmatrix} A & B \\ C & D \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} C & D \\ A & B \end{vmatrix}$$

であり，A, B, C, D が 3 次正方行列ならば

$$\begin{vmatrix} A & B \\ C & D \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} C & D \\ A & B \end{vmatrix}$$

となることがわかる．このようにブロック単位の行または列の入れ替えで -1 倍されるかどうかはブロックのサイズによって異なる．各自でこの理由を考えてみよ．**もしこの理由がわからない場合には，ブロック単位の基本変形は計算間違いを生むだけなので利用しない方がよい．**ただし，プログラミングをはじめとして行列を応用する場合には，煩雑な成分計算を避けるためブロック分けされた行列の各種計算ができることは必要不可欠な能力である．

例題 4.9. 次の行列式を計算し，有理数係数で因数分解された形で答えよ．

(1) $\begin{vmatrix} 1 & a & b & c+d \\ 1 & b & c & d+a \\ 1 & c & d & a+b \\ 1 & d & a & b+c \end{vmatrix}$ (2) $\begin{vmatrix} a & -b & -c & d \\ b & a & -d & -c \\ a & -b & c & -d \\ b & a & d & c \end{vmatrix}$ (3) $\begin{vmatrix} x & 1 & 1 & 1 \\ 1 & x & 0 & 0 \\ 1 & 0 & x & 0 \\ 1 & 0 & 0 & x \end{vmatrix}$

（解答） 計算法は複数考えられるので，以下では一例を挙げる．

(1) 第 4 列に第 2 列を加え，さらに第 4 列に第 3 列を加えれば

$$\begin{vmatrix} 1 & a & b & c+d \\ 1 & b & c & d+a \\ 1 & c & d & a+b \\ 1 & d & a & b+c \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & a & b & a+b+c+d \\ 1 & b & c & a+b+c+d \\ 1 & c & d & a+b+c+d \\ 1 & d & a & a+b+c+d \end{vmatrix} = (a+b+c+d)\begin{vmatrix} 1 & a & b & 1 \\ 1 & b & c & 1 \\ 1 & c & d & 1 \\ 1 & d & a & 1 \end{vmatrix}$$

となる．最後の行列式において第 1 列と第 4 列が同じ列ベクトルなので，退化性より求める行列式の値は 0 である．

(2) 2 次正方行列を

$$X = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}, \qquad Y = \begin{pmatrix} c & -d \\ d & c \end{pmatrix}$$

とおけば，求める行列式をブロック単位で基本変形して

$$\begin{vmatrix} a & -b & -c & d \\ b & a & -d & -c \\ a & -b & c & -d \\ b & a & d & c \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} X & -Y \\ X & Y \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2X & O \\ X & Y \end{vmatrix} = |2X| \cdot |Y| = 4(a^2+b^2)(c^2+d^2)$$

である．

(3) 基本変形を用いて

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} x & 1 & 1 & 1 \\ 1 & x & 0 & 0 \\ 1 & 0 & x & 0 \\ 1 & 0 & 0 & x \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} x & 1 & 1 & 1 \\ 1 & x & 0 & 0 \\ 0 & -x & x & 0 \\ 0 & -x & 0 & x \end{vmatrix} && (\text{第 3 行と第 4 行に第 2 行の } (-1) \text{ 倍を加える}) \\ &= \begin{vmatrix} x & 3 & 1 & 1 \\ 1 & x & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x & 0 \\ 0 & 0 & 0 & x \end{vmatrix} && (\text{第 2 列に第 3 列を加え，さらに第 2 列に第 4 列を加える}) \\ &= \begin{vmatrix} x & 3 \\ 1 & x \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} x & 0 \\ 0 & x \end{vmatrix} && (\text{ブロック分けされた行列式}) \\ &= (x^2-3)\cdot x^2 = x^2(x^2-3) \end{aligned}$$

である．

（解答終）

4 次以上の行列式になるとサラスの方法に相当するものがないため，うまく基本変形したりブロック分けをしたりして計算しなければならない．それでもうまくいかない場合には，次節で扱う『行列式の余因子展開』を検討することになる．

例題 4.10.　A が n 次正則行列ならば，その行列式の値について

$$\det A \fallingdotseq 0$$

であり，逆行列 A^{-1} の行列式の値は

$$\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det A}$$

となることを示せ.

（解答）　A は正則行列なので逆行列 A^{-1} が存在し

$$AA^{-1} = E_n$$

をみたす．この両辺の行列式をとれば

$$\det(AA^{-1}) = \det E_n = 1$$

であり，さらに行列式の積の性質（定理 4.1）より

$$\det(AA^{-1}) = \det A \cdot \det(A^{-1}) = 1$$

が成り立つ．よって，$\det A \fallingdotseq 0$ であり，$\det(A^{-1}) = \dfrac{1}{\det A}$ が得られる．

（解答終）

これより『A が正則ならば行列式の値は 0 ではない』ことがわかったが，次節では逆に『行列式の値が 0 でない行列は正則行列である』ことを証明する．したがって，与えられた正方行列が正則かどうかは，その行列式の値が 0 かどうかで完全に判定できる．これは 2 次正方行列の場合と同様の結果である．

例題 4.11.　A を n 次正方行列で，その行列式の値が -2 であるとする．このとき，次の行列の行列式の値を求めよ．ただし，P は n 次正則行列とする．

(1) $P^{-1}AP$　　(2) $3A$　　(3) ${}^tAA$

（解答）

(1)　上の例題の結果と積の行列式の性質（定理 4.1）より

$$\det(P^{-1}AP) = \det(P^{-1}) \cdot \det A \cdot \det P = \frac{1}{\det P} \cdot \det A \cdot \det P = \det A = -2$$

(2)　各行から 3 をくくりだすと，n 行あるので合計 n 回くくりだすことになる．よって，行基本変形と行列式の関係（定理 4.4）より

$$\det(3A) = 3^n \det A = -2 \cdot 3^n$$

(3)　積の行列式（定理 4.1）と転置行列の行列式の性質（定理 4.3）より

$$\det({}^tAA) = \det({}^tA) \cdot \det A = \det A \cdot \det A = (\det A)^2 = 4$$

（解答終）

4.3 ヴァンデルモンドの行列式

例題 4.12. n は 2 以上の自然数とする．次の n 次行列式の値について

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ x_1^2 & x_2^2 & \cdots & x_n^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \cdots & x_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{1 \leqq j < i \leqq n} (x_i - x_j)$$

が成り立つことを示せ．ただし，右辺は $1 \leqq j < i \leqq n$ となるすべての (i, j) の組について，$x_i - x_j$ の積をとることを意味する．

例題の解答に入る前に，いくつか解説する．まずこれは有名な行列式で『ヴァンデルモンドの行列式』と呼ばれている．また，等式の右辺がわかりにくいので，例えば $n = 3$ のときに具体的に書けば

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ x_1^2 & x_2^2 & x_3^2 \end{vmatrix} = (x_2 - x_1)(x_3 - x_1)(x_3 - x_2)$$

となる．

（解答） n に関する数学的帰納法で示す．まず最初に $n = 2$ のときは

$$（左辺）= \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ x_1 & x_2 \end{vmatrix} = x_2 - x_1 = （右辺）$$

より，等式は成り立つ．

次に $n = k - 1$ のとき（つまり $k - 1$ 次行列式のとき）に等式が成り立つと仮定する．$n = k$ のときの行列式を考える．第 $k - 1$ 行の $(-x_1)$ 倍を第 k 行に加えるという行基本変形を行うと

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_k \\ x_1^2 & x_2^2 & \cdots & x_k^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_1^{k-2} & x_2^{k-2} & \cdots & x_k^{k-2} \\ x_1^{k-1} & x_2^{k-1} & \cdots & x_k^{k-1} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_{k+1} \\ x_1^2 & x_2^2 & \cdots & x_k^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_1^{k-2} & x_2^{k-2} & \cdots & x_k^{k-2} \\ 0 & x_2^{k-2}(x_2 - x_1) & \cdots & x_k^{k-2}(x_k - x_1) \end{vmatrix}$$

となる．さらに，同様にして第 i 行の $(-x_1)$ 倍を第 $i + 1$ 行に加えるという操作を $i = k - 2, \ldots, 2, 1$ の順に行うと

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_k \\ x_1^2 & x_2^2 & \cdots & x_k^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_1^{k-2} & x_2^{k-2} & \cdots & x_k^{k-2} \\ x_1^{k-1} & x_2^{k-1} & \cdots & x_k^{k-1} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & x_2 - x_1 & \cdots & x_k - x_1 \\ 0 & x_2(x_2 - x_1) & \cdots & x_k(x_k - x_1) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & x_2^{k-3}(x_2 - x_1) & \cdots & x_k^{k-3}(x_k - x_1) \\ 0 & x_2^{k-2}(x_2 - x_1) & \cdots & x_k^{k-2}(x_k - x_1) \end{vmatrix}$$

が得られる．

次にブロック分けされた行列式の性質と，各列から共通因数をくくりだせば

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & x_2 - x_1 & \cdots & x_k - x_1 \\ 0 & x_2(x_2 - x_1) & \cdots & x_k(x_k - x_1) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & x_2^{k-3}(x_2 - x_1) & \cdots & x_k^{k-3}(x_k - x_1) \\ 0 & x_2^{k-2}(x_2 - x_1) & \cdots & x_k^{k-2}(x_k - x_1) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_2 - x_1 & \cdots & x_k - x_1 \\ x_2(x_2 - x_1) & \cdots & x_k(x_k - x_1) \\ \vdots & & \vdots \\ x_2^{k-2}(x_2 - x_1) & \cdots & x_k^{k-2}(x_k - x_1) \end{vmatrix}$$

$$= (x_2 - x_1)(x_3 - x_1)\cdots(x_k - x_1) \begin{vmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ x_2 & \cdots & x_k \\ \vdots & & \vdots \\ x_2^{k-2} & \cdots & x_k^{k-2} \end{vmatrix}$$

ここで，帰納法の仮定より，$k-1$ 次行列式に対して

$$\begin{vmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ x_2 & \cdots & x_k \\ \vdots & & \vdots \\ x_2^{k-2} & \cdots & x_k^{k-2} \end{vmatrix} = \prod_{2 \leqq j < i \leqq k} (x_i - x_j)$$

となるので，これを代入すれば

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ x_1^2 & x_2^2 & \cdots & x_n^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \cdots & x_n^{n-1} \end{vmatrix} = (x_2 - x_1)(x_3 - x_1)\cdots(x_k - x_1) \prod_{2 \leqq j < i \leqq k} (x_i - x_j) = \prod_{1 \leqq j < i \leqq k} (x_i - x_j)$$

である．よって，$n = k$ のときにも等式が成り立つ．

以上より，2 以上のすべての自然数 n に対して，ヴァンデルモンドの行列式の公式が成り立つ．

（解答終）

このヴァンデルモンドの行列式は，多項式の決定問題などに現れる．他にも応用例はあるので，知っておいて損はないと思う．

5 余因子行列と行列式の余因子展開

5.1 余因子展開

これまでに行列式をブロック分けすることで，より小さな行列式の計算に帰着させる方法を学習した．特に，定理 4.6 を用いれば，どこかの行または列を掃き出すたびに行列式のサイズを小さくできる．

ここでは n 次行列式を（掃き出しを行わずに）多重線形性により $n-1$ 次行列式の和に分解する方法を説明する．その準備として，まず余因子の定義を紹介する．

定義 5.1.（余因子行列）
n 次正方行列 $A=(a_{ij})$ に対して，A の第 i 行および第 j 列を取り除いて得られる $n-1$ 次正方行列を A_{ij} と表すことにする．このとき

$$\Delta_{ij} = (-1)^{i+j}\det(A_{ij})$$

を A の (i,j) **余因子**とよび

$$\widetilde{A} = {}^t(\Delta_{ij})$$

を A の**余因子行列**という．

例 5.2. $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$ に対して，余因子は

$$\Delta_{11} = \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \qquad \Delta_{12} = -\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} \qquad \Delta_{13} = \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

$$\Delta_{21} = -\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \qquad \Delta_{22} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} \qquad \Delta_{23} = -\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

$$\Delta_{31} = \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix} \qquad \Delta_{32} = -\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix} \qquad \Delta_{33} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

である．また，余因子行列は

$$\widetilde{A} = \begin{pmatrix} \Delta_{11} & \Delta_{21} & \Delta_{31} \\ \Delta_{12} & \Delta_{22} & \Delta_{32} \\ \Delta_{13} & \Delta_{23} & \Delta_{33} \end{pmatrix}$$

となる．$\widetilde{A}$ の成分の並び方には注意すること．$\widetilde{A}$ の (i,j) 成分は Δ_{ji} である．

n 次行列式を多重線形性により $n-1$ 次行列式の和に分解する方法は余因子展開と呼ばれる．

定理 5.3. （行列式の余因子展開）

n 次正方行列 $A=(a_{ij})$ に対して

$$\det A=\sum_{i=1}^{n}a_{ij}\Delta_{ij}=\sum_{i=1}^{n}(-1)^{i+j}a_{ij}\det(A_{ij})$$

が成り立つ．これを $\det A$ の第 j 列に関する余因子展開という．同様に

$$\det A=\sum_{j=1}^{n}a_{ij}\Delta_{ij}=\sum_{j=1}^{n}(-1)^{i+j}a_{ij}\det(A_{ij})$$

が成り立つ．これを $\det A$ の第 i 行に関する余因子展開という．

証明. 第 j 列に関する余因子展開を証明する．他の場合にも同様である．

$A=\begin{pmatrix}\boldsymbol{a}_1 & \cdots \boldsymbol{a}_n\end{pmatrix}$ を A の列ベクトル分解とする．さらに，第 j 列ベクトル $\boldsymbol{a}_j$ を

$$\boldsymbol{a}_j=\sum_{i=1}^{n}a_{ij}\boldsymbol{e}_i$$

と表せば，行列式の多重線形性より

$$\begin{aligned}\det A&=\begin{vmatrix}\boldsymbol{a}_1 & \cdots & \boldsymbol{a}_{j-1} & \sum_{i=1}^{n}a_{ij}\boldsymbol{e}_i & \boldsymbol{a}_{j+1} & \cdots & \boldsymbol{a}_n\end{vmatrix}\\&=\sum_{i=1}^{n}a_{ij}\begin{vmatrix}\boldsymbol{a}_1 & \cdots & \boldsymbol{a}_{j-1} & \boldsymbol{e}_i & \boldsymbol{a}_{j+1} & \cdots & \boldsymbol{a}_n\end{vmatrix}\end{aligned}$$

となる．

ここで，第 j 列について定理 4.6 を適用すれば

$$\begin{vmatrix}\boldsymbol{a}_1 & \cdots & \boldsymbol{a}_{j-1} & \boldsymbol{e}_i & \boldsymbol{a}_{j+1} & \cdots & \boldsymbol{a}_n\end{vmatrix}=(-1)^{i+j}\det(A_{ij})$$

であるから，余因子の定義と合わせて

$$\det A=\sum_{i=1}^{n}a_{ij}(-1)^{i+j}\det(A_{ij})=\sum_{i=1}^{n}a_{ij}\Delta_{ij}$$

が成り立つ． □

抽象的な証明は難しく見えるかもしれないが，これまでに積み重ねた内容を再度適切な順番にまとめただけである．余因子展開を具体的に書き下した例を次に紹介する．

具体的な行列式の計算にさまざまな余因子展開を適用してみる．行列式

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 8 & 9 & 4 \\ 7 & 6 & 5 \end{vmatrix}$$

の値を求めてみると

(1)　第 1 行で余因子展開すれば

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 8 & 9 & 4 \\ 7 & 6 & 5 \end{vmatrix} = (-1)^{1+1}1\begin{vmatrix} 9 & 4 \\ 6 & 5 \end{vmatrix} + (-1)^{1+2}2\begin{vmatrix} 8 & 4 \\ 7 & 5 \end{vmatrix} (-1)^{1+3}3\begin{vmatrix} 8 & 9 \\ 7 & 6 \end{vmatrix}$$

$$= 1(45-24) - 2(40-28) + 3(48-63) = -48$$

(2)　第 2 行で余因子展開すれば

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 8 & 9 & 4 \\ 7 & 6 & 5 \end{vmatrix} = (-1)^{2+1}8\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 6 & 5 \end{vmatrix} + (-1)^{2+2}9\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 7 & 5 \end{vmatrix} (-1)^{2+3}4\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 7 & 6 \end{vmatrix}$$

$$= -8(10-18) + 9(5-21) - 4(6-14) = -48$$

(3)　第 3 列で余因子展開すれば

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 8 & 9 & 4 \\ 7 & 6 & 5 \end{vmatrix} = (-1)^{1+3}3\begin{vmatrix} 8 & 9 \\ 7 & 6 \end{vmatrix} + (-1)^{2+3}4\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 7 & 6 \end{vmatrix} (-1)^{3+3}5\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 8 & 9 \end{vmatrix}$$

$$= 3(48-63) - 4(6-14) + 5(9-16) = -48$$

のようになる．

ここでは余因子展開の例として計算をしてみたが，**具体的な実数を成分とする行列式においてはこのように計算しないこと**．行列の基本変形を用いたり，あるいはサラスの方法を適用した方が速く正確である．前に出した例題と同じであるが，再掲しておくと

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 8 & 9 & 4 \\ 7 & 6 & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -7 & -20 \\ 0 & -8 & -16 \end{vmatrix} \qquad ((1,1)\text{ 成分による第 1 列の掃き出し})$$

$$= 1 \cdot \begin{vmatrix} -7 & -20 \\ -8 & -16 \end{vmatrix} = (-1)(-8)\begin{vmatrix} 7 & 20 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 8(14-20) = -48$$

のように計算する方がよい．

特に 4 次行列式については，3 次行列式 4 個の和で表すとそちらの方が手間である．ただし，成分が文字式を含む場合には，次に示す例題のように余因子展開が有効に働くことも多い．

例題 5.4.　次の行列式を計算せよ．

$$\begin{vmatrix} a & -b & -c & -d \\ b & a & -d & c \\ c & d & a & -b \\ d & -c & b & a \end{vmatrix}$$

（解答）　第 1 列で余因子展開すれば

$$\begin{vmatrix} a & -b & -c & -d \\ b & a & -d & c \\ c & d & a & -b \\ d & -c & b & a \end{vmatrix} = \begin{aligned} &(-1)^{1+1}a\begin{vmatrix} a & -d & c \\ d & a & -b \\ -c & b & a \end{vmatrix} + (-1)^{2+1}b\begin{vmatrix} -b & -c & -d \\ d & a & -b \\ -c & b & a \end{vmatrix} \\ &+(-1)^{3+1}c\begin{vmatrix} -b & -c & -d \\ a & -d & c \\ -c & b & a \end{vmatrix} + (-1)^{4+1}d\begin{vmatrix} -b & -c & -d \\ a & -d & c \\ d & a & -b \end{vmatrix} \end{aligned}$$

となる．ここで，サラスの方法より

$$\begin{vmatrix} a & -d & c \\ d & a & -b \\ -c & b & a \end{vmatrix} = a^3 + bcd - bcd + ac^2 + ad^2 + ab^2 = a(a^2+b^2+c^2+d^2)$$

$$\begin{vmatrix} -b & -c & -d \\ d & a & -b \\ -c & b & a \end{vmatrix} = -a^2b - bd^2 - bc^2 - acd + acd - b^3 = -b(a^2+b^2+c^2+d^2)$$

$$\begin{vmatrix} -b & -c & -d \\ a & -d & c \\ -c & b & a \end{vmatrix} = abd - abd + c^3 + cd^2 + a^2c + b^2c = c(a^2+b^2+c^2+d^2)$$

$$\begin{vmatrix} -b & -c & -d \\ a & -d & c \\ d & a & -b \end{vmatrix} = -b^2d - a^2d - c^2d - d^3 + abc - abc = -d(a^2+b^2+c^2+d^2)$$

であるから，求める行列式は

$$\begin{aligned} &a\begin{vmatrix} a & -d & c \\ d & a & -b \\ -c & b & a \end{vmatrix} - b\begin{vmatrix} -b & -c & -d \\ d & a & -b \\ -c & b & a \end{vmatrix} + c\begin{vmatrix} -b & -c & -d \\ a & -d & c \\ -c & b & a \end{vmatrix} - d\begin{vmatrix} -b & -c & -d \\ a & -d & c \\ d & a & -b \end{vmatrix} \\ &\qquad = a \cdot a(a^2+b^2+c^2+d^2) - b \cdot \{-b(a^2+b^2+c^2+d^2)\} \\ &\qquad\qquad + c \cdot c(a^2+b^2+c^2+d^2) - d \cdot \{-d(a^2+b^2+c^2+d^2)\} \\ &\qquad = (a^2+b^2+c^2+d^2)^2 \end{aligned}$$

である．

（解答終）

この例題のように成分に文字式が現れると，基本変形で 0 を増やすのが難しいことがある．その場合には余因子展開を用いてサイズの小さな行列式の和で表せば，後はサラスの方法などと組み合わせることで必ず行列式を計算できる．ただし，成分がすべて具体的な実数の場合には，余因子展開よりも基本変形を用いた計算の方が簡単なことが多い．もし上の例題で a, b, c, d が具体的な数字ならば，上の解答のように計算するとミスなしで計算するのは難しいことが想像できると思う．

なお，上の例題は a, b, c, d がそれぞれ 0 かどうか場合分けしてから各行からうまく括りだして，さらに基本変形などを駆使すれば余因子展開を持ち出さなくても計算できる．しかし，ある程度の経験と答えに関する予想が立つまでは，その発想は難しいように思う．また，文字が 0 かどうかの場合分けが必要になるので，解答の長さとしては上の余因子展開のものとそれほど変わらない．

例題 5.5.　次の行列式を計算せよ．

$$\begin{vmatrix} \sin\theta\cos\varphi & r\cos\theta\cos\varphi & -r\sin\theta\sin\varphi \\ \sin\theta\sin\varphi & r\cos\theta\sin\varphi & r\sin\theta\cos\varphi \\ \cos\theta & -r\sin\theta & 0 \end{vmatrix}$$

（解答）

第 3 行で余因子展開すれば

$$\begin{aligned}
&\begin{vmatrix} \sin\theta\cos\varphi & r\cos\theta\cos\varphi & -r\sin\theta\sin\varphi \\ \sin\theta\sin\varphi & r\cos\theta\sin\varphi & r\sin\theta\cos\varphi \\ \cos\theta & -r\sin\theta & 0 \end{vmatrix} \\
&\qquad = (-1)^{3+1}\cos\theta \begin{vmatrix} r\cos\theta\cos\varphi & -r\sin\theta\sin\varphi \\ r\cos\theta\sin\varphi & r\sin\theta\cos\varphi \end{vmatrix} + (-1)^{3+2}(-r\sin\theta) \begin{vmatrix} \sin\theta\cos\varphi & -r\sin\theta\sin\varphi \\ \sin\theta\sin\varphi & r\sin\theta\cos\varphi \end{vmatrix} \\
&\qquad = r^2\sin\theta\cos^2\theta \begin{vmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{vmatrix} + r^2\sin^3\theta \begin{vmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{vmatrix} \\
&\qquad = (r^2\sin\theta\cos^2\theta + r^2\sin^3\theta)(\cos^2\varphi + \sin^2\varphi) \\
&\qquad = r^2\sin\theta(\cos^2\theta + \sin^2\theta) \\
&\qquad = r^2\sin\theta
\end{aligned}$$

である．

（解答終）

（別解）

第 3 列で余因子展開すれば

$$\begin{aligned}
&\begin{vmatrix} \sin\theta\cos\varphi & r\cos\theta\cos\varphi & -r\sin\theta\sin\varphi \\ \sin\theta\sin\varphi & r\cos\theta\sin\varphi & r\sin\theta\cos\varphi \\ \cos\theta & -r\sin\theta & 0 \end{vmatrix} \\
&\quad = (-1)^{1+3}(-r\sin\theta\sin\varphi) \begin{vmatrix} \sin\theta\sin\varphi & r\cos\theta\sin\varphi \\ \cos\theta & -r\sin\theta \end{vmatrix} + (-1)^{2+3} r\sin\theta\cos\varphi \begin{vmatrix} \sin\theta\cos\varphi & r\cos\theta\cos\varphi \\ \cos\theta & -r\sin\theta \end{vmatrix} \\
&\quad = -r^2\sin\theta\sin^2\varphi \begin{vmatrix} \sin\theta & \cos\theta \\ \cos\theta & -\sin\theta \end{vmatrix} - r^2\sin\theta\cos^2\varphi \begin{vmatrix} \sin\theta & \cos\theta \\ \cos\theta & -\sin\theta \end{vmatrix} \\
&\quad = -(r^2\sin\theta\sin^2\varphi + r^2\sin\theta\cos^2\varphi)(-\sin^2\theta - \cos^2\theta) \\
&\quad = r^2\sin\theta(\cos^2\varphi + \sin^2\varphi) \\
&\quad = r^2\sin\theta
\end{aligned}$$

である．

（別解終）

この例題でも，基本変形で成分に 0 を増やすことは難しい．3 次行列式なのでサラスの方法で計算してもよいが，やや各項が複雑なので式が長くなり面倒である．このように文字式でさらに成分の並びに規則性や意味がありそうな場合には，3 次行列式でも余因子展開の方が楽なこともある．例えば，成分に三角関数がある場合には，うまく $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ を用いることができる方向に変形するとよい．

例題 5.6.　次の n 次行列式を計算せよ.

$$\begin{vmatrix} x^2+1 & x & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ x & x^2+1 & x & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & x & x^2+1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x^2+1 & x \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x & x^2+1 \end{vmatrix}$$

（解答）　求める n 次行列式を（x の関数なので）$f_n(x)$ とおく.

$n \geqq 3$ のとき，第 1 列について余因子展開すれば（成分が 0 の部分を省略して空欄にすると）

$$\begin{aligned} f_n(x) &= (x^2+1)\begin{vmatrix} x^2+1 & x & & & \\ x & x^2+1 & x & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & x & x^2+1 & x \\ & & & x & x^2+1 \end{vmatrix} - x\begin{vmatrix} x & & & & \\ x & x^2+1 & x & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & x & x^2+1 & x \\ & & & x & x^2+1 \end{vmatrix} \\ &= (x^2+1)f_{n-1}(x) - x^2\begin{vmatrix} x^2+1 & x & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & x & x^2+1 & x \\ & & x & x^2+1 \end{vmatrix} \\ &= (x^2+1)f_{n-1}(x) - x^2 f_{n-2}(x) \end{aligned}$$

となる．行列式のサイズに注意すること．右辺の 1 行目は $n-1$ 次行列式，2 行目は $n-2$ 次行列式である.

これより，自然数 n に対して

$$f_{n+2}(x) = (x^2+1)f_{n+1}(x) - x^2 f_n(x)$$

が成り立つ．この漸化式は

$$f_{n+2}(x) - f_{n+1}(x) = x^2\{f_{n+1}(x) - f_n(x)\}$$

と変形できる．また

$$f_1(x) = x^2+1, \qquad f_2(x) = \begin{vmatrix} x^2+1 & x \\ x & x^2+1 \end{vmatrix} = x^4+x^2+1$$

であるから

$$f_{n+1}(x) - f_n(x) = (x^2)^{n-1}\{f_2(x) - f_1(x)\} = x^{2n+2}$$

となるので，$n \geqq 2$ のとき

$$f_n(x) = f_1(x) + \sum_{k=1}^{n-1} x^{2k+2} = (x^2+1) + \sum_{k=2}^{n} x^{2k} = \sum_{k=0}^{n} x^{2k}$$

である．これは $n=1$ のときにも成り立つ.

（解答終）

n 次行列式については，成分の規則性を利用しなければ求められない．このように余因子展開を利用すれば，行列式のサイズに関する漸化式を作ることができる場合もある．もし先に結論が提示してあれば，余因子展開と数学的帰納法により証明することもできる.

5.2　行列式と正則行列

A の余因子行列 $\widetilde{A}$ に対して，次が成り立つ．

命題 5.7.　$\widetilde{A}$ を A の余因子行列とするとき

$$\widetilde{A}A = A\widetilde{A} = (\det A)E_n$$

が成り立つ．

証明.　$\widetilde{A}A$ の (j,k) 成分は $\sum_{i=1}^{n} \Delta_{ij}a_{ik}$ である．

(i)　$j = k$ ならば，A の第 j 列に関する余因子展開と見れば

$$\sum_{i=1}^{n} a_{ij}\Delta_{ij} = \det A$$

が成り立つ．

(ii)　$j \neq k$ ならば，$A' = (a'_{ij})$ を A の第 j 列を第 k 列に置き換えた行列，つまり

$$A' = (a'_{ij}) = \begin{pmatrix} \cdots & \boldsymbol{a}_k & \cdots & \boldsymbol{a}_k & \cdots \end{pmatrix}$$

とすると，退化条件より $\det(A') = 0$ である．一方，$\det(A')$ の第 j 列に関する余因子展開は

$$\det(A') = \sum_{i=1}^{n} a'_{ij}\Delta_{ij} = \sum_{i=1}^{n} a_{ik}\Delta_{ij}$$

であるから，$\sum_{i=1}^{n} a_{ik}\Delta_{ij} = \det(A') = 0$ が成り立つ．

以上より，$\widetilde{A}A$ は対角成分が $\det A$ で対角成分以外は 0 なので，$\widetilde{A}A = (\det A)E_n$ が成り立つ．行に関しても同様にすれば，$A\widetilde{A} = (\det A)E_n$ が成り立つことが示される．　□

この事実より，A が正則ならばその逆行列 A^{-1} は余因子行列 $\widetilde{A}$ を用いて表せることがわかる．

定理 5.8.（余因子行列を用いた逆行列の公式）
n 次正方行列 A が正則であるための必要十分条件は，$\det A \neq 0$ となることである．さらに，A が正則であるとき，$\det(A^{-1}) = (\det A)^{-1}$ であり

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A}\,\widetilde{A}$$

が成り立つ．

証明.　A が正則ならば，逆行列 A^{-1} が存在して

$$1 = \det E_n = \det(AA^{-1}) = \det A \cdot \det(A^{-1})$$

となるから，$\det A \neq 0$ かつ $\det(A^{-1}) = (\det A)^{-1}$ が成り立つ．

逆に，$\det A \neq 0$ ならば，命題 5.7 より

$$\left(\frac{1}{\det A}\,\widetilde{A}\right)A = A\left(\frac{1}{\det A}\,\widetilde{A}\right) = E_n$$

が得られるから，A の逆行列は存在し，$A^{-1} = \dfrac{1}{\det A}\,\widetilde{A}$ となる．ゆえに，A は正則である．　□

定理 5.8 は逆行列の公式を与えているが，具体的な計算においてはそれほど有効ではない．

例えば，$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -5 & -2 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ の逆行列を定理 5.8 を用いて求めると，まず行列式は

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -5 & -2 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & -12 & 6 \\ 0 & 5 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -12 & 6 \\ 5 & 0 \end{vmatrix} = -30$$

であり，余因子は

$$\Delta_{11} = \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = -5 \qquad \Delta_{12} = -\begin{vmatrix} -5 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 6 \qquad \Delta_{13} = \begin{vmatrix} -5 & -2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = -13$$

$$\Delta_{21} = -\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 5 \qquad \Delta_{22} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \qquad \Delta_{23} = -\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = -5$$

$$\Delta_{31} = \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = 0 \qquad \Delta_{32} = -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -5 & 1 \end{vmatrix} = -6 \qquad \Delta_{33} = \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -5 & -2 \end{vmatrix} = -12$$

なので

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A}\begin{pmatrix} \Delta_{11} & \Delta_{21} & \Delta_{31} \\ \Delta_{12} & \Delta_{22} & \Delta_{32} \\ \Delta_{13} & \Delta_{23} & \Delta_{33} \end{pmatrix} = \frac{1}{-30}\begin{pmatrix} -5 & 5 & 0 \\ 6 & 0 & -6 \\ -13 & -5 & -12 \end{pmatrix} = \frac{1}{30}\begin{pmatrix} 5 & -5 & 0 \\ -6 & 0 & 6 \\ 13 & 5 & 12 \end{pmatrix}$$

となる．ただし，この方法では符号を間違えやすい．一方，掃き出し法を利用すれば

$$(A \,|\, E_3) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ -5 & -2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[\text{第 1 列の掃き出し}]{\text{(1,1) 成分による}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -12 & 6 & 5 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[\text{第 2 行と第 3 行の入れ替え}]{\text{第 3 行を 1/5 倍から}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1/5 & 0 & 1/5 \\ 0 & -12 & 6 & 5 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[\text{第 2 列の掃き出し}]{\text{(2,2) 成分による}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 3/5 & 0 & 2/5 \\ 0 & 1 & 0 & -1/5 & 0 & 1/5 \\ 0 & 0 & 6 & 13/5 & 1 & 12/5 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{\text{第 3 行を 1/6 倍}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 3/5 & 0 & 2/5 \\ 0 & 1 & 0 & -1/5 & 0 & 1/5 \\ 0 & 0 & 1 & 13/30 & 1/6 & 2/5 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[\text{第 3 列の掃き出し}]{\text{(3,3) 成分による}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1/6 & -1/6 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1/5 & 0 & 1/5 \\ 0 & 0 & 1 & 13/30 & 1/6 & 2/5 \end{array}\right)$$

となり，まだ計算過程の見直しはしやすい方である．また，行列式の値 $\det A$ の計算の段階でも掃き出し法を用いているので，特に定理 5.8 を使うと速いというわけではない．

まだ上の例は A が 3 次正方行列なのでよかったが，もし 4 次正方行列の場合に定理 5.8 を適用すれば 4 次行列式 $\det A$ と 16 個の 3 次行列式 Δ_{ij} $(i, j = 1, 2, 3, 4)$ を求めなければならず，正確に計算することは困難である．仮に計算できたとしても，掃き出し法による方法よりも莫大な時間がかかってしまう．理論上は定理 5.8 は重要であるが，具体的な計算には向かないので注意すること．

前の定理 5.8 より，逆行列に関して次が成り立つことがわかる．

定理 5.9. A を n 次正方行列とする．

(1) $AX = E_n$ となる行列 X が存在するならば，A は正則で $X = A^{-1}$ である．

(2) $YA = E_n$ となる行列 Y が存在するならば，A は正則で $Y = A^{-1}$ である．

証明. $AX = E_n$ となる行列 X が存在するならば，両辺の行列式をとれば

$$1 = \det E_n = \det(AX) = \det A \cdot \det X$$

より，$\det A \neq 0$ となる．よって，定理 5.8 から A は正則である．さらに，$AX = E_n$ の両辺に左から A^{-1} をかければ，$X = A^{-1}$ が成り立つこともわかる．

$YA = E_n$ となる Y が存在するときも，まったく同様に示すことができる． □

この定理 5.9 より，実は $XA = E_n$ となる X を見つければ，$AX = E_n$ は確認しなくてもこの等式は必ず成り立ち，$X = A^{-1}$ となることがわかる．

行列の正則性に関して，ここまでにわかったことをまとめておく．

定理 5.10.（行列が正則であるための必要十分条件）

n 次正方行列 A に対して，次の条件はすべて同値である．

(1) A は正則（逆行列が存在する）

(2) $\operatorname{rank} A = n$

(3) A は行基本変形により単位行列 E_n に変形できる．

(4) A は基本行列の積で表せる．

(5) $\det A \neq 0$

(6) 斉次連立 1 次方程式 $A\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$ は自明な解 $\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$ しかもたない．

証明. 第 6 章定理 1.1 と第 6 章定理 2.1，および定理 5.8 より (1) から (5) はすべて同値である．

(1)$\Longrightarrow$(6)

A^{-1} が存在するならば，方程式 $A\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$ の両辺に左から A^{-1} をかければ $\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$ となるから，自明な解しか存在しない．

(6)$\Longrightarrow$(2)

もし $\operatorname{rank} A < n$ ならば，未知数が n 個の連立 1 次方程式 $A\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$ は無限個の解をもつ．よって，自明な解しかもたないならば $\operatorname{rank} A = n$ である． □

このように行列が正則かどうか判定するには多くの方法がある．解決すべき問題ごとにチェックしやすい条件としにくい条件があるので，どれが重要ということもないからすべて理解しておくこと．同値であることを簡単にでも説明できるようになっておくことが望ましい．

例題 5.11. $A \in M_3(\mathbb{R})$ は交代行列であるとする．このとき，次を証明せよ．

(1) 任意の $\boldsymbol{u} \in \mathbb{R}^3$ に対して
$$\|(A+E_3)\boldsymbol{u}\| = \|(A-E_3)\boldsymbol{u}\| \geqq \|\boldsymbol{u}\|$$
が成り立つ．

(2) $A+E_3$ と $A-E_3$ はそれぞれ正則行列である．

解答の前に復習しておくと，空間ベクトル $\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$，$\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$ の長さと内積は
$$\|\boldsymbol{a}\| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}, \qquad (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3 = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = {}^t\boldsymbol{a}\boldsymbol{b}$$
と表せるのであった．

（解答）

(1) A は交代行列なので，${}^tA = -A$ をみたす．よって，任意の $\boldsymbol{u} \in \mathbb{R}^3$ に対して，2 つのベクトル $A\boldsymbol{u}$ と $\boldsymbol{u}$ の内積を考えると
$$(A\boldsymbol{u}, \boldsymbol{u}) = {}^t(A\boldsymbol{u})\boldsymbol{u} = {}^t\boldsymbol{u}{}^tA\boldsymbol{u} = {}^t\boldsymbol{u}(-A)\boldsymbol{u} = -{}^t\boldsymbol{u}(A\boldsymbol{u}) = -(\boldsymbol{u}, A\boldsymbol{u}) = -(A\boldsymbol{u}, \boldsymbol{u})$$
となる．よって，$(A\boldsymbol{u}, \boldsymbol{u}) = 0$ が成り立つ．

ゆえに，任意の $\boldsymbol{u} \in \mathbb{R}^3$ に対して
$$\|(A+E_3)\boldsymbol{u}\|^2 = \|A\boldsymbol{u}+\boldsymbol{u}\|^2 = \|A\boldsymbol{u}\|^2 + 2(A\boldsymbol{u}, \boldsymbol{u}) + \|\boldsymbol{u}\|^2 = \|A\boldsymbol{u}\|^2 + \|\boldsymbol{u}\|^2$$
$$\|(A-E_3)\boldsymbol{u}\|^2 = \|A\boldsymbol{u}-\boldsymbol{u}\|^2 = \|A\boldsymbol{u}\|^2 - 2(A\boldsymbol{u}, \boldsymbol{u}) + \|\boldsymbol{u}\|^2 = \|A\boldsymbol{u}\|^2 + \|\boldsymbol{u}\|^2$$
となるので
$$\|(A+E_3)\boldsymbol{u}\|^2 = \|(A-E_3)\boldsymbol{u}\|^2 = \|A\boldsymbol{u}\|^2 + \|\boldsymbol{u}\|^2 \geqq \|\boldsymbol{u}\|^2$$
である． よって，$\|(A+E_3)\boldsymbol{u}\| = \|(A-E_3)\boldsymbol{u}\| \geqq \|\boldsymbol{u}\|$ が成り立つ．

(2) $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3$ を斉次連立 1 次方程式 $(A+E_3)\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ の解とする．このとき，(1) より
$$\|\boldsymbol{x}\| \leqq \|(A+E_3)\boldsymbol{x}\| = \|\boldsymbol{0}\| = 0$$
より，$\|\boldsymbol{x}\| = 0$ つまり $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ となる．よって，$(A+E_3)\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ は自明な解のみをもつから，$A+E_3$ は正則である．同様にして，$A-E_3$ も正則であることが示される．

（解答終）

この例題の結果は n 次交代行列についても成り立つことがまったく同様にして証明できる．また，行列 A の具体的な成分はわからないから，$A+E_3$ の階数 $\mathrm{rank}(A+E_3) = 3$ や行列式 $|A+E_3| \fallingdotseq 0$ の条件などを計算して示すことは難しい．問題の性質に応じて適切な条件を選ぶことが重要なので，定理 5.10 の内容はしっかり理解しておくこと．

5.3 クラメールの公式

正則行列 A に対して，その逆行列は余因子行列 $\widetilde{A}$ を用いて

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A}\,\widetilde{A}$$

と表せることを定理 5.8 で示した．これを利用すれば，連立 1 次方程式 $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ の解の公式が得られる．

定理 5.12. （クラメールの公式）
A を n 次正則行列とし，$A = \begin{pmatrix}\boldsymbol{a}_1 & \cdots & \boldsymbol{a}_n\end{pmatrix}$ を列ベクトル分解とする．$\boldsymbol{b}$ を n 次数ベクトルとする．このとき，A を係数行列とする連立 1 次方程式 $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ の解 $\boldsymbol{x}$ の第 j 成分 x_j は

$$x_j = \frac{\begin{vmatrix}\boldsymbol{a}_1 & \cdots & \boldsymbol{a}_{j-1} & \boldsymbol{b} & \boldsymbol{a}_{j+1} & \cdots & \boldsymbol{a}_n\end{vmatrix}}{\det A} = \frac{1}{\det A}\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1,j-1} & b_1 & a_{1,j+1} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{i,j-1} & b_i & a_{i,j+1} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,j-1} & b_n & a_{n,j+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

で与えられる．

証明. A は正則であるから，定理 5.8 より

$$\boldsymbol{x} = A^{-1}\boldsymbol{b} = \frac{1}{\det A}\,\widetilde{A}\boldsymbol{b}$$

となるから，第 j 成分については A の余因子 Δ_{ij} を用いて

$$x_j = \frac{1}{\det A}\sum_{k=1}^{n}\Delta_{kj}b_k$$

と表せる．

一方，A の第 j 列を $\boldsymbol{b}$ で置き換えた行列式 $\begin{vmatrix}\boldsymbol{a}_1 & \cdots & \boldsymbol{a}_{j-1} & \boldsymbol{b} & \boldsymbol{a}_{j+1} & \cdots & \boldsymbol{a}_n\end{vmatrix}$ を第 j 列で余因子展開すれば

$$\begin{vmatrix}\boldsymbol{a}_1 & \cdots & \boldsymbol{a}_{j-1} & \boldsymbol{b} & \boldsymbol{a}_{j+1} & \cdots & \boldsymbol{a}_n\end{vmatrix} = \sum_{k=1}^{n} b_k\Delta_{kj}$$

であるから，上で得られた式に代入すれば

$$x_j = \frac{1}{\det A}\begin{vmatrix}\boldsymbol{a}_1 & \cdots & \boldsymbol{a}_{j-1} & \boldsymbol{b} & \boldsymbol{a}_{j+1} & \cdots & \boldsymbol{a}_n\end{vmatrix}$$

が成り立つ． □

注意 5.13. 普通は解の公式と聞くとそれを暗記して利用したくなるが，このクラメールの公式は具体的な連立 1 次方程式を解くときにはそれほど有用ではない．そのことを次の例で確かめてみる．

例 5.14. 次の連立 1 次方程式を複数の方法で解いてみる．

$$\begin{cases} x_1 + 5x_2 + 22x_3 = 77 \\ x_1 + 6x_2 + 26x_3 = 91 \\ x_1 + 8x_2 + 35x_3 = 122 \end{cases}$$

ここで，$A = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 22 \\ 1 & 6 & 26 \\ 1 & 8 & 35 \end{pmatrix}$，$\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 77 \\ 91 \\ 122 \end{pmatrix}$ とおけば，これは $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ と表せる．

(1) （拡大係数行列の掃き出し法による解答）

拡大係数行列をつくり，簡約階段行列に行基本変形すれば

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 5 & 22 & 77 \\ 1 & 6 & 26 & 91 \\ 1 & 8 & 35 & 122 \end{array}\right) \longmapsto \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 5 & 22 & 77 \\ 0 & 1 & 4 & 14 \\ 0 & 3 & 13 & 45 \end{array}\right) \longmapsto \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 7 \\ 0 & 1 & 4 & 14 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right) \longmapsto \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right)$$

となるから，$(x_1, x_2, x_3) = (1, 2, 3)$

(2) （逆行列による解答）

$$(A \,|\, E_3) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 5 & 22 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 6 & 26 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 8 & 35 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \longmapsto \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 5 & 22 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 13 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\longmapsto \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & 6 & -5 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -3 & 1 \end{array}\right)$$

$$\longmapsto \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 2 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & -9 & 13 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -3 & 1 \end{array}\right) = (E_3 \,|\, A^{-1})$$

より

$$\boldsymbol{x} = A^{-1}\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ -9 & 13 & -4 \\ 2 & -3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 77 \\ 91 \\ 122 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 154 + 91 - 244 \\ -693 + 1183 - 488 \\ 154 - 273 + 122 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

(3) （クラメールの解の公式による解答）

まず A の行列式を計算すると

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 5 & 22 \\ 1 & 6 & 26 \\ 1 & 8 & 35 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 5 & 22 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 3 & 13 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 5 & 22 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$$

であるから，A は正則で

$$x_1 = \frac{|\boldsymbol{b} \;\; \boldsymbol{a}_2 \;\; \boldsymbol{a}_3|}{\det A} = \begin{vmatrix} 77 & 5 & 22 \\ 91 & 6 & 26 \\ 122 & 8 & 35 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 77 & 5 & 22 \\ 14 & 1 & 4 \\ 122 & 8 & 35 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 7 & 0 & 2 \\ 14 & 1 & 4 \\ 10 & 0 & 3 \end{vmatrix} = (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} 7 & 2 \\ 10 & 3 \end{vmatrix} = 1$$

$$x_2 = \frac{|\boldsymbol{a}_1 \;\; \boldsymbol{b} \;\; \boldsymbol{a}_3|}{\det A} = \begin{vmatrix} 1 & 77 & 22 \\ 1 & 91 & 26 \\ 1 & 122 & 35 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 77 & 22 \\ 0 & 14 & 4 \\ 0 & 45 & 13 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 14 & 4 \\ 45 & 13 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 14 & 4 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 2$$

$$x_3 = \frac{|\boldsymbol{a}_1 \;\; \boldsymbol{a}_2 \;\; \boldsymbol{b}|}{\det A} = \begin{vmatrix} 1 & 5 & 77 \\ 1 & 6 & 91 \\ 1 & 8 & 122 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 5 & 77 \\ 0 & 1 & 14 \\ 0 & 3 & 45 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 5 & 77 \\ 0 & 1 & 14 \\ 0 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 3$$

このようにクラメールの解の公式を適用するためには何度も行列式を計算しなければならないため，他の解法と比べると時間がかかるうえにミスをしやすい．もし掃き出しが難しい場合（数値が複雑，文字係数を多数含むなど）でも，行列式ならば余因子展開で力押しできるというメリットは一応あるが，そのような場合には手計算ではなくパソコンを援用すべきであろう．

また，係数行列 A が正則でない場合（つまり無限個の解をもつ or 解なしのケース）については，もちろんクラメールの公式は利用できない．先に A の行列式を計算しても，もしそれが 0 となった場合には徒労に終わってしまう．当然ながら A が正方行列でなければ正則という概念が定義できないので，やはりクラメールの公式は利用できない．

A の逆行列を計算してかけるという解法は 2 次正方行列までなら有効だが，3 次以上になると計算量が増える．そもそも係数行列 A の右側に単位行列をつけて $(A\,|\,E_3)$ を変形するくらいなら，最初から定数項のベクトルをつけて拡大係数行列 $(A\,|\,\boldsymbol{b})$ を変形する方が速いし簡単である．

そのため，手計算する場合には連立 1 次方程式は常に拡大係数行列の掃き出し法を用いるのが確実である．コンピューターに解を計算させる場合でもクラメールの公式よりも速い計算法がある（クラメールの公式で実装しても計算量がとても多くコスト面で大きく劣る）ので，この公式を利用してプログラム計算をすることはまずないと考えてよい．行列式に関する歴史上および理論上は重要な公式ではあるが，普段は「係数行列が正則であれば，連立 1 次方程式の解を係数から表示できる公式がある」ということだけ理解しておけば，応用上は問題ない．

注意 5.15. 連立 1 次方程式や逆行列の計算法を久しぶりに述べたので，再度注意を述べておく．

- 連立 1 次方程式の計算において，拡大係数行列の変形は<u>行基本変形のみ</u>が許される．
  変形で行列の成分は変わるので，変形前後は矢印でつなぐ．行基本変形で変わらないのは方程式の解．

- 逆行列の計算では右側に単位行列をつけて<u>行基本変形のみ</u>を用いて変形する．
  変形で行列の成分は変わるので，変形前後は矢印でつなぐ．

- 行列式の計算では<u>行基本変形と列基本変形の両方</u>を用いてよい．
  基本変形と行列式の値の関係に注意し，変形の前後は等号でつなぐ．

ここまでの内容を見返して理解を深めておくこと．なぜ連立 1 次方程式や逆行列の計算で列基本変形を行ってはいけないか，必ず説明できるようにしておくこと．

第8章　ベクトル空間に関する基本的概念

1　集合

まず最初に集合に関する各種概念と記号について紹介する．これらは数学における基本的な言語なので，必ず正しく使えるようにすること．

定義 1.1. （集合）
それに含まれる「もの」がはっきりしているような,「もの」の集まりを**集合**という．集合に含まれている1つ1つの「もの」を，その集合の**要素**または**元**という．a が集合 A の要素であることを

$$a \in A$$

で表し，**a は A に属する**という．b が A に属さないことは

$$b \notin A$$

で表す.

簡単にいえば，集合とはそれに含まれるかどうかが客観的に判断できるものである．また，条件 $P(x)$ をみたす x 全体の集合を $\{\, x \mid P(x) \,\}$ で表す．例えば

$$X = \{\, x \mid x \text{ は } 12 \text{ の正の約数} \,\}, \qquad Y = \{\, x \mid x \text{ は自然数} \,\}$$

は集合であり，要素を書き並べて

$$X = \{\, 1, 2, 3, 4, 6, 12 \,\}, \qquad Y = \{\, 1, 2, 3, 4, \ldots \,\}$$

と書き表すこともある．ただし，Y のように無限個の要素を含む場合には，よほど規則性が明らかでない限りは列挙するのではなく $Y = \{x \mid x \text{ は自然数} \,\}$ のように表すこと．例えば，次の集合

$$P = \{\, n \mid n \text{ は正の素数} \,\}$$

をその要素を書き並べて

$$P = \{\, 2, 3, 5, 7, \ldots \,\}$$

と表してしまうと，これでは素数を並べたのかも？ぐらいのことしかわからず確証がもてない．なお，集合を規定する部分の変数は積分変数と似たような扱いなのでどの文字を用いてもよい．具体例で述べれば

$$P = \{\, n \mid n \text{ は正の素数} \,\} = \{\, x \mid x \text{ は正の素数} \,\} = \{\, y \mid y \text{ は正の素数} \,\}$$

となる．

また，集合の要素については

$$2 \in X, \qquad 5 \notin X$$

のように記号を用いる．次のような

$$Z = \{\, x \mid x \text{ は大きな数} \,\}$$

は “大きな数” という基準が人によってあいまいなので，これは集合ではない.

定義 1.2. （空集合）
要素を一つも含まない集合を**空集合**といい，$\emptyset$ という記号で表す．

例えば
$$A = \{ x \mid x \text{ は実数で } x^2 < 0 \}$$
とおくと，A の要素は 1 つもないので $A = \emptyset$ である．

特に断りがなければ，$\mathbb{N}$ で**自然数**全体のなす集合，$\mathbb{Z}$ で**整数**全体のなす集合，$\mathbb{Q}$ で**有理数**全体のなす集合，$\mathbb{R}$ で**実数**全体のなす集合，$\mathbb{C}$ で**複素数**全体のなす集合を表す．

定義 1.3. （部分集合）
A と B を集合とする．B の任意の要素が A にも属するとき，B は A の**部分集合**といい
$$B \subset A$$
で表す．また，空集合 $\emptyset$ は任意の集合の部分集合であると約束する．B が A の部分集合でないときには
$$B \not\subset A$$
と表す．

例えば
$$X = \{ x \mid x \text{ は } 12 \text{ の正の約数} \}, \qquad Y = \{ x \mid x \text{ は自然数} \}$$
とすれば，$X \subset Y$ である．また，他にも
$$\{ 2, 4 \} \subset X, \qquad \{ 1, 3, 5 \} \not\subset X$$
である．記号を混同しないように注意すること．“$\in$” は要素と集合の関係，“$\subset$” は集合と集合の関係なので
$$2 \subset \{ 1, 2, 3, 4 \}, \qquad \{ 2 \} \in \{ 1, 2, 3, 4 \}$$
と書くと（言いたいことは何となく伝わるが）<u>誤り</u>である．また，$\subset$ は不等号で言うと $\leqq$ のようなものなので，$X \subset X$ のように両辺が同じ集合でもよい．

なお，2 個の異なる実数 x と y に対しては，必ず $x < y$ または $y < x$ のどちらか一方が成り立つ．しかし，集合の場合には 2 個の集合 X と Y に対して，$X \subset Y$ と $Y \subset X$ のどちらも成り立たないことがあるので注意すること．例えば
$$X = \{ 1, 2, 3 \}, \qquad Y = \{ 0, 1, 2 \}$$
とすれば
$$3 \in X, \quad 3 \notin Y \quad \Longrightarrow \quad X \not\subset Y, \qquad\qquad 0 \in Y, \quad 0 \notin X \quad \Longrightarrow \quad Y \not\subset X$$
となる．このように，集合については包含関係に関して必ず大小関係が比較できるわけではない．

集合 A と B に対して，$A \subset B$ であることを示すには，任意の $x \in A$ に対して $x \in B$ であることを示せばよい．また，$A = B$ であることを示すには $A \subset B$ かつ $B \subset A$ であることを示せばよい．

定義 1.4. （和集合・共通部分）
　A と B を集合とする．このとき

$$A \cup B = \{\, x \mid x \in A \text{ または } x \in B \,\}$$

を A と B の**和集合**という．また

$$A \cap B = \{\, x \mid x \in A,\ x \in B \,\}$$

を A と B の**共通集合**という．

　これらは文字通り A と B のうち少なくともどちらかに属するもの全体の集合を $A \cup B$，A と B の両方に属するもの全体の集合を $A \cap B$ とおいたものである．

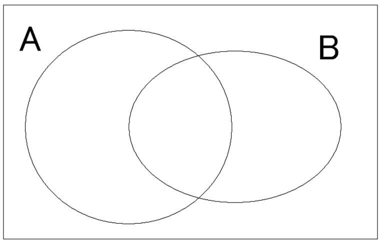


図 8.1: A, B

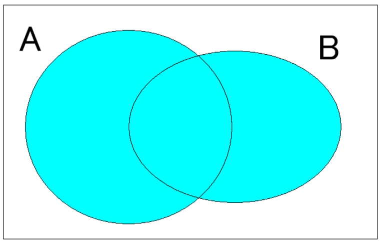


図 8.2: $A \cup B$

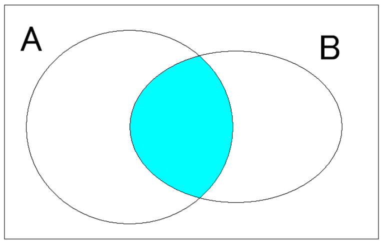


図 8.3: $A \cap B$

　例えば

$$X = \{\, 1, 2, 3, 4, 6, 12 \,\}, \qquad Y = \{\, 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14 \,\}$$

とおけば

$$X \cup Y = \{\, 1, 2, 3, 4, 6, 8, 10, 12, 14 \,\}, \qquad X \cap Y = \{\, 2, 4, 6, 12 \,\}$$

となる．他には

$$A = \{\, x \mid x \text{ は正の奇数} \,\}, \qquad B = \{\, x \mid x \text{ は正の偶数} \,\}$$

とおけば

$$A \cup B = \{\, x \mid x \text{ は自然数} \,\}, \qquad A \cap B = \emptyset$$

となる．このように共通部分が空集合となることもある．

　また，記号の約束から，集合 A と B に対して

$$A \cap B \subset A \subset A \cup B, \qquad A \cap B \subset B \subset A \cup B$$

が成り立つ．

例題 1.5.　x は実数を表すとする．次の集合 X と Y に対して，$X \subset Y$ であることを示せ．

$$X = \{\, x \mid x^2 + x - 2 \leqq 0 \,\}, \qquad Y = \{\, x \mid x^2 - x - 12 < 0 \,\}$$

（解答）　$X = \{\, x \mid -2 \leqq x \leqq 1 \,\}$, $Y = \{\, x \mid -3 < x < 4 \,\}$ であるから，$X \subset Y$ が成り立つ．

（解答終）

例題 1.6.　x は実数を表すとする．次の集合 X と Y に対して，$X \cap Y$ と $X \cup Y$ を求めよ．

$$X = \{\, x \mid x^2 - x - 6 < 0 \,\}, \qquad Y = \{\, x \mid x^2 - 5x + 4 \geqq 0 \,\}$$

（解答）　$X = \{\, x \mid -2 < x < 3 \,\}$, $Y = \{\, x \mid x \leqq 1$ または $4 \leqq x \,\}$ なので

$$X \cap Y = \{\, x \mid -2 < x \leqq 1 \,\}, \qquad X \cup Y = \{\, x \mid x < 3 \text{ または } 4 \leqq x \,\}$$

である．

（解答終）

例題 1.7.　集合 A と B に対して，$A \cap B = A$ であるための必要十分条件は $A \subset B$ であることを示せ．

（解答）　$A \cap B = A$ とする．任意の $x \in A$ をとる．このとき，仮定より $A = A \cap B$ となるから $x \in A \cap B$ なので，$x \in B$ である．よって，$A \subset B$ が成り立つ．

逆に $A \subset B$ とする．$A \cap B \subset A$ は常に成り立つから，逆向きの包含関係を示せばよい．そこで，任意の $x \in A$ をとる．このとき，仮定より $A \subset B$ であるから $x \in B$ となる．よって，$x \in A \cap B$ となるから，$A \subset A \cap B$ となる．ゆえに，$A \cap B \subset A$ かつ $A \subset A \cap B$ より，$A \cap B = A$ が成り立つ．

（解答終）

定義 1.8. （全体集合・補集合）
議論している対象の要素全体の集合を**全体集合**または**普遍集合**という．U を全体集合，A を U の部分集合とするとき

$$A^c = \{\, x \in U \mid x \notin A \,\}$$

を A の**補集合**という．

注意 1.9. 高校数学では補集合を $\overline{A}$ で表すことになっているが，数学の世界では $\overline{A}$ という記号は断りがなければ A の閉包または統計分野では A の平均を表すことが多い．そのため補集合の記号は complement の頭文字をとって，A^c で表すことが多い．日本の高校数学において，標準的なものと異なる記号を用いることになった経緯はわからない．

全体集合を実数全体の集合とすると

$$X = \{\, x \mid x \text{ は有理数} \,\}, \qquad Y = \{\, x \mid -1 \leqq x < 2 \,\}$$

とおけば

$$X^c = \{\, x \mid x \text{ は無理数} \,\}, \qquad Y^c = \{\, x \mid x < -1 \text{ または } 2 \leqq x \,\}$$

となる．

もちろん全体集合が決まっていない場合には補集合を考えることができない．例えば，A を男子高校生全体の集合とすれば，全体集合 U_1 が高校生全体の集合ならば A の補集合 A^c は女子高校生全体の集合である．一方，全体集合 U_2 を人間全体の集合とすれば，A の補集合 A^c は女性であるかまたは高校生でない人全体の集合となる．このように全体集合をどう決めるかによって補集合が変わってしまうからである．

ただし，通常は実数全体の集合など各場面での自然な全体集合を選ぶことが多いので，その場合には「全体集合を実数全体の集合とする」などの記述を省略することもある．

定理 1.10. （ド・モルガンの法則）
U を全体集合とし，A と B を U の部分集合とする．このとき

$$(A \cup B)^c = A^c \cap B^c, \qquad (A \cap B)^c = A^c \cup B^c$$

が成り立つ．

証明. $x \in U$ に対して

$$\begin{aligned} x \in (A \cup B)^c \quad &\iff \quad x \notin A \cup B \\ &\iff \quad x \notin A \text{ かつ } x \notin B \\ &\iff \quad x \in A^c \text{ かつ } x \in B^c \quad \iff \quad x \in A^c \cap B^c \end{aligned}$$

であるから，$(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$ が成り立つ．同様に

$$\begin{aligned} x \in (A \cap B)^c \quad &\iff \quad x \notin A \cap B \\ &\iff \quad x \notin A \text{ または } x \notin B \\ &\iff \quad x \in A^c \text{ または } x \in B^c \quad \iff \quad x \in A^c \cup B^c \end{aligned}$$

であるから，$(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$ が成り立つ． □

この定理の主張は上のような証明よりもベン図を書いて確認した方がわかりやすいかもしれない．ポイントは補集合をとると「または」と「かつ」がひっくり返ることである．

2　ベクトル空間

2.1　ベクトル空間の定義

これまでのベクトルは『向きと大きさをもった量』という幾何学的イメージに沿ったもののことであったが，これからはその幾何学的イメージから代数的性質（和・スカラー倍）を抽出し，抽象的なベクトルを考察対象とする．以下では $\mathbb{K}$ は実数の集合 $\mathbb{R}$ または複素数の集合 $\mathbb{C}$ とする．

定義 2.1.（ベクトル空間）

空でない集合 V が $\mathbb{K}$ 上のベクトル空間であるとは，任意の $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in V$ と任意の $\alpha \in \mathbb{K}$ に対して，和 $\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} \in V$ とスカラー倍 $\alpha\boldsymbol{x} \in V$ が定義されていて，以下の公理をみたすことをいう．

(1) （和に関する結合法則）
任意の $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z} \in V$ に対して

$$(\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}) + \boldsymbol{z} = \boldsymbol{x} + (\boldsymbol{y} + \boldsymbol{z})$$

が成り立つ．

(2) （和に関する交換法則）
任意の $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in V$ に対して

$$\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} = \boldsymbol{y} + \boldsymbol{x}$$

が成り立つ．

(3) （零元の存在）
あるベクトル $\boldsymbol{0} \in V$ が存在して，任意の $\boldsymbol{x} \in V$ に対して

$$\boldsymbol{x} + \boldsymbol{0} = \boldsymbol{0} + \boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}$$

が成り立つ．この $\boldsymbol{0}$ を零ベクトル（零元）という．

(4) （逆元の存在）
任意の $\boldsymbol{x} \in V$ に対して，ある $\boldsymbol{x}' \in V$ が存在して

$$\boldsymbol{x} + \boldsymbol{x}' = \boldsymbol{x}' + \boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$$

が成り立つ．この $\boldsymbol{x}'$ を $\boldsymbol{x}$ の逆ベクトル（逆元）という．

(5) （スカラー倍に関する結合法則）
任意の $\boldsymbol{x} \in V$ と任意の $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$ に対して

$$(\alpha\beta)\boldsymbol{x} = \alpha(\beta\boldsymbol{x})$$

が成り立つ．

(6) （単位元によるスカラー倍）
$1 \in \mathbb{K}$ について，任意の $\boldsymbol{x} \in V$ に対して，$1\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}$ が成り立つ．

(7) （ベクトルに関する分配法則）
任意の $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in V$ と任意の $\alpha \in \mathbb{K}$ に対して

$$\alpha(\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}) = \alpha\boldsymbol{x} + \alpha\boldsymbol{y}$$

が成り立つ．

(8) （スカラーに関する分配法則）
任意の $\boldsymbol{x} \in V$ と任意の $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$ に対して

$$(\alpha + \beta)\boldsymbol{x} = \alpha\boldsymbol{x} + \beta\boldsymbol{x}$$

が成り立つ．

ベクトル空間 V の要素を**ベクトル**といい，係数 $\mathbb{K}$ の要素を**スカラー**という．
V は $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ のとき**実ベクトル空間**といい，$\mathbb{K} = \mathbb{C}$ のとき**複素ベクトル空間**という．

ベクトル空間の公理は本によって見た目が違うことがあるが本質的には同じである．例えば，(2) の交換法則をみたすことが確認できれば，(3) の条件は $\boldsymbol{x}+\boldsymbol{0}=\boldsymbol{x}$ を確認するだけで十分となる．実際，交換法則から $\boldsymbol{x}+\boldsymbol{0}=\boldsymbol{0}+\boldsymbol{x}$ なので，$\boldsymbol{x}+\boldsymbol{0}=\boldsymbol{x}$ より $\boldsymbol{0}+\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}$ が従うからである．(4) についても同様である．

通常は $\boldsymbol{x}\in V$ の逆元を $-\boldsymbol{x}\in V$ とかく．公理から V の零ベクトル $\boldsymbol{0}$ と，$\boldsymbol{x}$ に対する逆ベクトル $-\boldsymbol{x}$ はそれぞれ一意的であることがわかる．実際，$\boldsymbol{0}$ と $\boldsymbol{0}'$ を V の零ベクトルとすると

$$\boldsymbol{0}=\boldsymbol{0}+\boldsymbol{0}'=\boldsymbol{0}'$$

より，$\boldsymbol{0}=\boldsymbol{0}'$ である．また，$\boldsymbol{x}'$ と $\boldsymbol{x}''$ を $\boldsymbol{x}$ の逆元とすると

$$\boldsymbol{x}'=\boldsymbol{x}'+\boldsymbol{0}=\boldsymbol{x}'+(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{x}'')=(\boldsymbol{x}'+\boldsymbol{x})+\boldsymbol{x}''=\boldsymbol{0}+\boldsymbol{x}''=\boldsymbol{x}''$$

より，$\boldsymbol{x}'=\boldsymbol{x}''$ である．

次の命題の主張は当たり前の事実に見えるが，いずれも公理から証明されることである．

命題 2.2.　任意の $\boldsymbol{x}\in V$ に対して

$$0\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0},\qquad (-1)\boldsymbol{x}=-\boldsymbol{x}$$

が成り立つ．つまり，スカラー倍として 0 をかけると零ベクトルとなり，-1 をかけると逆ベクトルとなる．

証明.　$0+0=0$ だから，ベクトル空間の公理（分配法則）より

$$0\boldsymbol{x}=(0+0)\boldsymbol{x}=0\boldsymbol{x}+0\boldsymbol{x}$$

となる．この両辺に $-0\boldsymbol{x}$ を加えると，$0\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ となる．また

$$\boldsymbol{0}=0\boldsymbol{x}=\{1+(-1)\}\boldsymbol{x}=1\boldsymbol{x}+(-1)\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}+(-1)\boldsymbol{x}$$

なので，逆元の定義から $(-1)\boldsymbol{x}=-\boldsymbol{x}$ となる．　□

抽象的な議論を理解しやすくするために，上の証明を $\mathbb{R}$ の場合に繰り返してみる．用いる公式はベクトル空間の公理のみである．
まず，任意の実数 $x\in\mathbb{R}$ に対して，分配法則より

$$0\cdot x=(0+0)x=0\cdot x+0\cdot x$$

より，$0\cdot x=0$ が成り立つ．
次に，-1 という数字の定義は $x+1=0$ の解のことであった（逆ベクトルの定義参照）．そこで，$a=-1$ とおき

$$1+(-1)=0$$

の両辺に a をかけると，上で示したことと分配法則，および $1a=a$ であるから

$$\{1+(-1)\}a=0\cdot a$$

$$a+(-1)a=0$$

$$-1+(-1)a=0$$

となり，この両辺に 1 を加えれば

$$(-1)a=1$$

が成り立つ．これは $(-1)\times(-1)=1$ であることを示している．これが中学で習った負の数と負の数をかけると正の数になることの証明である．

2.2 ベクトル空間の例

例題 2.3. $\mathbb{R}^2$ はベクトルの和とスカラー倍に関して実ベクトル空間であることを示せ.

(解答) ベクトル空間の公理を確認すればよい. 以下では $\boldsymbol{a}=\begin{pmatrix}a_1\\a_2\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{b}=\begin{pmatrix}b_1\\b_2\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{c}=\begin{pmatrix}c_1\\c_2\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^2$ を任意のベクトル, $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ を任意のスカラーとする.

(1) (和に関する結合法則)

$$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})+\boldsymbol{c}=\begin{pmatrix}a_1+b_1\\a_2+b_2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}c_1\\c_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}(a_1+b_1)+c_1\\(a_2+b_2)+c_2\end{pmatrix}$$
$$=\begin{pmatrix}a_1+(b_1+c_1)\\a_2+(b_2+c_2)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_1\\a_2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}b_1+c_1\\b_2+c_2\end{pmatrix}=\boldsymbol{a}+(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})$$

(2) (和に関する交換法則)

$$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\begin{pmatrix}a_1+b_1\\a_2+b_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}b_1+a_1\\b_2+a_2\end{pmatrix}=\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}$$

(3) (零元の存在) $\boldsymbol{0}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^2$ とおけば

$$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{0}=\begin{pmatrix}a_1\\a_2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_1+0\\a_2+0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_1\\a_2\end{pmatrix}=\boldsymbol{a}\qquad\therefore\ \boldsymbol{a}+\boldsymbol{0}=\boldsymbol{0}+\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a}$$

(4) (逆元の存在) $\boldsymbol{a}'=\begin{pmatrix}-a_1\\-a_2\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^2$ とおけば

$$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{a}'=\begin{pmatrix}a_1+(-a_1)\\a_2+(-a_2)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}=\boldsymbol{0}\qquad\therefore\ \boldsymbol{a}+\boldsymbol{a}'=\boldsymbol{a}'+\boldsymbol{a}=\boldsymbol{0}$$

(5) (スカラー倍に関する結合法則)

$$(\alpha\beta)\boldsymbol{a}=\begin{pmatrix}(\alpha\beta)a_1\\(\alpha\beta)a_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\alpha(\beta a_1)\\\alpha(\beta a_2)\end{pmatrix}=\alpha\begin{pmatrix}\beta a_1\\\beta a_2\end{pmatrix}=\alpha(\beta\boldsymbol{a})$$

(6) (単位元によるスカラー倍)

$$1\boldsymbol{a}=\begin{pmatrix}1a_1\\1a_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_1\\a_2\end{pmatrix}=\boldsymbol{a}$$

(7) (ベクトルに関する分配法則)

$$\alpha(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=\alpha\begin{pmatrix}a_1+b_1\\a_2+b_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\alpha(a_1+b_1)\\\alpha(a_2+b_2)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\alpha a_1+\alpha b_1\\\alpha a_2+\alpha b_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\alpha a_1\\\alpha a_2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\alpha b_1\\\alpha b_2\end{pmatrix}=\alpha\boldsymbol{a}+\alpha\boldsymbol{b}$$

(8) (スカラーに関する分配法則)

$$(\alpha+\beta)\boldsymbol{a}=\begin{pmatrix}(\alpha+\beta)a_1\\(\alpha+\beta)a_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\alpha a_1+\beta a_1\\\alpha a_2+\beta a_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\alpha a_1\\\alpha a_2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\beta a_1\\\beta a_2\end{pmatrix}=\alpha\boldsymbol{a}+\beta\boldsymbol{a}$$

したがって, $\mathbb{R}^2$ は実ベクトル空間である.

(解答終)

この証明から, ベクトル空間の公理は $\mathbb{R}^2$ なら当たり前に成り立つものばかりであることがわかる.

例 2.4. （数ベクトル空間）

$$\mathbb{R}^n = \left\{ \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \,\middle|\, a_j \in \mathbb{R}\ (j = 1, 2, \ldots, n) \right\}$$

は通常の和，スカラー倍に関して実ベクトル空間となる．つまり，$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$，$\boldsymbol{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$ と $\alpha \in \mathbb{R}$ に対して

$$\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} \coloneqq \begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ x_2 + y_2 \\ \vdots \\ x_n + y_n \end{pmatrix}, \qquad \alpha\boldsymbol{x} \coloneqq \begin{pmatrix} \alpha x_1 \\ \alpha x_2 \\ \vdots \\ \alpha x_n \end{pmatrix}$$

と定めるとき，$\mathbb{R}^n$ を**実 n 次元数ベクトル空間**という．

数ベクトルの成分を複素数に拡張すれば複素ベクトル空間が得られる．この $\mathbb{C}^n$ を**複素 n 次元数ベクトル空間**とよぶ．どちらも例題 2.3 と同様に示されるので各自確かめること．

例 2.5. （行列全体の集合が作るベクトル空間）

実数を成分にもつ $m \times n$ 行列全体 $M_{m\times n}(\mathbb{R})$ は $A = (a_{ij})_{ij}$，$B = (b_{ij})_{ij} \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$ と $\alpha \in \mathbb{R}$ に対して

$$A + B \coloneqq (a_{ij} + b_{ij})_{ij}, \qquad \alpha A \coloneqq (\alpha a_{ij})_{ij}$$

と定めると実ベクトル空間となる．$M_{m\times n}(\mathbb{R})$ の零ベクトルは零行列 $O_{m,n}$ である．普通，$m = n$ のときは単に $M_n(\mathbb{R}) = M_{n\times n}(\mathbb{R})$ とかく．

成分を複素数に拡張することで，複素ベクトル空間 $M_{m\times n}(\mathbb{C})$ が得られる．どちらも例題 2.3 と同様に示されるので各自確かめること．

例 2.6. （多項式全体の集合が作るベクトル空間）

実数を係数とする n 次以下の多項式全体の集合 $P_n(\mathbb{R})$ は

$$p_1(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n,\ p_2(x) = b_0 + b_1x + b_2x^2 + \cdots + b_nx^n \in P_n(\mathbb{R}), \quad \alpha \in \mathbb{R}$$

に対して

$$p_1(x) + p_2(x) \coloneqq (a_0 + b_0) + (a_1 + b_1)x + (a_2 + b_2)x^2 + \cdots + (a_n + b_n)x^n$$
$$\alpha p_1(x) \coloneqq (\alpha a_0) + (\alpha a_1)x + (\alpha a_2)x^2 + \cdots + (\alpha a_n)x^n$$

と定めると実ベクトル空間となる．$P_n(\mathbb{R})$ の零ベクトルはすべての係数が 0 である定数関数 0 である．

係数を複素数に拡張することで，複素ベクトル空間 $P_n(\mathbb{C})$ が得られる．どちらも例題 2.3 と同様に示されるので各自確かめること．また，次数に制限をつけず，$\mathbb{K}$ の要素を係数とする多項式全体の集合 $P(\mathbb{K})$ も $\mathbb{K}$ 上のベクトル空間となる．

例題 2.7.（連続関数全体の集合が作るベクトル空間）

区間 I 上の実数値連続関数全体のなす集合を $C(I)$ とおく．$f, g \in C(I)$ と $\alpha \in \mathbb{R}$ に対して，I 上の関数 $f+g,\, \alpha f$ を

$$(f+g)(x) \coloneqq f(x)+g(x), \qquad (\alpha f)(x) \coloneqq \alpha f(x) \qquad (x \in I)$$

で定義すれば，これらの演算に関して $C(I)$ は実ベクトル空間となることを示せ．

（解答） f, g が連続関数ならば，$\alpha \in \mathbb{R}$ に対して $f+g,\, \alpha f$ も連続関数であることは微分積分法で学習済みなので，ベクトル空間の公理をすべて確認すればよい．以下では $f, g, h \in C(I)$ を任意のベクトル，$\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ を任意のスカラーとする．また，$x \in I$ を定義域の任意の数とする．

(1) （和に関する結合法則）

$$\begin{aligned}\bigl((f+g)+h\bigr)(x) &= \bigl(f+g\bigr)(x)+h(x) = \{f(x)+g(x)\}+h(x)\\ &= f(x)+\{g(x)+h(x)\} = f(x)+\bigl(g+h\bigr)(x) = \bigl(f+(g+h)\bigr)(x)\end{aligned}$$

より，$(f+g)+h = f+(g+h)$ が成り立つ．

(2) （和に関する交換法則）

$$\bigl(f+g\bigr)(x) = f(x)+g(x) = g(x)+f(x) = \bigl(g+f\bigr)(x)$$

より，$f+g = g+f$ が成り立つ．

(3) （零元の存在） $\mathbf{0}$ を恒等的に 0 である定数関数とすると

$$\bigl(f+\mathbf{0}\bigr)(x) = f(x)+\mathbf{0}(x) = f(x)+0 = f(x)$$

より，$f+\mathbf{0} = \mathbf{0}+f = f$ が成り立つ．

(4) （逆元の存在） $\tilde{f}(x) = -f(x)$ とおけば

$$\bigl(f+\tilde{f}\bigr)(x) = f(x)+\tilde{f}(x) = f(x)-f(x) = 0$$

より，$f+\tilde{f} = \tilde{f}+f = \mathbf{0}$ が成り立つ．

(5) （スカラー倍に関する結合法則）

$$\bigl((\alpha\beta)f\bigr)(x) = (\alpha\beta)f(x) = \alpha\bigl(\beta f(x)\bigr) = \alpha\bigl((\beta f)(x)\bigr) = \bigl(\alpha(\beta f)\bigr)(x)$$

より，$(\alpha\beta)f = \alpha(\beta f)$ が成り立つ．

(6) （単位元によるスカラー倍）

$$\bigl(1f\bigr)(x) = 1f(x) = f(x)$$

より，$1f = f$ が成り立つ．

(7) （ベクトルに関する分配法則）

$$\begin{aligned}\bigl(\alpha(f+g)\bigr)(x) &= \alpha(f+g)(x) = \alpha\{f(x)+g(x)\} = \alpha f(x)+\alpha g(x)\\ &= \bigl(\alpha f\bigr)(x)+\bigl(\alpha g\bigr)(x) = \bigl(\alpha f+\alpha g\bigr)(x)\end{aligned}$$

より，$\alpha(f+g) = \alpha f+\alpha g$ が成り立つ．

(8) （スカラーに関する分配法則）

$$\bigl((\alpha+\beta)f\bigr)(x) = (\alpha+\beta)f(x) = \alpha f(x)+\beta f(x) = \bigl(\alpha f\bigr)(x)+\bigl(\beta f\bigr)(x) = \bigl(\alpha f+\beta f\bigr)(x)$$

より，$(\alpha+\beta)f = \alpha f+\beta f$ が成り立つ．

したがって，$C(I)$ は実ベクトル空間である．

（解答終）

同様にして区間 I 上の実数値 C^n 級関数全体のなす集合 $C^n(I)$ も実ベクトル空間となる．

例題 2.8.（実数列全体の集合が作るベクトル空間）
　実数列全体のなす集合 $S = \{\, \boldsymbol{a} = \{a_n\}_{n=1}^{\infty} \mid a_n \in \mathbb{R}\ (n \in \mathbb{N}) \,\}$ は各項毎の演算により実ベクトル空間となることを示せ．つまり，$\boldsymbol{a} = \{a_n\}_{n=1}^{\infty}$，$\boldsymbol{b} = \{b_n\}_{n=1}^{\infty} \in S$, $\alpha \in \mathbb{R}$ に対して，和とスカラー倍を

$$\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} \coloneqq \{a_n + b_n\}_{n=1}^{\infty}, \qquad \alpha\boldsymbol{a} \coloneqq \{\alpha a_n\}_{n=1}^{\infty}$$

と定める．S の零ベクトルは一般項が 0 の数列 $\boldsymbol{0}$ である．

（解答）　$\boldsymbol{a} = \{a_n\}_{n=1}^{\infty}$，$\boldsymbol{b} = \{b_n\}_{n=1}^{\infty}$，$\boldsymbol{c} = \{c_n\}_{n=1}^{\infty} \in S$ を任意のベクトル，$\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ を任意のスカラーとする．

(1) （和に関する結合法則）

$$\begin{aligned}(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})+\boldsymbol{c} &= \{a_n+b_n\}_{n=1}^{\infty} + \{c_n\}_{n=1}^{\infty} = \{(a_n+b_n)+c_n\}_{n=1}^{\infty} \\ &= \{a_n+(b_n+c_n)\}_{n=1}^{\infty} = \{a_n\}_{n=1}^{\infty} + \{b_n+c_n\}_{n=1}^{\infty} = \boldsymbol{a}+(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})\end{aligned}$$

より，$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})+\boldsymbol{c} = \boldsymbol{a}+(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})$ が成り立つ．

(2) （和に関する交換法則）

$$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b} = \{a_n+b_n\}_{n=1}^{\infty} = \{b_n+a_n\}_{n=1}^{\infty} = \boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}$$

(3) （零元の存在）　$\boldsymbol{0}$ を恒等的に 0 である定数列とすると

$$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{0} = \{a_n+0\}_{n=1}^{\infty} = \{a_n\}_{n=1}^{\infty} = \boldsymbol{0} \qquad \therefore\ \boldsymbol{a}+\boldsymbol{0} = \boldsymbol{0}+\boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}$$

(4) （逆元の存在）　$\boldsymbol{a}' = \{-a_n\}_{n=1}^{\infty}$ とおけば

$$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{a}' = \{a_n+(-a_n)\}_{n=1}^{\infty} = \{0\}_{n=1}^{\infty} = \boldsymbol{0} \qquad \therefore\ \boldsymbol{a}+\boldsymbol{a}' = \boldsymbol{a}'+\boldsymbol{a} = \boldsymbol{0}$$

(5) （スカラー倍に関する結合法則）

$$(\alpha\beta)\boldsymbol{a} = \{(\alpha\beta)a_n\}_{n=1}^{\infty} = \{\alpha(\beta a_n)\}_{n=1}^{\infty} = \alpha\{\beta a_n\}_{n=1}^{\infty} = \alpha(\beta\boldsymbol{a})$$

(6) （単位元によるスカラー倍）

$$1\boldsymbol{a} = \{1a_n\}_{n=1}^{\infty} = \{a_n\}_{n=1}^{\infty} = \boldsymbol{a}$$

(7) （ベクトルに関する分配法則）

$$\begin{aligned}\alpha(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}) &= \alpha\{a_n+b_n\}_{n=1}^{\infty} = \{\alpha(a_n+b_n)\}_{n=1}^{\infty} \\ &= \{\alpha a_n+\alpha b_n\}_{n=1}^{\infty} = \{\alpha a_n\}_{n=1}^{\infty} + \{\alpha b_n\}_{n=1}^{\infty} = \alpha\boldsymbol{a}+\alpha\boldsymbol{b}\end{aligned}$$

(8) （スカラーに関する分配法則）

$$(\alpha+\beta)\boldsymbol{a} = \{(\alpha+\beta)a_n\}_{n=1}^{\infty} = \{\alpha a_n+\beta a_n\}_{n=1}^{\infty} = \{\alpha a_n\}_{n=1}^{\infty} + \{\beta a_n\}_{n=1}^{\infty} = \alpha\boldsymbol{a}+\beta\boldsymbol{a}$$

したがって，S は実ベクトル空間である．

（解答終）

　この定義がわかりにくい人のために補足しておくと，例えば

$$\{3n+5\}_{n=1}^{\infty} + \{2^n-n\}_{n=1}^{\infty} = \{2n+2^n+5\}_{n=1}^{\infty}, \qquad 2\{3n+5\}_{n=1}^{\infty} = \{6n+10\}_{n=1}^{\infty}$$

と和の記号とスカラー倍を約束するということである．

2.3 部分空間

定義 2.9. （部分空間）

$\mathbb{K}$ 上のベクトル空間 V の空でない部分集合 W が V の**部分空間**であるとは，任意のベクトル $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in W$ と任意のスカラー $\alpha \in \mathbb{K}$ に対して，次の 2 条件

(1) $\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} \in W$

(2) $\alpha \boldsymbol{x} \in W$

が成り立つことをいう．なお，この条件は

$$\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in W, \quad \alpha, \beta \in \mathbb{K} \quad \Longrightarrow \quad \alpha \boldsymbol{x} + \beta \boldsymbol{y} \in W$$

と 1 つにまとめることもできる．

また，$\{\boldsymbol{0}\}$ と V 自身は V の部分空間の定義を必ずみたす．これらを**自明な部分空間**という．

部分空間とはそれ自身がまたベクトル空間となるような部分集合のことである．なお，定義の「$W \fallingdotseq \emptyset$」という条件は「$V$ の零ベクトル $\boldsymbol{0}$ が W に属する」としてもよい．実際，$W \fallingdotseq \emptyset$ ならば $\boldsymbol{w} \in W$ を 1 つとれば，部分空間の定義より $0\boldsymbol{w} = \boldsymbol{0} \in W$ となるからである．

例 2.10. （部分空間の例）

(1) $\mathbb{R}^2$ において，原点 O を通る直線は $\mathbb{R}^2$ の部分空間である．

(2) $\mathbb{R}^3$ において，原点 O を通る直線や原点 O を通る平面は $\mathbb{R}^3$ の部分空間である．

(3) $A \in M_{m \times n}(\mathbb{R})$ に対して，A を係数行列とする連立 1 次方程式

$$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$$

が解をもつようなベクトル $\boldsymbol{b}$ 全体の集合

$$\{\, \boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^m \mid A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b} \text{ をみたす } \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n \text{ がある} \,\}$$

は $\mathbb{R}^m$ の部分空間である．

(4) 前節の記号を用いれば，$P_n(\mathbb{R})$ は $P(\mathbb{R})$ の部分空間であり，$P(\mathbb{R})$ は $C(\mathbb{R})$ の部分空間となる．

例題 2.11. 実ベクトル空間 $\mathbb{R}^3$ の次の部分集合 W が $\mathbb{R}^3$ の部分空間かどうか判定せよ．

(1) $W = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \middle| \, 3x - 2y + z = 0 \right\}$ (2) $W = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \middle| \, 3x - 2y + z = 1 \right\}$

(3) $W = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \middle| \, x^2 + y^2 + z^2 \leqq 1 \right\}$ (4) $W = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \middle| \, xyz = 0 \right\}$

(5) $W = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \middle| \, z = x^2 + y^2 \right\}$ (6) $W = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \middle| \, x, y, z \text{ は整数} \right\}$

（解答） 部分空間でない場合の説明は何通りも考えられるので，以下では一例を挙げる．必ずこの通りでなければならないわけではない．

(1) $\mathbf{0} \in W$ より，$W \neq \emptyset$ である．また，任意の $\boldsymbol{a}_1 = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix}$，$\boldsymbol{a}_2 = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix} \in W$ と $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ をとると

$$3x_1 - 2y_1 + z_1 = 0, \qquad 3x_2 - 2y_2 + z_2 = 0$$

である．よって，$\alpha\boldsymbol{a}_1 + \beta\boldsymbol{a}_2 = \begin{pmatrix} \alpha x_1 + \beta x_2 \\ \alpha y_1 + \beta y_2 \\ \alpha z_1 + \beta z_2 \end{pmatrix}$ について

$$\begin{aligned} 3(\alpha x_1 + \beta x_2) - 2(\alpha y_1 + \beta y_2) + (\alpha z_1 + \beta z_2) &= \alpha(3x_1 - 2y_1 + z_1) + \beta(3x_2 - 2y_2 + z_2) \\ &= \alpha \cdot 0 + \beta \cdot 0 = 0 \end{aligned}$$

であるから，$\alpha\boldsymbol{a}_1 + \beta\boldsymbol{a}_2 \in W$ が成り立つ．したがって，W は $\mathbb{R}^3$ の部分空間である．

(2) $\mathbf{0} \notin W$ であるから，W は $\mathbb{R}^3$ の部分空間ではない．

(3) $\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \in W$ であるが，$2\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \notin W$ であるから，W は $\mathbb{R}^3$ の部分空間ではない．

(4) $\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$，$\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \in W$ であるが，$\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \notin W$ であるから，W は $\mathbb{R}^3$ の部分空間ではない．

(5) $\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \in W$ であるが，$2\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} \notin W$ であるから，W は $\mathbb{R}^3$ の部分空間ではない．

(6) $\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \in W$ であるが，$\dfrac{1}{2}\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} 1/2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \notin W$ であるから，W は $\mathbb{R}^3$ の部分空間ではない．

（解答終）

例題 2.12. 実数全体で定義された C^2 級関数全体のなす実ベクトル空間 $C^2(\mathbb{R})$ について，その部分集合 W が $C^2(\mathbb{R})$ の部分空間かどうか判定せよ．

(1) $W = \{ f \mid f'(x) = 0 \}$

(2) $W = \{ f \mid f'(x) = 1 \}$

(3) $W = \{ f \mid f''(x) = -f(x) \}$

(4) $W = \{ f \mid f(2) = 0 \}$

(5) $W = \left\{ f \,\middle|\, \int_0^1 f(x)\,dx = 0 \right\}$

(6) $W = \left\{ f \,\middle|\, \int_{-1}^1 f(x)\,dx = 5 \right\}$

（解答） 恒等的に 0 である定数関数を $\mathbf{0}$ で表す．

(1) $\mathbf{0} \in W$ より，$W \fallingdotseq \emptyset$ である．また，任意の $f, g \in W$ と $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ をとると

$$f'(x) = 0, \qquad g'(x) = 0$$

であるから，関数 $\alpha f + \beta g$ を微分すれば

$$(\alpha f + \beta g)'(x) = \{\alpha f(x) + \beta g(x)\}' = \alpha f'(x) + \beta g'(x) = \alpha \cdot 0 + \beta \cdot 0 = 0$$

より，$\alpha f + \beta g \in W$ が成り立つ．したがって，W は $C^2(\mathbb{R})$ の部分空間である．

(2) $\mathbf{0} \notin W$ であるから，W は $C^2(\mathbb{R})$ の部分空間ではない．

(3) $\mathbf{0} \in W$ より，$W \fallingdotseq \emptyset$ である．また，任意の $f, g \in W$ と $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ をとると

$$f''(x) = -f(x), \qquad g''(x) = -g(x)$$

であるから，関数 $\alpha f + \beta g$ を 2 回微分すれば

$$\begin{aligned}(\alpha f + \beta g)''(x) &= \{\alpha f(x) + \beta g(x)\}'' = \alpha f''(x) + \beta g''(x)\\ &= \alpha \cdot \{-f(x)\} + \beta \cdot \{-g(x)\} = -\{\alpha f(x) + \beta g(x)\} = -(\alpha f + \beta g)(x)\end{aligned}$$

より，$\alpha f + \beta g \in W$ が成り立つ．したがって，W は $C^2(\mathbb{R})$ の部分空間である．

(4) $\mathbf{0} \in W$ より，$W \fallingdotseq \emptyset$ である．また，任意の $f, g \in W$ と $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ をとると

$$f(2) = 0, \qquad g(2) = 0$$

であるから

$$(\alpha f + \beta g)(2) = \alpha f(2) + \beta g(2) = \alpha \cdot 0 + \beta \cdot 0 = 0$$

より，$\alpha f + \beta g \in W$ が成り立つ．したがって，W は $C^2(\mathbb{R})$ の部分空間である．

(5) $\mathbf{0} \in W$ より，$W \fallingdotseq \emptyset$ である．また，任意の $f, g \in W$ と $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ をとると

$$\int_0^1 f(x)\,dx = 0, \qquad \int_0^1 g(x)\,dx = 0$$

であるから

$$\int_0^1 (\alpha f + \beta g)(x)\,dx = \int_0^1 \{\alpha f(x) + \beta g(x)\}\,dx = \alpha \int_0^1 f(x)\,dx + \beta \int_0^1 g(x)\,dx = \alpha \cdot 0 + \beta \cdot 0 = 0$$

より，$\alpha f + \beta g \in W$ が成り立つ．したがって，W は $C^2(\mathbb{R})$ の部分空間である．

(6) $\mathbf{0} \notin W$ であるから，W は $C^2(\mathbb{R})$ の部分空間ではない．

（解答終）

例題 2.13.　$A \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$ に対して，A を係数行列とする斉次連立 1 次方程式の解全体のなす集合

$$W = \{\, \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n \mid A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0} \,\}$$

は $\mathbb{R}^n$ の部分空間となることを示せ．これを方程式 $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ の**解空間**という．

（解答）　$A\boldsymbol{0} = \boldsymbol{0}$ より，零ベクトル $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ は方程式の解となるから，$\boldsymbol{0} \in W$ となる．よって，$W \neq \emptyset$ である．

また，任意の $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in W$ と $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ に対して

$$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}, \qquad A\boldsymbol{y} = \boldsymbol{0}$$

であるから

$$A(\alpha\boldsymbol{x} + \beta\boldsymbol{y}) = \alpha A\boldsymbol{x} + \beta A\boldsymbol{y} = \alpha\boldsymbol{0} + \beta\boldsymbol{0} = \boldsymbol{0}$$

より，$\alpha\boldsymbol{x} + \beta\boldsymbol{y} \in W$ が成り立つ．したがって，W は $\mathbb{R}^n$ の部分空間である．

（解答終）

上の例題で $A \in M_{m\times n}(\mathbb{C})$ とすれば，解空間

$$W = \{\, \boldsymbol{x} \in \mathbb{C}^n \mid A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0} \,\}$$

は複素ベクトル空間 $\mathbb{C}^n$ の部分空間となることが同様にして示せる．証明のどこを修正すればよいかを各自で考えてみよ．

例題 2.14.　複素ベクトル空間 $M_n(\mathbb{C})$ の部分集合

$$W = \{\, A \in M_n(\mathbb{C}) \mid \operatorname{tr} A = 0 \,\}$$

は $M_n(\mathbb{C})$ の部分空間となることを示せ．

（解答）　$\operatorname{tr} O = 0$ より，零行列 $O \in W$ となる．よって，$W \neq \emptyset$ である．

また，任意の $A, B \in W$ と $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ に対して

$$\operatorname{tr} A = 0, \qquad \operatorname{tr} B = 0$$

であるから，トレースの性質より

$$\operatorname{tr}(\alpha A + \beta B) = \alpha \operatorname{tr} A + \beta \operatorname{tr} B = \alpha \cdot 0 + \beta \cdot 0 = 0$$

より，$\alpha A + \beta B \in W$ が成り立つ．したがって，W は $M_n(\mathbb{C})$ の部分空間である．

（解答終）

上の例題で

$$W = \{\, A \in M_n(\mathbb{R}) \mid \operatorname{tr} A = 0 \,\}$$

は実ベクトル空間 $M_n(\mathbb{R})$ の部分空間となることが同様にして示せる．証明のどこを修正すればよいかを各自で考えてみよ．

例題 2.15. 実ベクトル空間 $M_n(\mathbb{R})$ の部分集合

$$W_1 = \{\, A \in M_n(\mathbb{R}) \mid A \text{ は対称行列} \,\}, \qquad W_2 = \{\, A \in M_n(\mathbb{R}) \mid A \text{ は交代行列} \,\}$$

は $M_n(\mathbb{R})$ の部分空間となることを示せ．

（解答） ${}^tO = O$ より，$O \in W_1$ であるから，$W_1 \neq \emptyset$ である．また，任意の $A, B \in W_1$ と $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ に対して

$${}^tA = A, \qquad {}^tB = B$$

であるから

$${}^t(\alpha A + \beta B) = \alpha\, {}^tA + \beta\, {}^tB = \alpha A + \beta B$$

より，$\alpha A + \beta B$ は対称行列となる．ゆえに，$\alpha A + \beta B \in W_1$ である．したがって，W_1 は $M_n(\mathbb{R})$ の部分空間である．

${}^tO = -O$ より，$O \in W_2$ であるから，$W_2 \neq \emptyset$ である．また，任意の $A, B \in W_2$ と $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ に対して

$${}^tA = -A, \qquad {}^tB = -B$$

であるから

$${}^t(\alpha A + \beta B) = \alpha\, {}^tA + \beta\, {}^tB = \alpha(-A) + \beta(-B) = -(\alpha A + \beta B)$$

より，$\alpha A + \beta B$ は交代行列となる．ゆえに，$\alpha A + \beta B \in W_2$ である．したがって，W_2 は $M_n(\mathbb{R})$ の部分空間である．

（解答終）

例題 2.16. （定数係数斉次線形漸化式の定める部分空間）

実数列全体のなす実ベクトル空間 $S = \{\, \boldsymbol{a} = \{a_n\}_{n=1}^{\infty} \mid a_n \in \mathbb{R}\ (n \in \mathbb{N}) \,\}$ の部分集合

$$W = \{\, \boldsymbol{a} = \{a_n\}_{n=1}^{\infty} \in S \mid a_{n+2} - 3a_{n+1} - 4a_n = 0\ (n \in \mathbb{N}) \,\}$$

は S の部分空間であることを示せ．

（解答） $\mathbf{0} = \{0\}_{n=1}^{\infty}$（0 である定数列）は与えられた漸化式をみたすので $\mathbf{0} \in W$ であるから，$W \neq \emptyset$ である．また，任意の $\boldsymbol{a} = \{a_n\}_{n=1}^{\infty}$，$\boldsymbol{b} = \{b_n\}_{n=1}^{\infty} \in W$ と $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ に対して

$$a_{n+2} - 3a_{n+1} - 4a_n = 0, \qquad b_{n+2} - 3b_{n+1} - 4b_n = 0 \qquad (n \in \mathbb{N})$$

なので，$\boldsymbol{c} = \{c_n\}_{n=1}^{\infty} = \alpha\boldsymbol{a} + \beta\boldsymbol{b} = \{\alpha a_n + \beta b_n\}_{n=1}^{\infty}$ とおけば

$$\begin{aligned} c_{n+2} - 3c_{n+1} - 4c_n &= (\alpha a_{n+2} + \beta b_{n+2}) - 3(\alpha a_{n+1} + \beta b_{n+1}) - 4(\alpha a_n + \beta b_n) \\ &= \alpha(a_{n+2} - 3a_{n+1} - 4a_n) + \beta(b_{n+2} - 3b_{n+1} - 4b_n) = \alpha \cdot 0 + \beta \cdot 0 = 0 \end{aligned}$$

より，$\{c_n\}_{n=1}^{\infty}$ も与えられた漸化式をみたす．よって，$\boldsymbol{c} = \alpha\boldsymbol{a} + \beta\boldsymbol{b} \in W$ が成り立つ．したがって，W は S の部分空間である．

（解答終）

例題 **2.17.** （斉次線形常微分方程式の定める部分空間）
$a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ に対して，微分方程式

$$a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \cdots + a_1 y' + a_0 y = 0$$

をみたす開区間 (a, b) 上の C^n 級実数値関数 $y = f(x)$ 全体のなす集合

$$W = \{\, y \in C^n(a,b) \mid a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \cdots + a_1 y' + a_0 y = 0 \,\}$$

は実ベクトル空間 $C^n(a,b)$ の部分空間であることを示せ．

（解答）　$y = 0$（恒等的に 0）とすると，これは明らかに与えられた微分方程式をみたすから，$0 \in W$ である．よって，$W \neq \emptyset$ となる．また，任意の $y_1, y_2 \in W$ と $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ に対して，y_1 と y_2 は与えられた微分方程式の解だから

$$a_n y_1^{(n)} + a_{n-1} y_1^{(n-1)} + \cdots + a_1 y_1' + a_0 y_1 = 0, \qquad a_n y_2^{(n)} + a_{n-1} y_2^{(n-1)} + \cdots + a_1 y_2' + a_0 y_2 = 0$$

となる．よって，微分の線形性より

$$\begin{aligned}
&a_n(\alpha y_1 + \beta y_2)^{(n)} + a_{n-1}(\alpha y_1 + \beta y_2)^{(n-1)} + \cdots + a_1(\alpha y_1 + \beta y_2)' + a_0(\alpha y_1 + \beta y_2) \\
&\quad = a_n(\alpha y_1^{(n)} + \beta y_2^{(n)}) + a_{n-1}(\alpha y_1^{(n-1)} + \beta y_2^{(n-1)}) + \cdots + a_1(\alpha y_1' + \beta y_2') + a_0(\alpha y_1 + \beta y_2) \\
&\quad = \alpha(a_n y_1^{(n)} + a_{n-1} y_1^{(n-1)} + \cdots + a_1 y_1' + a_0 y_1) + \beta(a_n y_2^{(n)} + a_{n-1} y_2^{(n-1)} + \cdots + a_1 y_2' + a_0 y_2) \\
&\quad = \alpha \cdot 0 + \beta \cdot 0 = 0
\end{aligned}$$

より，$\alpha y_1 + \beta y_2$ も与えられた微分方程式をみたす．ゆえに，$\alpha y_1 + \beta y_2 \in W$ が成り立つ．したがって，W は $C^n(a,b)$ の部分空間である．

（解答終）

上の 2 つの例題の結果は線形漸化式の一般項，線形常微分方程式の解を求めるために線形代数を利用する際の足がかりとなるものである．必ず理解しておくこと．

3　ベクトルの1次独立性

高校数学ではベクトルの 1 次独立について『係数比較ができるためのおまじない』という扱いで，正確な定義は述べられていない．そこで，正確な定義を与え，具体的なベクトルに対して 1 次独立性の判定ができるようになることがこの節の目標である．

3.1　1次独立と1次従属

ここでは V を $\mathbb{K}$ 上のベクトル空間とする．

定義 3.1. （**1 次結合**）
$\mathbb{K}$ 上のベクトル空間 V のベクトル $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \dots, \boldsymbol{v}_k$ に対して

$$c_1\boldsymbol{v}_1 + c_2\boldsymbol{v}_2 + \cdots + c_k\boldsymbol{v}_k \qquad (c_j \in \mathbb{K},\ j = 1, \dots, k)$$

の形に表される V のベクトルを $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \dots, \boldsymbol{v}_k$ の **1 次結合**という．

ここで，ベクトル $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \dots, \boldsymbol{v}_k$ の 1 次結合が零ベクトルと等しいとした

$$c_1\boldsymbol{v}_1 + c_2\boldsymbol{v}_2 + \cdots + c_k\boldsymbol{v}_k = \boldsymbol{0} \quad \cdots\ (*)$$

という関係式を考える．まず

$$c_1 = c_2 = \cdots = c_k = 0$$

のときには，両辺がともに $\boldsymbol{0}$ となるので $(*)$ は成り立つ（零ベクトル $\boldsymbol{0}$ とスカラーの 0 を使い分けていることに注意すること）．このときの $(*)$ を具体的に書けば

$$0\boldsymbol{v}_1 + 0\boldsymbol{v}_2 + \cdots + 0\boldsymbol{v}_k = \boldsymbol{0}$$

となり当たり前の式なので，**自明な 1 次関係式**という．

定義 3.2. （**1 次独立**）
$\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \dots, \boldsymbol{v}_k \in V$ に対して

$$c_1\boldsymbol{v}_1 + c_2\boldsymbol{v}_2 + \cdots + c_k\boldsymbol{v}_k = \boldsymbol{0} \quad \cdots\ (*)$$

をみたす $c_1, c_2, \dots, c_k \in \mathbb{K}$ を考える．

(1) $(*)$ をみたす c_j $(1 \leqq j \leqq k)$ が
$$c_1 = c_2 = \cdots = c_k = 0$$
に限るとき，$\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \dots, \boldsymbol{v}_k$ は **1 次独立**であるという．

(2) $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \dots, \boldsymbol{v}_k$ が 1 次独立でない場合には，**1 次従属**であるという．また，$(c_1, c_2, \dots, c_k) \fallingdotseq (0, 0, \dots, 0)$ となるものをとったときの $(*)$ を**非自明な 1 次関係式** という．

定義より，$\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \dots, \boldsymbol{v}_k$ の中に零ベクトルがあれば 1 次従属である．実際，もし $\boldsymbol{v}_1 = \boldsymbol{0}$ ならば

$$1\boldsymbol{v}_1 + 0\boldsymbol{v}_2 + \cdots + 0\boldsymbol{v}_k = \boldsymbol{0}$$

が成り立つので，係数がすべて 0 の自明な 1 次関係式に限るという 1 次独立の定義をみたさないからである．

定理 3.3. （1 次従属であるための必要十分条件）

$\mathbb{K}$ 上のベクトル空間 V のベクトル $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_k$ が 1 次従属であるための必要十分条件は，$\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_k$ のいずれか 1 つのベクトルが残りのベクトルの 1 次結合で表されることである．

証明. $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_k$ が 1 次従属とする．このとき，ある $(c_1, c_2, \ldots, c_k) \neq (0, 0, \ldots, 0)$ で

$$c_1\boldsymbol{v}_1 + c_2\boldsymbol{v}_2 + \cdots + c_k\boldsymbol{v}_k = \boldsymbol{0}$$

となるものが存在する．このとき，$c_j \neq 0$ となる j を選べば

$$\boldsymbol{v}_j = -\frac{c_1}{c_j}\boldsymbol{v}_1 - \frac{c_2}{c_j}\boldsymbol{v}_2 - \cdots - \frac{c_{j-1}}{c_j}\boldsymbol{v}_{j-1} - \frac{c_{j+1}}{c_j}\boldsymbol{v}_{j+1} - \cdots - \frac{c_k}{c_j}\boldsymbol{v}_k$$

とできるから，$\boldsymbol{v}_j$ は $\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_{j-1}, \boldsymbol{v}_{j+1}, \ldots, \boldsymbol{v}_k$ の 1 次結合で表せる．

逆に，$\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_k$ のいずれか 1 つのベクトルが残りのベクトルの 1 次結合で表されるとする．必要ならば番号を付け替えて，$\boldsymbol{v}_k$ が $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_{k-1}$ の 1 次結合で表されているとしても一般性を失わない．このとき

$$\boldsymbol{v}_k = a_1\boldsymbol{v}_1 + a_2\boldsymbol{v}_2 + \cdots + a_{k-1}\boldsymbol{v}_{k-1}$$

と $a_j \in \mathbb{K}$ を用いて表せる．これより

$$a_1\boldsymbol{v}_1 + a_2\boldsymbol{v}_2 + \cdots + a_{k-1}\boldsymbol{v}_{k-1} - \boldsymbol{v}_k = \boldsymbol{0}$$

が得られるから，自明な 1 次関係式に限るという 1 次独立の定義をみたさない．ゆえに，$\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_k$ は 1 次従属である． □

例 3.4. ここで述べた定義が高校数学の 1 次独立と同じことを確認する．

(1) 平面ベクトル $\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w} \in \mathbb{R}^2$ が零ベクトルでないとする．$\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}$ が 1 次従属であるための必要十分条件は，定理 3.3 より

$$\boldsymbol{v} = c\boldsymbol{w}$$

となる実数 c が存在することである．これは $\boldsymbol{v}$ と $\boldsymbol{w}$ が平行なことを意味している．よって，$\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}$ が 1 次独立であるための必要十分条件は

$$\boldsymbol{v} \neq \boldsymbol{0}, \qquad \boldsymbol{w} \neq \boldsymbol{0}, \qquad \boldsymbol{v} \not\parallel \boldsymbol{w}$$

である．これは高校数学 B で学習した平面ベクトルの 1 次独立の定義と一致する．

(2) 空間ベクトル $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w} \in \mathbb{R}^3$ が零ベクトルでないとする．$\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}$ が 1 次従属であるための必要十分条件は（必要ならばベクトルの名前を付け替えれば）

$$\boldsymbol{w} = a\boldsymbol{u} + b\boldsymbol{v}$$

となることである．よって，$\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}$ の始点を合わせると，この 3 つのベクトルは同一平面上にある．よって，$\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}$ が 1 次独立であるための必要十分条件は，$\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}$ の始点を合わせることで空間内に四面体ができることである．

3.2　1次独立・1次従属の計算例

例題 3.5.　次の $\mathbb{R}^3$ のベクトル $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3$ が1次独立かどうか調べよ．もし1次従属ならば，非自明な1次関係式を1つ挙げよ．

(1) $\boldsymbol{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \ \boldsymbol{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \ \boldsymbol{v}_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$　　(2) $\boldsymbol{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \ \boldsymbol{v}_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}, \ \boldsymbol{v}_3 = \begin{pmatrix} 7 \\ 8 \\ 9 \end{pmatrix}$

（解答）　$c_1\boldsymbol{v}_1 + c_2\boldsymbol{v}_2 + c_3\boldsymbol{v}_3 = \boldsymbol{0}$ $(c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R})$ とおくと，これは

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{v}_1 & \boldsymbol{v}_2 & \boldsymbol{v}_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} = \boldsymbol{0} \quad \cdots (*)$$

と表せるから，この斉次連立1次方程式 $(*)$ が自明な解 $(c_1, c_2, c_3) = (0, 0, 0)$ のみをもつかどうかを調べればよい．そこで，係数行列 $A = \begin{pmatrix} \boldsymbol{v}_1 & \boldsymbol{v}_2 & \boldsymbol{v}_3 \end{pmatrix}$ を簡約階段行列に行基本変形する．

(1)　行基本変形により

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 1 列の掃き出し}]{\text{(1,1) 成分による}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & -3 \\ 0 & -2 & -3 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 2 列の掃き出し}]{\text{(2,2) 成分による}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[\text{第 3 列の掃き出し}]{\text{(3,3) 成分による}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 3 行を 1/3 倍}]{\text{第 2 行を } (-1) \text{ 倍}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

であるから，$(*)$ は自明な解

$$(c_1, c_2, c_3) = (0, 0, 0)$$

のみをもつ．よって，$\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3$ は1次独立である．

(2)　行基本変形により

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 1 列の掃き出し}]{\text{(1,1) 成分による}} \begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 0 & -3 & -6 \\ 0 & -6 & -12 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[(-1/3) \text{ 倍}]{\text{第 2 行を}} \begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & -6 & -12 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 2 列の掃き出し}]{\text{(2,2) 成分による}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

であるから，$(*)$ の解は

$$\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad (t \in \mathbb{R})$$

と表せる．よって，非自明な解をもつので，$\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3$ は1次従属である．特に $t = 1$ として

$$\boldsymbol{v}_1 - 2\boldsymbol{v}_2 + \boldsymbol{v}_3 = \boldsymbol{0}$$

が成り立つ．

（解答終）

例題 3.6. 次の $\mathbb{R}^3$ のベクトル $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3$ が1次独立かどうか調べよ．もし1次従属ならば，非自明な1次関係式を1つ挙げよ．

(1) $\boldsymbol{v}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},\ \boldsymbol{v}_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix},\ \boldsymbol{v}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ (2) $\boldsymbol{v}_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix},\ \boldsymbol{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix},\ \boldsymbol{v}_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}$

（解答） $c_1\boldsymbol{v}_1 + c_2\boldsymbol{v}_2 + c_3\boldsymbol{v}_3 = \boldsymbol{0}$ $(c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R})$ とおくと，これは

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{v}_1 & \boldsymbol{v}_2 & \boldsymbol{v}_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} = \boldsymbol{0} \quad \cdots (*)$$

と表せるから，この斉次連立1次方程式 $(*)$ が自明な解 $(c_1, c_2, c_3) = (0, 0, 0)$ のみをもつかどうかを調べればよい．そこで，係数行列 $A = \begin{pmatrix} \boldsymbol{v}_1 & \boldsymbol{v}_2 & \boldsymbol{v}_3 \end{pmatrix}$ を簡約階段行列に行基本変形する．

(1) 行基本変形により

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 1 列の掃き出し}]{\text{(3,1) 成分による}} \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[\text{第 2 列の掃き出し}]{\text{(1,2) 成分による}} \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{行の入れ替え}]{\text{階段行列となるよう}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

であるから，$(*)$ の解は

$$\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad (t \in \mathbb{R})$$

と表せる．よって，非自明な解をもつので，$\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3$ は1次従属である．特に $t = 1$ として

$$-2\boldsymbol{v}_1 + \boldsymbol{v}_2 + \boldsymbol{v}_3 = \boldsymbol{0}$$

が成り立つ．

(2) 行基本変形により

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 1 列の掃き出し}]{\text{(3,1) 成分による}} \begin{pmatrix} 0 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{入れ替え}]{\text{第 1 行と第 3 行の}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 3 & 5 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[\text{第 2 列の掃き出し}]{\text{(2,2) 成分による}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 11 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{第 3 行を 1/11 倍}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 3 列の掃き出し}]{\text{(3,3) 成分による}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

であるから，$(*)$ は自明な解

$$(c_1, c_2, c_3) = (0, 0, 0)$$

のみをもつ．よって，$\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3$ は1次独立である．

（解答終）

1次従属の場合には，求めた非自明な1次関係式が実際に成り立つかどうかを確認することで，検算に使うことができる．

例題 3.7. $\mathbb{R}^4$ のベクトル

$$\boldsymbol{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{v}_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

は 1 次独立かどうか調べよ．もし 1 次従属ならば，非自明な 1 次関係式を 1 つ挙げよ．

（解答） $c_1\boldsymbol{v}_1 + c_2\boldsymbol{v}_2 + c_3\boldsymbol{v}_3 = \boldsymbol{0}$ $(c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R})$ とおくと，これは

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{v}_1 & \boldsymbol{v}_2 & \boldsymbol{v}_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} = \boldsymbol{0}$$

と表せるから，この斉次連立 1 次方程式が自明な解 $(c_1, c_2, c_3) = (0, 0, 0)$ のみをもつかどうかを調べればよい．そこで，係数行列 $A = \begin{pmatrix} \boldsymbol{v}_1 & \boldsymbol{v}_2 & \boldsymbol{v}_3 \end{pmatrix}$ を簡約階段行列に行基本変形すれば

$$\begin{aligned} A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -2 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 2 \\ 0 & 4 & 1 \end{pmatrix} &\xrightarrow[\text{第 1 列の掃き出し}]{\text{(1,1) 成分による}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 1 \end{pmatrix} \\ &\xrightarrow[\text{第 2 列の掃き出し}]{\text{(2,2) 成分による}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix} \\ &\xrightarrow[\text{第 3 列の掃き出し}]{\text{(3,3) 成分による}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

であるから，この斉次連立 1 次方程式は自明な解

$$(c_1, c_2, c_3) = (0, 0, 0)$$

のみをもつ．よって，$\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3$ は 1 次独立である．

（解答終）

斉次連立 1 次方程式の係数行列が正方行列であれば，行列式を用いて係数行列の正則性を調べることで，自明な解に限るかどうか判定できる．しかし，この問題のように係数行列（縦ベクトルを並べてできる行列）が正方行列となるとは限らない．また，行列式を用いると係数行列が正則でない場合，つまり 1 次従属のときの非自明な 1 次関係式もわからない．原則として 1 次独立かどうかの判定は，定義に基づいて 1 次関係式が自明なものに限るかどうかという議論をするべきである．

参考書によっては，解答でいきなり縦ベクトルを並べて行列を作っているものもあるが，普通はこれまでの解答のように「なぜベクトルを並べた行列が現れるのか」を説明しなければならないので注意すること．

例題 3.8. $P_2(\mathbb{R})$ のベクトル

$$f_1(x) = x^2 + x + 1, \qquad f_2(x) = 2x^2 + x + 3, \qquad f_3(x) = 3x^2 + x + 5$$

は 1 次独立かどうか調べよ．もし 1 次従属ならば，非自明な 1 次関係式を 1 つ挙げよ．

（解答） $c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}$ として

$$c_1 f(x) + c_2 f_2(x) + c_3 f_3(x) = 0 \quad \cdots \ (*)$$

とおく．これが自明な解 $(c_1, c_2, c_3) = (0, 0, 0)$ のみをもつかどうかを調べればよい．この方程式は

$$c_1(x^2 + x + 1) + c_2(2x^2 + x + 3) + c_3(3x^2 + x + 5) = 0$$

$$(c_1 + 2c_2 + 3c_3)x^2 + (c_1 + c_2 + c_3)x + (c_1 + 3c_2 + 5c_3) = 0$$

と表せて，これは a についての恒等式なので

$$\begin{cases} c_1 + 2c_2 + 3c_3 = 0 \\ c_1 + c_2 + c_3 = 0 \\ c_1 + 3c_2 + 5c_3 = 0 \end{cases}$$

が成り立つ．この斉次連立 1 次方程式を解くには，係数行列を行基本変形すればよい．よって

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 5 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 1 列の掃き出し}]{\text{(1,1) 成分による}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{\text{第 2 行を } (-1) \text{ 倍}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[\text{第 2 列の掃き出し}]{\text{(2,2) 成分による}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

より，解は

$$\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad (t \in \mathbb{R})$$

と表せる．ゆえに，$(*)$ は非自明な解をもつので，$f_1(x), f_2(x), f_3(x)$ は 1 次従属である．特に $t = 1$ として

$$f_1(x) - 2f_2(x) + f_3(x) = 0$$

が成り立つ．

（解答終）

1 次独立性の議論は縦ベクトルでない場合でも同様である．まず 1 次関係式を設定し，それが自明なものに限るかどうかを調べればよい．他のベクトル空間においても本質的な議論は変わらない．

例題 3.9. $P_2(\mathbb{R})$ のベクトル

$$f_1(x) = 1 - x, \qquad f_2(x) = -1 + 2x + 3x^2, \qquad f_3(x) = 2 + 2x + ax^2$$

が 1 次従属となるような定数 a の値を求め，そのときの非自明な 1 次関係式を書け．

（解答） $c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}$ として

$$c_1 f(x) + c_2 f_2(x) + c_3 f_3(x) = 0 \quad \cdots \ (*)$$

とおく．これが非自明な解 $(c_1, c_2, c_3) \fallingdotseq (0,0,0)$ をもてばよい．この方程式は

$$(c_1 - c_2 + 2c_3) + (-c_1 + 2c_2 + 2c_3)x + (3c_2 + ac_3)x^2 = 0$$

と表せて，これは a についての恒等式なので

$$\begin{cases} c_1 - c_2 + 2c_3 = 0 \\ -c_1 + 2c_2 + 2c_3 = 0 \\ 3c_2 + ac_3 = 0 \end{cases}$$

が成り立つ．この斉次連立 1 次方程式の係数行列を簡約階段行列を目指して行基本変形すれば

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 2 \\ 0 & 3 & a \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 1 列の掃き出し}]{\text{(1,1) 成分による}} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 3 & a \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 2 列の掃き出し}]{\text{(2,2) 成分による}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 6 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & a-12 \end{pmatrix} \quad \cdots \ (\sharp)$$

となる．よって，非自明な解をもつのは $a = 12$ のときである．このとき

$$(\sharp) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 6 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

であるから，解は

$$\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} -6 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad (t \in \mathbb{R})$$

と表せる．特に $t = -1$ とすれば

$$6f_1(x) + 4f_2(x) - f_3(x) = 0$$

が成り立つ．

（解答終）

例題 3.10. 実ベクトル空間 V のベクトル $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ が 1 次独立であるとする．このとき

$$\begin{aligned}\boldsymbol{v}_1 &= \boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b}+3\boldsymbol{c}\\ \boldsymbol{v}_2 &= 3\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b}+2\boldsymbol{c}\\ \boldsymbol{v}_3 &= \boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b}-4\boldsymbol{c}\end{aligned}$$

は 1 次独立かどうか調べよ．もし 1 次従属ならば，非自明な 1 次関係式を 1 つ挙げよ．

（解答） $c_1,c_2,c_3\in\mathbb{R}$ として

$$c_1\boldsymbol{v}_1+c_2\boldsymbol{v}_2+c_3\boldsymbol{v}_3=\boldsymbol{0}\quad\cdots\ (*)$$

とおく．これが自明な解 $(c_1,c_2,c_3)=(0,0,0)$ のみをもつかどうかを調べればよい．これに与えられたベクトルを代入すれば

$$c_1(\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b}+3\boldsymbol{c})+c_2(3\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b}+2\boldsymbol{c})+c_3(\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b}-4\boldsymbol{c})=\boldsymbol{0}$$

なので，整理して

$$(c_1+3c_2+c_3)\boldsymbol{a}+(2c_1+2c_2-2c_3)\boldsymbol{b}+(3c_1+2c_2-4c_3)\boldsymbol{c}=\boldsymbol{0}$$

となる．ここで，$\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ は 1 次独立なので，1 次関係式は自明なものに限るから

$$\begin{cases} c_1+3c_2+c_3=0\\ 2c_1+2c_2-2c_3=0\\ 3c_1+2c_2-4c_3=0\end{cases}$$

が成り立つ．この斉次連立 1 次方程式の係数行列を簡約階段行列に行基本変形すれば

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix}1&3&1\\2&2&-2\\3&2&-4\end{pmatrix} &\xrightarrow[\text{第 1 列の掃き出し}]{\text{(1,1) 成分による}}\begin{pmatrix}1&3&1\\0&-4&-4\\0&-7&-7\end{pmatrix}\\ &\xrightarrow{\text{第 2 行を } (-1/4) \text{ 倍}}\begin{pmatrix}1&3&1\\0&1&1\\0&-7&-7\end{pmatrix}\\ &\xrightarrow[\text{第 2 列の掃き出し}]{\text{(2,2) 成分による}}\begin{pmatrix}1&0&-2\\0&1&1\\0&0&0\end{pmatrix}\end{aligned}$$

より，解は

$$\begin{pmatrix}c_1\\c_2\\c_3\end{pmatrix}=t\begin{pmatrix}2\\-1\\1\end{pmatrix}\qquad(t\in\mathbb{R})$$

と表せる．ゆえに，$(*)$ は非自明な解をもつので，$\boldsymbol{v}_1,\boldsymbol{v}_2,\boldsymbol{v}_3$ は 1 次従属である．特に $t=1$ として

$$2\boldsymbol{v}_1-\boldsymbol{v}_2+\boldsymbol{v}_3=\boldsymbol{0}$$

が成り立つ．

4 基底と次元

4.1 基底の定義と性質

ここでは V を $\mathbb{K}$ 上のベクトル空間とする．

定義 4.1. （ベクトル空間を生成するベクトル）

$\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_k$ を V のベクトルとする．V の任意のベクトル $\boldsymbol{v}$ が

$$\boldsymbol{v} = c_1\boldsymbol{v}_1 + c_2\boldsymbol{v}_2 + \cdots + c_n\boldsymbol{v}_k \qquad (c_j \in \mathbb{K})$$

と $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_k$ の 1 次結合で表されるとき，$\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_k$ は V を**生成する**という．

ベクトル空間において重要な概念である基底を次で定める．

定義 4.2. （ベクトル空間の基底と次元）

(1) V の有限個のベクトル $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_n$ が

- $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_n$ は 1 次独立である
- $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_n$ は V を生成する

をともにみたすとき， $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_n$ は V の**基底**であるという．

(2) $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_n$ が V の基底であるとき，基底を構成するベクトルの個数 n を V の**次元**といい，$\dim V$ で表す．またこのとき，V は**有限次元**であるという．

(3) $V = \{\boldsymbol{0}\}$ のとき，V は有限次元ベクトル空間で $\dim V = 0$ と約束する．

(4) V が有限次元でないとき，**無限次元**であるという．

例えば，実ベクトル空間 $\mathbb{R}^2$ の基底は $\boldsymbol{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$，$\boldsymbol{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ である．実際，$\boldsymbol{e}_1$ と $\boldsymbol{e}_2$ は平行でないから 1 次独立である．さらに，任意のベクトル $\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ に対して

$$\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = a_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + a_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = a_1\boldsymbol{e}_1 + a_2\boldsymbol{e}_2$$

と表せるから，$\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2$ は $\mathbb{R}^2$ を生成する．したがって，$\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2$ は $\mathbb{R}^2$ の基底である．これを $\mathbb{R}^2$ の**標準基底**という．

一方，$\boldsymbol{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$，$\boldsymbol{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ とおくと，$\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2$ も $\mathbb{R}^2$ の基底となる．実際，$\boldsymbol{v}_1$ と $\boldsymbol{v}_2$ は平行でないから 1 次独立である．さらに，任意のベクトル $\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ に対して

$$\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \frac{a_1 + a_2}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{a_1 - a_2}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \frac{a_1 + a_2}{2}\,\boldsymbol{v}_1 + \frac{a_1 - a_2}{2}\,\boldsymbol{v}_2$$

と表せるから，$\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2$ は $\mathbb{R}^2$ を生成する．したがって，$\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2$ も $\mathbb{R}^2$ の基底である．

このように，**1 つのベクトル空間に対して基底の選び方は無限個**ある．ただし，基底を構成するベクトルの個数は変わらない（この事実は後で証明する）．

例 **4.3.** （数ベクトル空間）
　実ベクトル空間 $\mathbb{R}^n$ における基本ベクトル $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \ldots, \boldsymbol{e}_n$ は $\mathbb{R}^n$ の基底である．実際，$c_j \in \mathbb{R}$ に対して

$$c_1\boldsymbol{e}_1 + c_2\boldsymbol{e}_2 + \cdots + c_n\boldsymbol{e}_n = \boldsymbol{0}$$

とおくと，これを成分で表せば

$$c_1\boldsymbol{e}_1 + c_2\boldsymbol{e}_2 + \cdots + c_n\boldsymbol{e}_n = c_1\begin{pmatrix}1\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix} + c_2\begin{pmatrix}0\\1\\\vdots\\0\end{pmatrix} + \cdots + c_n\begin{pmatrix}0\\0\\\vdots\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}c_1\\c_2\\\vdots\\c_n\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix}$$

より，$c_1 = c_2 = \cdots = c_n = 0$ が成り立つ．よって，自明な解のみをもつから $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \ldots, \boldsymbol{e}_n$ は 1 次独立である．また，任意のベクトル $\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix}a_1\\a_2\\\vdots\\a_n\end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$ は

$$\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix}a_1\\a_2\\\vdots\\a_n\end{pmatrix} = a_1\begin{pmatrix}1\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix} + a_2\begin{pmatrix}0\\1\\\vdots\\0\end{pmatrix} + \cdots + a_n\begin{pmatrix}0\\0\\\vdots\\1\end{pmatrix} = a_1\boldsymbol{e}_1 + a_2\boldsymbol{e}_2 + \cdots + a_n\boldsymbol{e}_n$$

と $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \ldots, \boldsymbol{e}_n$ の 1 次結合で表せるから，$\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \ldots, \boldsymbol{e}_n$ は $\mathbb{R}^n$ を生成する．したがって，$\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \ldots, \boldsymbol{e}_n$ は $\mathbb{R}^n$ の基底であり，これを $\mathbb{R}^n$ の**標準基底**という．これより，$\dim \mathbb{R}^n = n$ である．

　複素ベクトル空間 $\mathbb{C}^n$ においても，同様にして基本ベクトル $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \ldots, \boldsymbol{e}_n$ が基底となることが示せる．これを $\mathbb{C}^n$ の**標準基底**という．これより，$\dim \mathbb{C}^n = n$ である．

例 **4.4.** （多項式空間の基底）
　実ベクトル空間 $P_n(\mathbb{R})$ は $1, x, x^2, \ldots, x^n$ を基底にもつ．実際，n 次以下の実数係数の多項式は

$$p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n \qquad (a_j \in \mathbb{R})$$

の形であるから，$1, x, x^2, \ldots, x^n$ は $P_n(\mathbb{R})$ を生成する．また，$a_j \in \mathbb{R}$ に対して，恒等的に

$$a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n = 0$$

となるのは $a_0 = a_1 = a_2 = \cdots = a_n = 0$ のときのみに限られるから，$1, x, x^2, \ldots, x^n$ は 1 次独立である．したがって，$1, x, x^2, \ldots, x^n$ は $P_n(\mathbb{R})$ の基底であり，$\dim P_n(\mathbb{R}) = n + 1$ である．

　係数を複素数に拡張した複素ベクトル空間 $P_n(\mathbb{C})$ においても，$1, x, x^2, \ldots, x^n$ が基底となることが同様に示せるから，$\dim P_n(\mathbb{C}) = n + 1$ である．

基底を用いた表示の最大の利点は次の命題が成り立つことである．

命題 4.5. （基底による表示の一意性）

V の任意のベクトルに対して，基底の 1 次結合による表示は一意的である．つまり，$\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_n$ が V の基底であるとき，任意のベクトル $\boldsymbol{v} \in V$ に対して

$$\boldsymbol{v} = x_1\boldsymbol{v}_1 + x_2\boldsymbol{v}_2 + \cdots + x_n\boldsymbol{v}_n$$

となる $x_j \in \mathbb{K}$ $(j = 1, 2, \ldots, n)$ がただ 1 つ定まる．

証明. $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_n$ を V の基底とすれば，これらは V を生成するから，任意のベクトル $\boldsymbol{v} \in V$ は

$$\boldsymbol{v} = x_1\boldsymbol{v}_1 + x_2\boldsymbol{v}_2 + \cdots + x_n\boldsymbol{v}_n \qquad (x_j \in \mathbb{K})$$

と $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_n$ の 1 次結合で表せる．よって，この表示が一意的であることを示せばよい．

そこで，$a_j, b_j \in \mathbb{K}$ $(j = 1, 2, \ldots, n)$ に対して

$$a_1\boldsymbol{v}_1 + a_2\boldsymbol{v}_2 + \cdots + a_n\boldsymbol{v}_n = b_1\boldsymbol{v}_1 + b_2\boldsymbol{v}_2 + \cdots + b_n\boldsymbol{v}_n$$

と 1 つのベクトルが 2 通りの 1 次結合で表せたとする．このとき，右辺を移項すれば

$$(a_1 - b_1)\boldsymbol{v}_1 + (a_2 - b_2)\boldsymbol{v}_2 + \cdots + (a_n - b_n)\boldsymbol{v}_n = \boldsymbol{0}$$

であり，$\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_n$ は 1 次独立なので

$$a_1 - b_1 = 0, \qquad a_2 - b_2 = 0, \qquad \cdots, \qquad a_n - b_n = 0$$

が成り立つ．ゆえに

$$a_j = b_j \qquad (j = 1, 2, \ldots, n)$$

となるので，$\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_n$ の 1 次結合による表し方は一意的であることがわかる． □

これより，V の基底 $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_n$ を 1 組決めれば，任意のベクトル $\boldsymbol{v} \in V$ は

$$\boldsymbol{v} = x_1\boldsymbol{v}_1 + x_2\boldsymbol{v}_2 + \cdots + x_n\boldsymbol{v}_n$$

とただ一通りに表せる．そのため，1 つのベクトルを同じ基底の 1 次結合で 2 通りに表したものに関しては係数比較ができる．これは高校数学「ベクトル」での 1 次独立の概念および計算方法と一致する．

また，この一意的な表示により

$$\boldsymbol{v} = x_1\boldsymbol{v}_1 + x_2\boldsymbol{v}_2 + \cdots + x_n\boldsymbol{v}_n \in V \quad \longleftrightarrow \quad \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^n$$

と対応づけることにより，ベクトル空間 V に “座標” を導入することができる．このことについて詳しくは第 9 章で扱う．

1つのベクトル空間Vに対して，Vの基底の選び方は1通りではないが，基底を構成するベクトルの個数は変わらないことを確認する．もし基底ごとにそれを構成するベクトルの個数が違うならば，ベクトル空間の次元を定義することができないからである．

定理 4.6. Vのn個のベクトル $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_n$ が，m個のベクトル $\boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{w}_2, \ldots, \boldsymbol{w}_m$ の1次結合で表されるとする．もし $m < n$ ならば，$\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_n$ は1次従属である．

証明. $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_n$ が1次従属であることを示すには，$c_j \in \mathbb{K}$ として

$$c_1\boldsymbol{v}_1 + c_2\boldsymbol{v}_2 + \cdots + c_n\boldsymbol{v}_n = \boldsymbol{0} \tag{4.1}$$

とおき，これが非自明な解 $(c_1, c_2, \ldots, c_n) \neq (0, 0, \ldots, 0)$ をもつことを示せばよい．

仮定より，各 $\boldsymbol{v}_j$ $(j = 1, 2, \ldots, n)$ はVのベクトル $\boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{w}_2, \ldots, \boldsymbol{w}_m$ を用いて

$$\boldsymbol{v}_j = a_{1j}\boldsymbol{w}_1 + a_{2j}\boldsymbol{w}_2 + \cdots + a_{mj}\boldsymbol{w}_m = \sum_{i=1}^{m} a_{ij}\boldsymbol{w}_i \qquad (a_{ij} \in \mathbb{K})$$

と1次結合で表せる．これを (4.1)に代入すれば

$$\boldsymbol{0} = \sum_{j=1}^{n} c_j\boldsymbol{v}_j = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{m} c_j a_{ij}\boldsymbol{w}_i = \sum_{i=1}^{m}(a_{i1}c_1 + a_{i2}c_2 + \cdots + a_{in}c_n)\boldsymbol{w}_i \tag{4.2}$$

である．そこで，すべての $\boldsymbol{w}_i$ の係数を0とおいた次の斉次連立1次方程式

$$\begin{cases} a_{11}c_1 + a_{12}c_2 + \cdots + a_{1n}c_n = 0 \\ a_{21}c_1 + a_{22}c_2 + \cdots + a_{2n}c_n = 0 \\ \qquad\qquad\vdots \\ a_{m1}c_1 + a_{m2}c_2 + \cdots + a_{mn}c_n = 0 \end{cases}$$

を考えると，これは未知数c_jがn個，式はm本であるから，$m < n$ より自明でない解が存在する．その解の1つ $(c_1, c_2, \ldots, c_n) \neq (0, 0, \ldots, 0)$ をとれば，これは(4.2)をみたすから，(4.1)の解となる．ゆえに，非自明な1次関係式が存在するので，$\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_n$ は1次従属である． □

定理 4.7. （次元の定義の妥当性）
$\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_n$ と $\boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{w}_2, \ldots, \boldsymbol{w}_m$ がともにVの基底ならば，$n = m$ である．

証明. $\boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{w}_2, \ldots, \boldsymbol{w}_m$ はVの基底なので，各 $\boldsymbol{v}_j$ $(j = 1, 2, \ldots, n)$ は $\boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{w}_2, \ldots, \boldsymbol{w}_m$ の1次結合で表せる．ここで，もし $m < n$ ならば，定理4.6より $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_n$ は1次従属となるが，これは $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_n$ がVの基底であることに矛盾する．よって， $m \geqq n$ である．

同様に，各 $\boldsymbol{w}_i$ $(i = 1, 2, \ldots, m)$ はVの基底 $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_n$ の1次結合で表せるから，$\boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{w}_2, \ldots, \boldsymbol{w}_m$ の1次独立性と定理4.6より $n \geqq m$ となる．

したがって，$n = m$ が成り立つ． □

これよりVの基底の個数はVの基底のとり方によらず一定なので，基底の個数をVの次元と定義することができることが確認できた．

4.2　基底と次元の計算例

例題 4.8.　実ベクトル空間 $\mathbb{R}^3$ の部分集合 W を次で定める．

$$W = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \middle| \, 2x + 3y - z = 0 \right\}$$

(1) W は $\mathbb{R}^3$ の部分空間であることを示せ．

(2) W の次元と基底を求めよ．

（解答）

(1)　$\mathbf{0} \in W$ より，$W \neq \emptyset$ である．また，任意の $\boldsymbol{a}_1 = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{a}_2 = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix} \in W$ と $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ をとると

$$2x_1 + 3y_1 - z_1 = 0, \qquad 2x_2 + 3y_2 - z_2 = 0$$

である．よって，$\alpha\boldsymbol{a}_1 + \beta\boldsymbol{a}_2 = \begin{pmatrix} \alpha x_1 + \beta x_2 \\ \alpha y_1 + \beta y_2 \\ \alpha z_1 + \beta z_2 \end{pmatrix}$ について

$$\begin{aligned} 2(\alpha x_1 + \beta x_2) + 3(\alpha y_1 + \beta y_2) - (\alpha z_1 + \beta z_2) &= \alpha(2x_1 + 3y_1 - z_1) + \beta(2x_2 + 3y_2 - z_2) \\ &= \alpha \cdot 0 + \beta \cdot 0 = 0 \end{aligned}$$

であるから，$\alpha\boldsymbol{a}_1 + \beta\boldsymbol{a}_2 \in W$ が成り立つ．したがって，W は $\mathbb{R}^3$ の部分空間である．

(2)　W は空間内の平面を表し，これは 3 点 $(0,0,0)$, $(1,0,2)$, $(0,1,3)$ を通る．よって，この平面のパラメータ表示は $s, t \in \mathbb{R}$ を用いて

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = s\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

となる．これより，W の任意のベクトルは $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ の 1 次結合で表せるから，$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ は W を生成する．さらに

$$s\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s \\ t \\ 2s + 3t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

とおくと，これは $s = t = 0$ のみを解にもつから，$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ は 1 次独立である．

したがって，$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ は W の基底であり，その次元は $\dim W = 2$ である．

（解答終）

例題 4.9. 実ベクトル空間 $M_{2\times3}(\mathbb{R})$ のベクトルを

$$E_{11}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&0\end{pmatrix},\qquad E_{12}=\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix},\qquad E_{13}=\begin{pmatrix}0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}$$

$$E_{21}=\begin{pmatrix}0&0&0\\1&0&0\end{pmatrix},\qquad E_{22}=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&1&0\end{pmatrix},\qquad E_{23}=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}$$

とおけば，$E_{11},E_{12},E_{13},E_{21},E_{22},E_{23}$ は $M_{2\times3}(\mathbb{R})$ の基底であることを示せ．

（解答）

$x_{ij}\in\mathbb{R}$ に対して

$$x_{11}E_{11}+x_{12}E_{12}+x_{13}E_{13}+x_{21}E_{21}+x_{22}E_{22}+x_{23}E_{23}=O$$

とおく．この式を成分で表せば

$$x_{11}E_{11}+x_{12}E_{12}+x_{13}E_{13}+x_{21}E_{21}+x_{22}E_{22}+x_{23}E_{23}=\begin{pmatrix}x_{11}&x_{12}&x_{13}\\x_{21}&x_{22}&x_{23}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$$

であるから，$x_{11}=x_{12}=x_{13}=x_{21}=x_{22}=x_{23}=0$ が成り立つ．よって，自明な解のみをもつから，$E_{11},E_{12},E_{13},E_{21},E_{22},E_{23}$ は 1 次独立である．

また，任意の $\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\end{pmatrix}\in M_{2\times3}(\mathbb{R})$ は

$$\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\end{pmatrix}=a_{11}E_{11}+a_{12}E_{12}+a_{13}E_{13}+a_{21}E_{21}+a_{22}E_{22}+a_{23}E_{23}$$

と $E_{11},E_{12},E_{13},E_{21},E_{22},E_{23}$ の 1 次結合で表せる．よって，$E_{11},E_{12},E_{13},E_{21},E_{22},E_{23}$ は $M_{2\times3}(\mathbb{R})$ を生成する．

したがって，$E_{11},E_{12},E_{13},E_{21},E_{22},E_{23}$ は $M_{2\times3}(\mathbb{R})$ の基底である．

（解答終）

これより，実ベクトル空間 $M_{2\times3}(\mathbb{R})$ の次元は 6 であることがわかる．

同様にして，実ベクトル空間 $M_{m\times n}(\mathbb{R})$ のベクトル E_{ij} $(i=1,2,\ldots,m,\ j=1,2,\ldots,n)$ を (i,j) 成分が 1 で他の成分がすべて 0 である行列とおく．このとき，$\{E_{ij}\}_{1\leqq i\leqq m,1\leqq j\leqq n}$ は $M_{m\times n}(\mathbb{R})$ の基底となることが示せる．よって

$$\dim M_{m\times n}(\mathbb{R})=mn$$

である．各自で確かめてみよ．また，成分を複素数に拡張した複素ベクトル空間 $M_{m\times n}(\mathbb{C})$ の基底としても同じものがとれるので，$\dim M_{m\times n}(\mathbb{C})=mn$ となる．

なお，上の例題の証明は例 4.3 で扱った $\mathbb{R}^n$ の標準基底の証明と本質的に同じである．具体的には，数字を縦 1 列に並べたか，長方形に並べたかの違いだけである．このように “同じ構造をもつ” ベクトル空間を同一視することで，行列や数列の漸化式，微分方程式などのさまざまな問題を数ベクトル空間の問題に帰着させることができる．これが第 9 章の主なテーマである．

例題 4.10.　$\mathbb{C}$ を実ベクトル空間と考えたときの次元 $\dim_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$ と基底を求めよ.

（解答）　$1, i$ が実ベクトル空間とみたときの $\mathbb{C}$ の基底であることを示す.
　まず，任意の複素数 $z \in \mathbb{C}$ は
$$z = a + b\,i \qquad (a, b \in \mathbb{R})$$
と表せるから，実数を係数とする $1, i$ の 1 次結合で表せる．よって，$1, i$ は $\mathbb{C}$ を生成する.
　また，$a, b \in \mathbb{R}$ に対して
$$a + b\,i = 0$$
とおけば，$a = b = 0$ となる．ゆえに，$1, i$ は係数を実数に限れば 1 次独立である.
　したがって，$1, i$ が実ベクトル空間 $\mathbb{C}$ の基底であり，$\dim_{\mathbb{R}} \mathbb{C} = 2$ である.

（解答終）

　明らかに複素ベクトル空間としての $\mathbb{C}$ の基底は 1 で次元は $\dim \mathbb{C} = 1$ である．複素数が関係するベクトル空間に対しては，スカラー倍の係数として実数のみを考えるのか複素数も許すのかで基底や次元が異なるので注意すること.

例題 4.11.　$P_n(\mathbb{C})$ を実ベクトル空間と考えたときの次元 $\dim_{\mathbb{R}} P_n(\mathbb{C})$ と基底を求めよ.

（解答）　$1, i, x, ix, x^2, ix^2, \ldots, x^n, ix^n$ が実ベクトル空間 $P_n(\mathbb{C})$ の基底であることを示す.
　まず，任意のベクトル $p(x) \in P_n(\mathbb{C})$ は
$$p(x) = z_0 + z_1 x + z_2 x^2 + \cdots + z_n x^n \qquad (z_j \in \mathbb{C})$$
と表せる．そこで，各 $z_j \in \mathbb{C}$ を $z_j = a_j + b_j\,i \ \ (a_j, b_j \in \mathbb{R})$ と表せば
$$\begin{aligned} p(x) &= (a_0 + b_0\,i) + (a_1 + b_1\,i)x + (a_2 + b_2\,i)x^2 + \cdots + (a_n + b_n\,i)x^n \\ &= a_0 + b_0 i + a_1 x + b_1 ix + a_2 x^2 + b_2 ix^2 + \cdots + a_n x^n + b_n ix^n \end{aligned}$$
と実数を係数とする $1, i, x, ix, x^2, ix^2, \ldots, x^n, ix^n$ の 1 次結合で表せるから，これらは $P_n(\mathbb{C})$ を生成する.
　また，$a_j,\, b_j \in \mathbb{R}$ に対して
$$a_0 + b_0 i + a_1 x + b_1 ix + a_2 x^2 + b_2 ix^2 + \cdots + a_n x^n + b_n ix^n = 0$$
とおく．これを整理すれば
$$(a_0 + b_0\,i) + (a_1 + b_1\,i)x + (a_2 + b_2\,i)x^2 + \cdots + (a_n + b_n\,i)x^n = 0$$
となるから，これが恒等的に 0 となるので
$$a_0 + b_0\,i = 0, \quad a_1 + b_1\,i = 0, \quad a_2 + b_2\,i = 0, \quad \ldots \quad , a_n + b_n\,i = 0$$
が成り立つ．$a_j, b_j \in \mathbb{R}$ なので，これより
$$a_0 = b_0 = 0, \quad a_1 = b_1 = 0, \quad a_2 = b_2 = 0, \quad \ldots \quad , a_n = b_n = 0$$
となり，自明な解のみをもつ．ゆえに，$1, i, x, ix, x^2, ix^2, \ldots, x^n, ix^n$ は係数を実数に限れば 1 次独立である.
　したがって，$1, i, x, ix, x^2, ix^2, \ldots, x^n, ix^n$ が実ベクトル空間 $P_n(\mathbb{C})$ の基底であり
$$\dim_{\mathbb{R}} P_n(\mathbb{C}) = 2n + 2$$
となる.

（解答終）

例題 4.12. 実数列全体のなす実ベクトル空間 S の部分空間

$$W = \{\, \boldsymbol{a} = \{a_n\}_{n=1}^{\infty} \in S \mid a_{n+3} - 4a_{n+2} + a_{n+1} + 6a_n = 0 \ (n \in \mathbb{N}) \,\}$$

の次元と基底を求めよ．

（解答） 実数列 $\boldsymbol{x} = \{x_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\boldsymbol{y} = \{y_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\boldsymbol{z} = \{z_n\}_{n=1}^{\infty} \in W$ を

$$\begin{array}{lcrrrrrrl} \{x_n\}_{n=1}^{\infty} & : & 1, & 0, & 0, & -6, & -24, & -90, & \ldots \\ \{y_n\}_{n=1}^{\infty} & : & 0, & 1, & 0, & -1, & -10, & -39, & \ldots \\ \{z_n\}_{n=1}^{\infty} & : & 0, & 0, & 1, & 4, & 15, & 50, & \ldots \end{array}$$

で定める（与えられた漸化式をみたすことから，初項，第 2 項，第 3 項が決まれば第 4 項以降は一意的に定まることに注意）．この $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}$ が W の基底であることを示す．

$a, b, c \in \mathbb{R}$ に対して

$$a\boldsymbol{x} + b\boldsymbol{y} + c\boldsymbol{z} = \boldsymbol{0}$$

とおけば

$$a\boldsymbol{x} + b\boldsymbol{y} + c\boldsymbol{z} = \{ax_n + by_n + cz_n\}_{n=1}^{\infty} \ : \ a,\ b,\ c,\ -6a - b + 4c,\ -24a - 10b + 15c,\ \ldots$$

が 0 である定数列なので，初めの 3 項を比較して $a = b = c = 0$ となる．よって，自明な解のみをもつから，$\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}$ は 1 次独立である．

次に，任意の数列 $\boldsymbol{a} = \{a_n\}_{n=1}^{\infty} \in W$ をとり，その最初の 3 項を用いて

$$\tilde{\boldsymbol{a}} = a_1\boldsymbol{x} + a_2\boldsymbol{y} + a_3\boldsymbol{z} \in W$$

とおく．このとき，$\boldsymbol{a}$ と $\tilde{\boldsymbol{a}}$ はともに与えられた漸化式をみたし，さらに

$$\tilde{\boldsymbol{a}} = \{a_1x_n + a_2y_n + a_3z_n\}_{n=1}^{\infty} \ : \ a_1,\ a_2,\ a_3,\ -6a_1 - a_2 + 4a_3,\ -24a_1 - 10a_2 + 15a_3,\ \ldots$$

となり，初めの 3 項が $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ と一致するから，漸化式より第 4 項以降も一致して，$\boldsymbol{a} = \tilde{\boldsymbol{a}} = a_1\boldsymbol{x} + a_2\boldsymbol{y} + a_3\boldsymbol{z}$ が成り立つ．よって，W は $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}$ で生成される．

したがって，$\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}$ が W の基底となり，$\dim W = 3$ である．

（解答終）

上の例題で $\dim W = 3$ ということは，漸化式が隣接 4 項間なので最初の 3 項を決めれば漸化式から第 4 項以降は自動的に定まることを表している．つまり自由に決められるのは最初の “3 成分” までであるから，その部分に

$$(x_1, x_2, x_3) = (1, 0, 0), \qquad (y_1, y_2, y_3) = (0, 1, 0), \qquad (z_1, z_2, z_3) = (0, 0, 1)$$

と $\mathbb{R}^3$ の基本ベクトルをとってきたものをそれぞれ $\boldsymbol{x} = \{x_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\boldsymbol{y} = \{y_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\boldsymbol{z} = \{z_n\}_{n=1}^{\infty} \in W$ とすれば，これが W の基底となる．その意味ではこの基底が W における標準的な基底である．

ただし，上で定めた数列 $\boldsymbol{x} = \{x_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\boldsymbol{y} = \{y_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\boldsymbol{z} = \{z_n\}_{n=1}^{\infty}$ の一般項を求めることは簡単ではない．そこで，第 10 章ではこの部分空間 W にふさわしい基底，つまり一般項のわかる数列からなる基底を求める方法を学習する．この事実を利用すれば，W を定める漸化式の一般項を求めることができるようになる．例えば，上の例題の W では $\{(-1)^n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{2^n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{3^n\}_{n=1}^{\infty}$ が基底となることがわかる．

次の例題は線形常微分方程式の初期値問題の解の一意性を学習してから読むとよい．

例題 4.13.　実ベクトル空間 $C^3(\mathbb{R})$ の部分空間

$$W = \{\, y \in C^3(\mathbb{R}) \mid y''' - 2y'' - 5y' + 6y = 0 \,\}$$

の次元と基底を求めよ．

（解答）　関数 $y_1, y_2, y_3 \in W$ を

$$\begin{aligned} &y_1(0) = 1, && y_1'(0) = 0, && y_1''(0) = 0 \\ &y_2(0) = 0, && y_2'(0) = 1, && y_2''(0) = 0 \\ &y_3(0) = 0, && y_3'(0) = 0, && y_3''(0) = 1 \end{aligned}$$

で定める（線形常微分方程式の初期値問題の解の一意性から，$y(0), y'(0), y''(0)$ を決めれば $y \in W$ は一意的に定まることに注意）．この y_1, y_2, y_3 が W の基底であることを示す．

$a, b, c \in \mathbb{R}$ に対して

$$ay_1 + by_2 + cy_3 = 0$$

とおく．ここで，$y = ay_1 + by_2 + cy_3$ とおけば，$y \in W$ であり

$$y(0) = a, \qquad y'(0) = b, \qquad y''(0) = c$$

となるから，解の一意性より恒等的に $y = 0$ となるのは $a = b = c = 0$ のときのみである．よって，自明な解のみをもつので，y_1, y_2, y_3 は 1 次独立である．

次に，任意の $y \in W$ をとり

$$\tilde{y} = y(0)y_1 + y'(0)y_2 + y''(0)y_3$$

とおく．y と $\tilde{y}$ はともに与えられた常微分方程式をみたし，さらに

$$\tilde{y}(0) = y(0), \qquad \tilde{y}'(0) = y'(0), \qquad \tilde{y}''(0) = y''(0)$$

となる．よって，解の一意性より，関数として

$$y = \tilde{y} = y(0)y_1 + y'(0)y_2 + y''(0)y_3$$

が成り立つ．よって，W は y_1, y_2, y_3 で生成される．

したがって，y_1, y_2, y_3 が W の基底となり，$\dim W = 3$ である．

（解答終）

上の例題で $\dim W = 3$ ということは，線形常微分方程式が 3 階の微分を含むので一般解は任意定数を 3 個もつから，$y(0), y'(0), y''(0)$ の 3 つの値を決めれば，解 $y \in W$ が自動的に定まることを表している．つまり自由に決められるのは “3 成分” までであるから，その部分に

$$(y_1(0),\, y_1'(0),\, y_1''(0)) = (1,0,0), \quad (y_2(0),\, y_2'(0),\, y_2''(0)) = (0,1,0), \quad (y_3(0),\, y_3'(0),\, y_3''(0)) = (0,0,1)$$

と $\mathbb{R}^3$ の基本ベクトルをとってきた常微分方程式の解をそれぞれ $y_1, y_2, y_3 \in W$ とすれば，これが W の基底となる．その意味ではこの基底が W において標準的な基底である．

ただし，上で定めた関数 y_1, y_2, y_3 の具体的な表示を求めることは簡単ではない．そこで，第 10 章ではこの部分空間 W にふさわしい基底，つまり具体的な形のわかる関数からなる基底を求める方法を学習する．この事実を利用すれば，W を定める常微分方程式の一般解を求めることができるようになる．例えば，上の例題の W では e^x, e^{-2x}, e^{3x} が基底となることがわかる．

4.3　斉次連立 1 次方程式の解空間の基底

$A \in M_{m\times n}(\mathbb{K})$ に対して，$V = \{\, \boldsymbol{x} \in \mathbb{K}^n \mid A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0} \,\}$ とおくと，これは $\mathbb{K}^n$ の部分空間である．また，この部分空間 V を斉次連立 1 次方程式 $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ の解空間と呼ぶということは例題 2.13 で解説した．

斉次連立 1 次方程式 $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ の解空間の基底については，実際に方程式を解くことで求めることができる．

例題 4.14.　行列

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix}$$

に対して，V を連立 1 次方程式 $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ の解空間とする．このとき，$\mathbb{R}^3$ の部分空間 V の次元と基底を求めよ．

（解答）　A を行基本変形で簡約階段行列に変形すれば

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 1 列の掃き出し}]{\text{(1,1) 成分による}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

となるので，方程式 $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ の解は

$$\boldsymbol{x} = s\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad (s, t \in \mathbb{R})$$

と表せる．

よって，V の任意のベクトルは $\boldsymbol{v}_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$，$\boldsymbol{v}_2 = \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ の 1 次結合で表せるので，$\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2$ は V を生成する．さらに

$$s\boldsymbol{v}_1 + t\boldsymbol{v}_2 = \begin{pmatrix} -2s - 3t \\ s \\ t \end{pmatrix} = \boldsymbol{0}$$

とおくと，$s = t = 0$ という自明な解のみをもつので，$\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2$ は 1 次独立である．

したがって，$\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2$ が V の基底であり，$\dim V = 2$ となる．

（解答終）

基底であることを示すには，「V を生成すること」と「1 次独立であること」の 2 つをきちんと示さなければならない．

斉次連立 1 次方程式の解空間については，係数行列を簡約階段行列に行基本変形してからパラメータを用いて表せば，その解のパラメータ表示から簡単に解空間の基底を求めることができる．実際，上の議論においてパラメータをくくり出したときのベクトルの組が基底となることが，定義に沿った議論により簡単に示せるからである．

例題 4.15. 斉次連立 1 次方程式

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 - x_3 = 0 \\ x_2 + x_3 + x_4 = 0 \\ x_1 - 3x_2 - 2x_3 - x_4 = 0 \end{cases}$$

の解空間を V とする．このとき，$\mathbb{R}^4$ の部分空間 V の次元と基底を求めよ．

（解答） 与えられた斉次連立 1 次方程式の係数行列は

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & -2 & -1 \end{pmatrix}$$

である．そこで，A を行基本変形で簡約階段行列に変形すれば

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & -2 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 1 列の掃き出し}]{\text{(1,1) 成分による}} \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 2 列の掃き出し}]{\text{(2,2) 成分による}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

より，解は

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = s \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad (s, t \in \mathbb{R})$$

と表せる．よって，V の任意のベクトルは $\boldsymbol{v}_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$，$\boldsymbol{v}_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ の 1 次結合で表せるから，$\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2$ は V を生成する．さらに

$$s\boldsymbol{v}_1 + t\boldsymbol{v}_2 = \begin{pmatrix} -s-2t \\ -s-t \\ s \\ t \end{pmatrix} = \boldsymbol{0}$$

とおくと，$s = t = 0$ であるから，自明な解のみをもつので $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2$ は 1 次独立である．ゆえに，$\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2$ が V の基底であり，$\dim V = 2$ となる．

（解答終）

例題 4.16. 行列

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ -1 & -2 & 0 & 1 \\ 3 & 6 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

に対して，連立 1 次方程式 $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ の解空間 を W とする．このとき，$\mathbb{R}^4$ の部分空間 W の次元と基底を求めよ．

（解答） A を行基本変形で簡約階段行列に変形すれば

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ -1 & -2 & 0 & 1 \\ 3 & 6 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 1 列の掃き出し}]{\text{(1,1) 成分による}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & -1 & -3 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 3 列の掃き出し}]{\text{(2,3) 成分による}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

より，$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ の解は

$$\boldsymbol{x} = s \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad (s, t \in \mathbb{R})$$

と表せる．よって，W の任意のベクトルは $\boldsymbol{v}_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$，$\boldsymbol{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$ の 1 次結合で表せるから，$\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2$ は W を生成する．さらに

$$s\boldsymbol{v}_1 + t\boldsymbol{v}_2 = \begin{pmatrix} -2s + t \\ s \\ -3t \\ t \end{pmatrix} = \boldsymbol{0}$$

とおくと，$s = t = 0$ であるから，自明な解のみをもつので $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2$ は 1 次独立である．ゆえに，$\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2$ が W の基底であり，$\dim W = 2$ となる．

（解答終）

4.4 有限個のベクトルで生成される部分空間の基底

ここでは有限個のベクトルから生成される部分空間について考える．

定義 4.17. （ベクトルから生成される部分空間）
$\mathbb{K}$ 上のベクトル空間 V のベクトル $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_k$ の 1 次結合によって表されるベクトル全体からなる集合を

$$\langle \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \cdots, \boldsymbol{v}_k \rangle = \{\, x_1\boldsymbol{v}_1 + x_2\boldsymbol{v}_2 + \cdots + x_k\boldsymbol{v}_k \mid x_j \in \mathbb{K},\ j = 1, \ldots, k \,\}$$

で表し，$\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_k$ **で生成される（張られる）V の部分空間**という．

定義 4.1 より，$\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_k$ が V を生成するということは $V = \langle \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \cdots, \boldsymbol{v}_k \rangle$ が成り立つことである．また，上の定義で与えられる部分集合 $\langle \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \cdots, \boldsymbol{v}_k \rangle$ が V の部分空間であることを確認しておく．

例題 4.18. $\mathbb{K}$ 上のベクトル空間 V のベクトル $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_k$ の 1 次結合によって表されるベクトル全体からなる集合

$$W = \langle \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \cdots, \boldsymbol{v}_k \rangle = \{\, x_1\boldsymbol{v}_1 + x_2\boldsymbol{v}_2 + \cdots + x_k\boldsymbol{v}_k \mid x_j \in \mathbb{K},\ j = 1, \ldots, k \,\}$$

は V の部分空間であることを示せ．

（解答） まず

$$\boldsymbol{0} = 0\boldsymbol{v}_1 + 0\boldsymbol{v}_2 + \cdots + 0\boldsymbol{v}_k$$

と表せるから，$x_1 = x_2 = \cdots = x_k = 0$ とすれば $\boldsymbol{0} \in W$ となるので，$W \neq \emptyset$ である．

また，任意の $\boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{w}_2 \in W$ と $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$ をとると，W の定義より

$$\boldsymbol{w}_1 = x_1\boldsymbol{v}_1 + x_2\boldsymbol{v}_2 + \cdots + x_k\boldsymbol{v}_k$$

$$\boldsymbol{w}_2 = y_1\boldsymbol{v}_1 + y_2\boldsymbol{v}_2 + \cdots + y_k\boldsymbol{v}_k$$

となるような $(x_1, \ldots, x_k)$ と $(y_1, \ldots, y_k)$ が存在する．よって

$$\begin{aligned}\alpha\boldsymbol{w}_1 + \beta\boldsymbol{w}_2 &= \alpha(x_1\boldsymbol{v}_1 + x_2\boldsymbol{v}_2 + \cdots + x_k\boldsymbol{v}_k) + \beta(y_1\boldsymbol{v}_1 + y_2\boldsymbol{v}_2 + \cdots + y_k\boldsymbol{v}_k) \\ &= (\alpha x_1 + \beta y_1)\boldsymbol{v}_1 + (\alpha x_2 + \beta y_2)\boldsymbol{v}_2 + \cdots + (\alpha x_k + \beta y_k)\boldsymbol{v}_k\end{aligned}$$

と表せる．ゆえに，$\alpha\boldsymbol{w}_1 + \beta\boldsymbol{w}_2 \in W$ が成り立つ．したがって，W は V の部分空間である．

（解答終）

例 4.19. （ベクトルから生成される部分空間の例）

(1) $\boldsymbol{v}$ を $\mathbb{R}^3$ の $\boldsymbol{0}$ でないベクトルとすると，$\langle \boldsymbol{v} \rangle = \{\, t\boldsymbol{v} \mid t \in \mathbb{R} \,\}$ は原点を通る直線である．

(2) $\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}$ を $\mathbb{R}^3$ の $\boldsymbol{0}$ でないベクトルとする．

- $\boldsymbol{v}$ と $\boldsymbol{w}$ が平行でないならば，$\langle \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w} \rangle = \{\, s\boldsymbol{v} + t\boldsymbol{w} \mid s, t \in \mathbb{R} \,\}$ は原点を通る平面である．
- $\boldsymbol{v}$ と $\boldsymbol{w}$ が平行ならば，$\langle \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w} \rangle$ は原点を通る直線である．

生成される部分空間の基底を求めるには，生成するベクトルの組から 1 次独立な最大個数のベクトルを選べばよい．

例題 4.20. $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3 \in \mathbb{R}^3$ を

$$\boldsymbol{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{v}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{v}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

で定める．$\mathbb{R}^3$ の部分空間 $W = \langle \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3 \rangle$ の基底を求めよ．

（解答） $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3$ の中から最大個数の 1 次独立な組を選べばよい．そこで，$x_j \in \mathbb{R}$ として

$$x_1\boldsymbol{v}_1 + x_2\boldsymbol{v}_2 + x_3\boldsymbol{v}_3 = \boldsymbol{0} \quad \cdots \ (*)$$

とおく．これは

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{v}_1 & \boldsymbol{v}_2 & \boldsymbol{v}_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

と表せる．この x_1, x_2, x_3 に関する斉次連立 1 次方程式を解くには，係数行列を簡約階段行列に行基本変形すればよく

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} \boldsymbol{v}_1 & \boldsymbol{v}_2 & \boldsymbol{v}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} &\xrightarrow[\text{第 1 列の掃き出し}]{\text{(1,1) 成分による}} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \\
&\xrightarrow[\text{第 2 列の掃き出し}]{\text{(3,2) 成分による}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \\
&\xrightarrow[\text{入れ替え}]{\text{第 2 行と第 3 行の}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

より，解は

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad (t \in \mathbb{R})$$

と表せる．よって，特に $t = 1$ とすれば

$$-\boldsymbol{v}_1 - \boldsymbol{v}_2 + \boldsymbol{v}_3 = \boldsymbol{0} \qquad \therefore \ \boldsymbol{v}_3 = \boldsymbol{v}_1 + \boldsymbol{v}_2$$

が成り立つ．ゆえに，W の任意のベクトル $\boldsymbol{w} = a\boldsymbol{v}_1 + b\boldsymbol{v}_2 + c\boldsymbol{v}_3$ は

$$\boldsymbol{w} = a\boldsymbol{v}_1 + b\boldsymbol{v}_2 + c(\boldsymbol{v}_1 + \boldsymbol{v}_2) = (a + c)\boldsymbol{v}_1 + (b + c)\boldsymbol{v}_2$$

と $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2$ の 1 次結合で表せるので，$W = \langle \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2 \rangle$ が成り立つ．

次に，$\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2$ が 1 次独立かどうか調べるために

$$x_1\boldsymbol{v}_1 + x_2\boldsymbol{v}_2 = \boldsymbol{0} \quad \cdots \ (**)$$

とおくと，これは $(*)$ で $x_3 = 0$ とした方程式である．したがって，$(*)$ の解のうち $x_3 = 0$ であるような (x_1, x_2) が $(**)$ の解となる．ここで，$(*)$ の解で $x_3 = 0$ となるのは $t = 0$ のときなので，このときには $x_1 = x_2 = 0$ となる．したがって，$(**)$ は自明な解のみをもつから，$\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2$ は 1 次独立である．以上より，W の基底は $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2$ である．

（解答終）

例題 4.21. $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3, \boldsymbol{v}_4 \in \mathbb{R}^4$ を

$$\boldsymbol{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -4 \\ 5 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{v}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 6 \\ 6 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{v}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{v}_4 = \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

で定める．$\mathbb{R}^4$ の部分空間 $W = \langle \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3, \boldsymbol{v}_4 \rangle$ の次元と基底を求めよ．

（解答） $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3, \boldsymbol{v}_4$ の中から最大個数の 1 次独立な組を選べばよい．そこで，$x_j \in \mathbb{R}$ として

$$x_1\boldsymbol{v}_1 + x_2\boldsymbol{v}_2 + x_3\boldsymbol{v}_3 + x_4\boldsymbol{v}_4 = \boldsymbol{0} \quad \cdots \ (*)$$

とおく．これは

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{v}_1 & \boldsymbol{v}_2 & \boldsymbol{v}_3 & \boldsymbol{v}_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

と表せる．この x_1, x_2, x_3, x_4 に関する斉次連立 1 次方程式を解くには，係数行列を簡約階段行列に行基本変形すればよく

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & -1 \\ 3 & 4 & -2 & 5 \\ -4 & 6 & 4 & 2 \\ 5 & 6 & -1 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 1 列の掃き出し}]{\text{(1,1) 成分による}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & -2 & -5 & 8 \\ 0 & 14 & 8 & -2 \\ 0 & -4 & -6 & 8 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[\text{第 2 列の掃き出し}]{\text{(2,2) 成分による}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -4 & 7 \\ 0 & -2 & -5 & 8 \\ 0 & 0 & -27 & 54 \\ 0 & 0 & 4 & -8 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[\text{第 3 行を } (-1/27) \text{ 倍}]{\text{第 2 行を } (-1/2) \text{ 倍}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -4 & 7 \\ 0 & 1 & 5/2 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 4 & -8 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 3 列の掃き出し}]{\text{(3,3) 成分による}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

より，解は

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad (t \in \mathbb{R})$$

と表せる．特に $t = 1$ として

$$\boldsymbol{v}_1 - \boldsymbol{v}_2 + 2\boldsymbol{v}_3 + \boldsymbol{v}_4 = \boldsymbol{0} \qquad \therefore \ \boldsymbol{v}_4 = -\boldsymbol{v}_1 + \boldsymbol{v}_2 - 2\boldsymbol{v}_3$$

が成り立つから，$W = \langle \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3 \rangle$ である．

次に，$\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3$ が 1 次独立かどうか調べるために

$$x_1\boldsymbol{v}_1 + x_2\boldsymbol{v}_2 + x_3\boldsymbol{v}_3 = \boldsymbol{0} \quad \cdots \ (**)$$

とおくと，これは $(*)$ で $x_4 = 0$ とした方程式である．したがって，$(*)$ の解のうち $x_4 = 0$ であるような (x_1, x_2, x_3) が $(**)$ の解となる．ここで，$(*)$ の解で $x_4 = 0$ となるのは $t = 0$ のときなので，このときには $x_1 = x_2 = x_3 = 0$ となる．したがって，$(**)$ は自明な解のみをもつから，$\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3$ は 1 次独立である．以上より，W の基底は $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3$ となり，$\dim W = 3$ である．

（解答終）

例題 4.22.　次の $\mathbb{R}^3$ の部分空間 W

$$W = \left\langle \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\1\\-2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\-1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\2\\0\end{pmatrix} \right\rangle$$

の次元と基底を求めよ.

（解答）　与えられたベクトルを

$$\boldsymbol{v}_1 = \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{v}_2 = \begin{pmatrix}-1\\1\\-2\end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{v}_3 = \begin{pmatrix}0\\-1\\1\end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{v}_4 = \begin{pmatrix}2\\2\\0\end{pmatrix}$$

とおくと，$W = \langle \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3, \boldsymbol{v}_4 \rangle$ である.

$\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3, \boldsymbol{v}_4$ の中から最大個数の 1 次独立な組を選べばよい．そこで，$x_j \in \mathbb{R}$ として

$$x_1\boldsymbol{v}_1 + x_2\boldsymbol{v}_2 + x_3\boldsymbol{v}_3 + x_4\boldsymbol{v}_4 = \boldsymbol{0} \quad \cdots \ (*)$$

とおく．これは

$$\begin{pmatrix}\boldsymbol{v}_1 & \boldsymbol{v}_2 & \boldsymbol{v}_3 & \boldsymbol{v}_4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix} = \boldsymbol{0}$$

と表せる．この x_1, x_2, x_3, x_4 に関する斉次連立 1 次方程式を解くには，係数行列を簡約階段行列に行基本変形すればよく

$$\begin{pmatrix}1 & -1 & 0 & 2\\0 & 1 & -1 & 2\\1 & -2 & 1 & 0\end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 1 列の掃き出し}]{\text{(1,1) 成分による}} \begin{pmatrix}1 & -1 & 0 & 2\\0 & 1 & -1 & 2\\0 & -1 & 1 & 2\end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 2 列の掃き出し}]{\text{(2,2) 成分による}} \begin{pmatrix}1 & 0 & -1 & 4\\0 & 1 & -1 & 2\\0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

より，解は

$$\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix} = s\begin{pmatrix}1\\1\\1\\0\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}-4\\-2\\0\\1\end{pmatrix} \qquad (s, t \in \mathbb{R})$$

と表せる．よって，特に $s = 1,\ t = 0$ とすれば

$$\boldsymbol{v}_1 + \boldsymbol{v}_2 + \boldsymbol{v}_3 = \boldsymbol{0} \qquad \therefore\ \boldsymbol{v}_3 = -\boldsymbol{v}_1 - \boldsymbol{v}_2$$

であり，また $s = 0,\ t = 1$ とすれば

$$-4\boldsymbol{v}_1 - 2\boldsymbol{v}_2 + \boldsymbol{v}_4 = \boldsymbol{0} \qquad \therefore\ \boldsymbol{v}_4 = 4\boldsymbol{v}_1 + 2\boldsymbol{v}_2$$

であるから，$W = \langle \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2 \rangle$ が成り立つ.

次に，$\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2$ が 1 次独立かどうか調べるために

$$x_1\boldsymbol{v}_1 + x_2\boldsymbol{v}_2 = \boldsymbol{0} \quad \cdots \ (**)$$

とおくと，これは $(*)$ で $x_3 = x_4 = 0$ とした方程式である．したがって，$(*)$ の解のうち $x_3 = x_4 = 0$ であるような (x_1, x_2) が $(**)$ の解となる．ここで，$(*)$ の解で $x_3 = x_4 = 0$ となるのは $s = t = 0$ のときなので，このときには $x_1 = x_2 = 0$ となる．したがって，$(**)$ は自明な解のみをもつから，$\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2$ は 1 次独立である．以上より，W の基底は $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2$ となり，$\dim W = 2$ である.

（解答終）

例題 4.23. 次の多項式

$$f_1(x) = x^2 + x + 3, \qquad f_2(x) = 2x^2 + x + 1, \qquad f_3(x) = -x^2 + x + 7$$

で生成される $P_2(\mathbb{R})$ の部分空間 $W = \langle f_1(x), f_2(x), f_3(x) \rangle$ の次元と基底を求めよ．

（解答） $f_1(x), f_2(x), f_3(x)$ の中から最大個数の 1 次独立な組を選べばよい．そこで，$c_j \in \mathbb{R}$ として

$$c_1 f_1(x) + c_2 f_2(x) + c_3 f_3(x) = 0 \quad \cdots \ (*)$$

とおく．この式を整理すれば

$$(c_1 + 2c_2 - c_3)x^2 + (c_1 + c_2 + c_3)x + (3c_1 + c_2 + 7c_3) = 0$$

と表せるから，これが x についての恒等式なので

$$\begin{cases} c_1 + 2c_2 - c_3 = 0 \\ c_1 + c_2 + c_3 = 0 \\ 3c_1 + c_2 + 7c_3 = 0 \end{cases}$$

が成り立つ．この斉次連立 1 次方程式を解くには，係数行列を簡約階段行列に行基本変形すればよいから

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 7 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 1 列の掃き出し}]{\text{(1,1) 成分による}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & -5 & 10 \end{pmatrix} \xrightarrow[(-1)\text{ 倍}]{\text{第 2 行を}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & -5 & 10 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 2 列の掃き出し}]{\text{(2,2) 成分による}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

より，解は

$$\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad (t \in \mathbb{R})$$

と表せる．特に $t = 1$ とすれば

$$-3f_1(x) + 2f_2(x) + f_3(x) = 0 \qquad \therefore\ f_3(x) = 3f_1(x) - 2f_2(x)$$

が成り立つ．ゆえに，W の任意のベクトル $p(x) = uf_1(x) + vf_2(x) + wf_3(x)$ $(u, v, w \in \mathbb{R})$ は

$$p(x) = uf_1(x) + vf_2(x) + w\{3f_1(x) - 2f_2(x)\} = (u + 3w)f_1(x) + (v - 2w)f_2(x)$$

と $f_1(x), f_2(x)$ の 1 次結合で表せるので，$W = \langle f_1(x), f_2(x) \rangle$ が成り立つ．

次に，$f_1(x), f_2(x)$ が 1 次独立かどうか調べるために

$$af_1(x) + bf_2(x) = 0 \quad \cdots \ (**)$$

とおくと，これは $(*)$ で $c_3 = 0$ とした方程式である．したがって，$(*)$ の解のうち $c_3 = 0$ であるような (c_1, c_2) が $(**)$ の解となる．ここで，$(*)$ の解で $c_3 = 0$ となるのは $t = 0$ のときなので，このときには $c_1 = c_2 = 0$ となる．したがって，$(**)$ は自明な解のみをもつから，$f_1(x), f_2(x)$ は 1 次独立である．以上より，W の基底は $f_1(x), f_2(x)$ であり，$\dim W = 2$ となる．

（解答終）

4.5　基底の延長定理

ここでも V を $\mathbb{K}$ 上のベクトル空間とする．ここまでにベクトル空間の基底の計算例を説明したが，応用上はいくつかの 1 次独立なベクトルが与えられ，それにいくつかのベクトルを追加して基底を構成したいこともある．具体的には，1 次独立なベクトルが選び続けられる限りそれをベクトルの組に追加し，もう 1 次独立なベクトルが選べなくなれば基底となっている．それを保証するのが次の定理である．証明を含めて大事なので，必ず理解しておくこと．

定理 4.24.（基底の延長）
V を n 次元ベクトル空間とし，k を n より小さい自然数とする．また，$\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_k$ を 1 次独立な V のベクトルとする．
このとき，$\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_k$ を含む V の基底 $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_k, \boldsymbol{v}_{k+1}, \ldots, \boldsymbol{v}_n$ が存在する．

証明.　まず最初に $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_k$ は V を生成しないことを示す．もし $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_k$ が V を生成すると仮定すると，定理の条件の 1 次独立性より $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_k$ が V の基底となるが，これは $k < \dim V = n$ に矛盾する．よって，$\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_k$ は V を生成しない．

ゆえに，$\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_k$ の 1 次結合で表せないベクトル $\boldsymbol{v} \in V$ を 1 つ選ぶことができるので，それを v_{k+1} とおく．このとき，$\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_k, \boldsymbol{v}_{k+1}$ は 1 次独立となることを示す．そのために，$c_j \in \mathbb{K}$ に対して

$$c_1\boldsymbol{v}_1 + c_2\boldsymbol{v}_2 + \cdots + c_k\boldsymbol{v}_k + c_{k+1}\boldsymbol{v}_{k+1} = \boldsymbol{0} \quad \cdots\ (*)$$

とおく．もし $c_{k+1} \neq 0$ であると仮定すると，$(*)$ は

$$\boldsymbol{v}_{k+1} = -\frac{c_1}{c_{k+1}}\boldsymbol{v}_1 - \frac{c_2}{c_{k+1}}\boldsymbol{v}_2 - \cdots - \frac{c_k}{c_{k+1}}\boldsymbol{v}_k$$

と変形でき，これは $\boldsymbol{v}_{k+1}$ が $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_k$ の 1 次結合で表せないことに矛盾する．よって，$c_{k+1} = 0$ である．これを $(*)$ に代入すれば

$$c_1\boldsymbol{v}_1 + c_2\boldsymbol{v}_2 + \cdots + c_k\boldsymbol{v}_k = \boldsymbol{0}$$

となる．定理の仮定より，$\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_k$ は 1 次独立であったから，$c_1 = c_2 = \cdots = c_k = 0$ が成り立つ．したがって，$(*)$ は自明な関係式に限られるから，$\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_k, \boldsymbol{v}_{k+1}$ も 1 次独立である．

もし $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_k, \boldsymbol{v}_{k+1}$ が V を生成しないならば，さらに $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_k, \boldsymbol{v}_{k+1}$ の 1 次結合で表せないベクトルを選び，それを $\boldsymbol{v}_{k+2}$ として組に追加する．このように，既に選んだベクトルの組の 1 次結合で表せないベクトルがあるたびに，それをさらに組に追加するという操作を繰り返す．ここで，定理 4.6 と $\dim V = n$ より $n+1$ 本以上のベクトルの組は 1 次従属になるから，この操作は必ず有限回で終了し，1 次独立な組 $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_m$ $(m \leqq n)$ で V を生成するものが得られる．

このとき，$\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_m$ は 1 次独立で V を生成するから，V の基底である．したがって，定理 4.7（次元の妥当性）より $m = n$ となり，この $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_n$ が $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_k$ にベクトルを加えることで構成された V の基底である．□

このように与えられた 1 次独立なベクトルの組を含む V の基底を構成することを**基底の延長**という．この操作より，V の次元とは V の中で 1 次独立であるようにとれるベクトルの最大個数となっていることがわかる．

基底の延長定理の証明と同様にして，次の定理が導かれる．これを利用すれば，あらかじめ次元がわかっているベクトル空間の基底を簡単に求められるようになる．

定理 4.25. （次元と一致する個数のベクトルの組が基底であるための判定条件）
V を n 次元ベクトル空間とする．V の n 個のベクトル $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_n$ に対して，次は同値である．

(1) $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_n$ は 1 次独立である

(2) $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_n$ は V を生成する

よって，この 2 条件のどちらかをみたせば，$\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_n$ は V の基底である．

証明. まず (1) と (2) が同値であることを示す．
(1) $\Longrightarrow$ (2)
$\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_n$ が 1 次独立であるとする．
もし $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_n$ が V を生成しないと仮定すると，$\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_n$ の 1 次結合で表せないベクトル $\boldsymbol{v} \in V$ が存在する．このとき，定理 4.24 の証明と同じように $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_n, \boldsymbol{v}$ は 1 次独立となる．しかし，定理 4.6 と $\dim V = n$ より $n+1$ 個のベクトルは 1 次従属であるから，これは矛盾である．ゆえに，$\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_n$ は V を生成する．

(2) $\Longrightarrow$ (1)
$\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_n$ が V を生成するとする．
もし $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_n$ が 1 次従属であると仮定すると，定理 3.3 より $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_n$ の中に他の $n-1$ 個のベクトルの 1 次結合で表せるものが存在する．必要なら番号を付け直して，$\boldsymbol{v}_n$ が $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_{n-1}$ の 1 次結合で表せるとしてよい．このとき，$V = \langle \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \cdots, \boldsymbol{v}_{n-1} \rangle$ が成り立つことになる．一方，$\dim V = n$ であるから，n 個のベクトルからなる基底 $\boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{w}_2, \ldots, \boldsymbol{w}_n$ が存在する．しかし，上の議論より各 $\boldsymbol{w}_j$ $(j = 1, 2, \ldots, n)$ は $n-1$ 個のベクトル $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_{n-1}$ の 1 次結合で表せるので，定理 4.6 より $\boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{w}_2, \ldots, \boldsymbol{w}_n$ は 1 次従属となる．これは基底の 1 次独立性に矛盾する．ゆえに，$\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_n$ は 1 次独立である．

したがって，(1) と (2) は同値である．また，n 個のベクトル $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_n$ が (1) または (2) をみたせば両方をみたすことになるから，$\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_n$ は 1 次独立かつ V を生成するので，V の基底である． □

定理 4.25 を利用すれば，次のように基底を求めることが簡単になる．

例題 4.26. $\mathbb{R}^4$ のベクトルを

$$\boldsymbol{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{v}_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{v}_4 = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

とおくとき，$\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3, \boldsymbol{v}_4$ は $\mathbb{R}^4$ の基底であることを示せ．

（解答） $c_1\boldsymbol{v}_1 + c_2\boldsymbol{v}_2 + c_3\boldsymbol{v}_3 + c_4\boldsymbol{v}_4 = \boldsymbol{0}$ $(c_j \in \mathbb{R})$ とおく．これは

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{v}_1 & \boldsymbol{v}_2 & \boldsymbol{v}_3 & \boldsymbol{v}_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \end{pmatrix} = \boldsymbol{0}$$

と表せる．この斉次連立 1 次方程式を解くには，係数行列を簡約階段行列に行基本変形すればよく

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & -2 \\ 0 & 1 & -2 & 3 \\ -2 & 3 & -1 & 0 \\ 3 & -2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 1 列の掃き出し}]{\text{(1,1) 成分による}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & -2 \\ 0 & 1 & -2 & 3 \\ 0 & 3 & 5 & -4 \\ 0 & -2 & -9 & 7 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[\text{第 2 列の掃き出し}]{\text{(2,2) 成分による}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & -2 \\ 0 & 1 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 11 & -13 \\ 0 & 0 & -13 & 13 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{\text{第 4 行を } (-1/13) \text{ 倍}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & -2 \\ 0 & 1 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 11 & -13 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[\text{第 3 列の掃き出し}]{\text{(4,3) 成分による}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[\text{入れ替え}]{\text{第 3 行と第 4 行の}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{\text{第 4 行を } (-1/2) \text{ 倍}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 4 列の掃き出し}]{\text{(4,4) 成分による}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

である．よって，自明な解

$$(c_1, c_2, c_3, c_4) = (0, 0, 0, 0)$$

のみをもつから，$\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3, \boldsymbol{v}_4$ は 1 次独立である．

$\dim \mathbb{R}^4 = 4$ であるから，定理 4.25 より 4 個の 1 次独立なベクトルの組 $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3, \boldsymbol{v}_4$ は $\mathbb{R}^4$ の基底となる．

（解答終）

例題 4.27. $\mathbb{R}^3$ のベクトルを

$$\boldsymbol{v}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{v}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{v}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{w} = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

とおく.

(1) $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3$ は $\mathbb{R}^3$ の基底であることを示せ.

(2) $\boldsymbol{w}$ を $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3$ の 1 次結合で表せ.

（解答）

(1) $c_1\boldsymbol{v}_1 + c_2\boldsymbol{v}_2 + c_3\boldsymbol{v}_3 = \boldsymbol{0}$ $(c_j \in \mathbb{R})$ とおく．これは

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{v}_1 & \boldsymbol{v}_2 & \boldsymbol{v}_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} = \boldsymbol{0}$$

と表せるから，この斉次連立 1 次方程式を解くには係数行列を簡約階段行列に行基本変形すればよく

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 1 列の掃き出し}]{\text{(2,1) 成分による}} \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{入れ替え}]{\text{第 1 行と第 2 行の}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{\text{第 2 行を } (-1) \text{ 倍}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 2 列の掃き出し}]{\text{(2,2) 成分による}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 3 列の掃き出し}]{\text{(3,3) 成分による}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

である．よって，自明な解

$$(c_1, c_2, c_3) = (0, 0, 0)$$

のみをもつから，$\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3$ は 1 次独立である．さらに，$\dim \mathbb{R}^3 = 3$ であるから，3 個の 1 次独立なベクトルの組 $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3$ は $\mathbb{R}^3$ の基底となる.

(2) $c_1\boldsymbol{v}_1 + c_2\boldsymbol{v}_2 + c_3\boldsymbol{v}_3 = \boldsymbol{w}$ $(c_j \in \mathbb{R})$ とおく．これは

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{v}_1 & \boldsymbol{v}_2 & \boldsymbol{v}_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} = \boldsymbol{w}$$

と表せるから，この連立 1 次方程式を解くには拡大係数行列を簡約階段行列に行基本変形すればよく，(1) と全く同じ変形を行えば

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[\text{行基本変形}]{\text{(1) と全く同じ}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right)$$

となる．よって

$$(c_1, c_2, c_3) = (1, 3, -1)$$

であるから

$$\boldsymbol{w} = \boldsymbol{v}_1 + 3\boldsymbol{v}_2 - \boldsymbol{v}_3$$

と表せる.

（解答終）

部分空間の次元については，次の定理が成り立つ．これは『部分空間の次元が全体の次元を超えることはない』という自然な主張である．

定理 4.28. （部分空間の次元）
V を $\mathbb{K}$ 上の有限次元ベクトル空間，W を V の部分空間とする．このとき

$$\dim W \leqq \dim V$$

であり，等号が成立するのは $W = V$ の場合に限る．

証明. V は有限次元なので，その次元を $\dim V = n$ とおく．

まず $W = \{\mathbf{0}\}$ の場合には
$$\dim W = 0 \leqq n = \dim V$$
より，主張は成り立つ．

そこで，$W \neq \{\mathbf{0}\}$ とする．$W \neq \{\mathbf{0}\}$ より，W のベクトル $\boldsymbol{w}_1$ で $\mathbf{0}$ でないものがとれる．もし $W = \langle \boldsymbol{w}_1 \rangle$ ならば操作を終了し，$W \neq \langle \boldsymbol{w}_1 \rangle$ ならば $\boldsymbol{w}_1$ の 1 次結合で表せないベクトル $\boldsymbol{w}_2 \in W$ をとる．このように W を生成するベクトルの組になるまで，それまでに得られているベクトルの組の 1 次結合で表せない W の 1 次独立なベクトルを追加するという操作を繰り返す．補題 4.6 と $\dim V = n$ より $n+1$ 個のベクトルは 1 次従属であるから，この操作は最大でも n 回で終了する．
よって，1 次独立なベクトルの組 $\boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{w}_2, \ldots, \boldsymbol{w}_m$ $(m \leqq n)$ で $W = \langle \boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{w}_2, \cdots, \boldsymbol{w}_m \rangle$ となるものが存在する．このとき，$\boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{w}_2, \ldots, \boldsymbol{w}_m$ は 1 次独立で W を生成するから，W の基底である．ゆえに

$$\dim W = m \leqq n = \dim V$$

が成り立つ．

等号が成り立つのは $m = n$ のときであるから，W の基底 $\boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{w}_2, \ldots, \boldsymbol{w}_n$ は n 個の 1 次独立なベクトルからなるので，定理 4.25 より V の基底ともなる．ゆえに，$V = W$ が成り立つ． □

5　部分空間の直和

5.1　部分空間の和と共通部分

ここでは V を $\mathbb{K}$ 上のベクトル空間とする．

定義 5.1. （和空間）
W_1 と W_2 を V の部分空間とする．このとき

$$W_1 + W_2 = \{\, \boldsymbol{w}_1 + \boldsymbol{w}_2 \mid \boldsymbol{w}_1 \in W_1,\ \boldsymbol{w}_2 \in W_2 \,\}$$

とおくと，$W_1 + W_2$ は V の部分空間となる．これを W_1 と W_2 の**和空間**という．

同様に，$W_1, W_2, \ldots, W_k$ を V の部分空間とするとき

$$W_1 + W_2 + \cdots + W_k = \{\, \boldsymbol{w}_1 + \boldsymbol{w}_2 + \cdots + \boldsymbol{w}_k \mid \boldsymbol{w}_j \in W_j\ (j = 1, 2, \ldots, k) \,\}$$

を $W_1, W_2, \ldots, W_k$ の**和空間**という．

注意 5.2.　一般に W_1 と W_2 の和集合 $W_1 \cup W_2$ と和空間 $W_1 + W_2$ は異なることに注意すること．また，和集合 $W_1 \cup W_2$ は部分空間となるとは限らない．例えば，$V = \mathbb{R}^3$ として

$$W_1 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \middle|\ x \in \mathbb{R} \right\}, \qquad W_2 = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ y \\ 0 \end{pmatrix} \middle|\ y \in \mathbb{R} \right\}$$

とおくと，W_1 と W_2 は V の部分空間で

$$W_1 + W_2 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix} \middle|\ x, y \in \mathbb{R} \right\}, \qquad W_1 \cup W_2 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix} \middle|\ x = 0 \text{ または } y = 0 \right\}$$

となる．$W_1 + W_2$ は V の部分空間だが

$$\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},\ \boldsymbol{w} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \in W_1 \cup W_2, \qquad \boldsymbol{v} + \boldsymbol{w} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \notin W_1 \cup W_2$$

であるから，$W_1 \cup W_2$ は V の部分空間ではない．

定義 5.3. （共通部分）
W_1 と W_2 を V の部分空間とする．このとき

$$W_1 \cap W_2 = \{\, \boldsymbol{w} \mid \boldsymbol{w} \in W_1 \text{ かつ } \boldsymbol{w} \in W_2 \,\}$$

とおくと，$W_1 \cap W_2$ は V の部分空間となる．これを W_1 と W_2 の**共通部分**という．

$\mathbb{K}$ 上のベクトル空間 V の部分空間 W_1 と W_2 に対して，その和空間 $W_1 + W_2$ と共通部分 $W_1 \cap W_2$ が V の部分空間であることについては，各自確かめておくこと．また，V の部分空間の和空間の基底を求めるには，$\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_k, \boldsymbol{v}_{k+1}, \ldots, \boldsymbol{v}_m \in V$ に対して

$$\langle \boldsymbol{v}_1, \cdots, \boldsymbol{v}_k \rangle + \langle \boldsymbol{v}_{k+1}, \cdots, \boldsymbol{v}_m \rangle = \langle \boldsymbol{v}_1, \cdots, \boldsymbol{v}_m \rangle$$

が成り立つことを利用する．

例題 5.4.　次の $\mathbb{R}^4$ の 2 個の部分空間 W_1 と W_2 の和空間 W_1+W_2 の次元と基底を求めよ．

$$W_1=\left\langle\begin{pmatrix}1\\2\\-1\\-2\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}3\\2\\-2\\-1\end{pmatrix}\right\rangle,\qquad W_2=\left\langle\begin{pmatrix}-1\\1\\2\\0\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}0\\-1\\2\\3\end{pmatrix}\right\rangle$$

（解答）　与えられたベクトルを

$$\boldsymbol{v}_1=\begin{pmatrix}1\\2\\-1\\-2\end{pmatrix},\qquad \boldsymbol{v}_2=\begin{pmatrix}3\\2\\-2\\-1\end{pmatrix},\qquad \boldsymbol{v}_3=\begin{pmatrix}-1\\1\\2\\0\end{pmatrix},\qquad \boldsymbol{v}_4=\begin{pmatrix}0\\-1\\2\\3\end{pmatrix}$$

とおくと，$W_1+W_2=\langle\boldsymbol{v}_1,\boldsymbol{v}_2,\boldsymbol{v}_3,\boldsymbol{v}_4\rangle$ である．

$\boldsymbol{v}_1,\boldsymbol{v}_2,\boldsymbol{v}_3,\boldsymbol{v}_4$ の中から最大個数の 1 次独立な組を選べばよい．そこで，$x_j\in\mathbb{R}$ として

$$x_1\boldsymbol{v}_1+x_2\boldsymbol{v}_2+x_3\boldsymbol{v}_3+x_4\boldsymbol{v}_4=\boldsymbol{0}\quad\cdots\ (*)$$

とおく．これは

$$\begin{pmatrix}\boldsymbol{v}_1 & \boldsymbol{v}_2 & \boldsymbol{v}_3 & \boldsymbol{v}_4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}=\boldsymbol{0}$$

と表せるから，係数行列を簡約階段行列に行基本変形すれば

$$\begin{pmatrix}1&3&-1&0\\2&2&1&-1\\-1&-2&2&2\\-2&-1&0&3\end{pmatrix}\xrightarrow[\text{第 1 列の掃き出し}]{\text{(1,1) 成分による}}\begin{pmatrix}1&3&-1&0\\0&-4&3&-1\\0&1&1&2\\0&5&-2&3\end{pmatrix}\xrightarrow[\text{第 2 列の掃き出し}]{\text{(3,2) 成分による}}\begin{pmatrix}1&0&-4&-6\\0&0&7&7\\0&1&1&2\\0&0&-7&-7\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[\text{行の入れ替え}]{\text{第 2 行を 1/7 倍}}\begin{pmatrix}1&0&-4&-6\\0&1&1&2\\0&0&1&1\\0&0&-7&-7\end{pmatrix}\xrightarrow[\text{第 3 列の掃き出し}]{\text{(3,3) 成分による}}\begin{pmatrix}1&0&0&-2\\0&1&0&1\\0&0&1&1\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

より，解は t を任意の実数として

$$(x_1,\,x_2,\,x_3,\,x_4)=(2t,\,-t,\,-t,\,t)$$

となる．特に $t=1$ として

$$2\boldsymbol{v}_1-\boldsymbol{v}_2-\boldsymbol{v}_3+\boldsymbol{v}_4=\boldsymbol{0}\qquad\therefore\ \boldsymbol{v}_4=-2\boldsymbol{v}_1+\boldsymbol{v}_2+\boldsymbol{v}_3$$

が成り立つから，$W_1+W_2=\langle\boldsymbol{v}_1,\boldsymbol{v}_2,\boldsymbol{v}_3\rangle$ である．

次に，$\boldsymbol{v}_1,\boldsymbol{v}_2,\boldsymbol{v}_3$ が 1 次独立かどうか調べるために

$$x_1\boldsymbol{v}_1+x_2\boldsymbol{v}_2+x_3\boldsymbol{v}_3=\boldsymbol{0}\quad\cdots\ (**)$$

とおくと，これは $(*)$ で $x_4=0$ とした方程式である．したがって，$(*)$ の解のうち $x_4=0$ であるような (x_1,x_2,x_3) が $(**)$ の解となる．ここで，$(*)$ の解で $x_4=0$ となるのは $t=0$ のときなので，このときには $x_1=x_2=x_3=0$ となる．したがって，$(**)$ は自明な解のみをもつから，$\boldsymbol{v}_1,\boldsymbol{v}_2,\boldsymbol{v}_3$ は 1 次独立である．以上より，$\boldsymbol{v}_1,\boldsymbol{v}_2,\boldsymbol{v}_3$ が W_1+W_2 の基底となり，$\dim(W_1+W_2)=3$ である．

（解答終）

例題 5.5. 次の $\mathbb{R}^4$ の 2 つの部分空間 W_1 と W_2 の和空間 W_1+W_2 の次元と基底を求めよ．

$$W_1=\left\langle \begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\2\\3\\4\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}3\\2\\1\\0\end{pmatrix} \right\rangle, \qquad W_2=\left\langle \begin{pmatrix}3\\3\\3\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\3\\4\\4\end{pmatrix} \right\rangle$$

（解答） 与えられたベクトルを

$$\boldsymbol{v}_1=\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{v}_2=\begin{pmatrix}1\\2\\3\\4\end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{v}_3=\begin{pmatrix}3\\2\\1\\0\end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{v}_4=\begin{pmatrix}3\\3\\3\\2\end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{v}_5=\begin{pmatrix}2\\3\\4\\4\end{pmatrix}$$

とおくと，$W_1+W_2=\langle \boldsymbol{v}_1,\boldsymbol{v}_2,\boldsymbol{v}_3,\boldsymbol{v}_4,\boldsymbol{v}_5\rangle$ である．

$\boldsymbol{v}_1,\boldsymbol{v}_2,\boldsymbol{v}_3,\boldsymbol{v}_4,\boldsymbol{v}_5$ の中から最大個数の 1 次独立な組を選べばよい．そこで，$x_j\in\mathbb{R}$ として

$$x_1\boldsymbol{v}_1+x_2\boldsymbol{v}_2+x_3\boldsymbol{v}_3+x_4\boldsymbol{v}_4+x_5\boldsymbol{v}_5=\boldsymbol{0} \quad \cdots (*)$$

とおく．これは

$$\begin{pmatrix}\boldsymbol{v}_1 & \boldsymbol{v}_2 & \boldsymbol{v}_3 & \boldsymbol{v}_4 & \boldsymbol{v}_5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\\x_5\end{pmatrix}=\boldsymbol{0}$$

と表せるから，係数行列を簡約階段行列に行基本変形すれば

$$\begin{pmatrix}1&1&3&3&2\\1&2&2&3&3\\1&3&1&3&4\\1&4&0&2&4\end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 1 列の掃き出し}]{\text{(1,1) 成分による}} \begin{pmatrix}1&1&3&3&2\\0&1&-1&0&1\\0&2&-2&0&2\\0&3&-3&-1&2\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[\text{第 2 列の掃き出し}]{\text{(2,2) 成分による}} \begin{pmatrix}1&0&4&3&1\\0&1&-1&0&1\\0&0&0&0&0\\0&0&0&-1&-1\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[\text{入れ替え}]{\text{第 3 行と第 4 行の}} \begin{pmatrix}1&0&4&3&1\\0&1&-1&0&1\\0&0&0&-1&-1\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[\text{第 4 列の掃き出し}]{\text{(3,4) 成分による}} \begin{pmatrix}1&0&4&0&-2\\0&1&-1&0&1\\0&0&0&-1&-1\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{\text{第 3 行を } (-1) \text{ 倍}} \begin{pmatrix}1&0&4&0&-2\\0&1&-1&0&1\\0&0&0&1&1\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}$$

となる．

よって，解は $x_3 = s,\ x_5 = t$ とおけば

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = s \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad (s, t \in \mathbb{R})$$

と表せる．よって，特に $s = 1,\ t = 0$ とすれば

$$-4\boldsymbol{v}_1 + \boldsymbol{v}_2 + \boldsymbol{v}_3 = \boldsymbol{0} \qquad \therefore\ \boldsymbol{v}_3 = 4\boldsymbol{v}_1 - \boldsymbol{v}_2$$

であり，また $s = 0,\ t = 1$ とすれば

$$2\boldsymbol{v}_1 - 2\boldsymbol{v}_2 - \boldsymbol{v}_4 + \boldsymbol{v}_5 = \boldsymbol{0} \qquad \therefore\ \boldsymbol{v}_5 = -2\boldsymbol{v}_1 + \boldsymbol{v}_2 + \boldsymbol{v}_4$$

となる．ゆえに，$W_1 + W_2 = \langle \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_4 \rangle$ が成り立つ．

次に，$\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_4$ が 1 次独立かどうか調べるために

$$x_1\boldsymbol{v}_1 + x_2\boldsymbol{v}_2 + x_4\boldsymbol{v}_4 = \boldsymbol{0} \quad \cdots\ (**)$$

とおくと，これは $(*)$ で $x_3 = x_5 = 0$ とした方程式である．したがって，$(*)$ の解のうち $x_3 = x_5 = 0$ であるような (x_1, x_2, x_4) が $(**)$ の解となる．ここで，$(*)$ の解で $x_3 = x_5 = 0$ となるのは $s = t = 0$ のときなので，このときには $x_1 = x_2 = x_4 = 0$ となる．したがって，$(**)$ は自明な解のみをもつから，$\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_4$ は 1 次独立である．以上より，$W_1 + W_2$ の基底は $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_4$ となり，$\dim(W_1 + W_2) = 3$ である．

（解答終）

例題 5.6.　次の $\mathbb{R}^4$ の 2 つの部分空間 W_1 と W_2 の和空間 W_1+W_2 の基底と次元を求めよ．

$$W_1 = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \;\middle|\; \begin{array}{l} x_1+2x_2+x_3=0 \\ x_1+x_2+x_3+x_4=0 \end{array} \right\}, \qquad W_2 = \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle$$

（解答）　まず W_1 を生成するベクトルを求める．W_1 は斉次連立 1 次方程式

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

の解空間である．係数行列を簡約階段行列に行基本変形すれば

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} &\xrightarrow[\text{第 1 列の掃き出し}]{\text{(1,1) 成分による}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &\xrightarrow[\text{第 2 列の掃き出し}]{\text{(2,2) 成分による}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &\xrightarrow{\text{第 2 行を } (-1) \text{ 倍}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

となるので，解は

$$\boldsymbol{x} = s \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad (s, t \in \mathbb{R})$$

と表せる．

よって，ベクトルを

$$\boldsymbol{v}_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{v}_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{v}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{v}_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

とおくと，$W_1 = \langle \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2 \rangle$ なので，$W_1 + W_2 = \langle \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3, \boldsymbol{v}_4 \rangle$ である．

$\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3, \boldsymbol{v}_4$ の中から最大個数の 1 次独立な組を選べばよい．そこで，$c_j \in \mathbb{R}$ として

$$c_1\boldsymbol{v}_1 + c_2\boldsymbol{v}_2 + c_3\boldsymbol{v}_3 + c_4\boldsymbol{v}_4 = \boldsymbol{0} \quad \cdots \ (*)$$

とおく．これは

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{v}_1 & \boldsymbol{v}_2 & \boldsymbol{v}_3 & \boldsymbol{v}_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \end{pmatrix} = \boldsymbol{0}$$

と表せるから，係数行列を簡約階段行列に行基本変形すれば

$$\begin{pmatrix} -1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 1 列の掃き出し}]{\text{(1,1) 成分による}} \begin{pmatrix} -1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[\text{第 2 列の掃き出し}]{\text{(2,2) 成分による}} \begin{pmatrix} -1 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[\text{第 3 列の掃き出し}]{\text{(3,3) 成分による}} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[\text{第 3 行を } (-1) \text{ 倍}]{\text{第 1 行を } (-1) \text{ 倍}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

より，解は

$$\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad (t \in \mathbb{R})$$

と表せる．よって，特に $t = 1$ とすれば

$$-2\boldsymbol{v}_1 + \boldsymbol{v}_2 + \boldsymbol{v}_3 + \boldsymbol{v}_4 = \boldsymbol{0} \qquad \therefore\ \boldsymbol{v}_4 = 2\boldsymbol{v}_1 - \boldsymbol{v}_2 - \boldsymbol{v}_3$$

が成り立つ．ゆえに，$W_1 + W_2 = \langle \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3 \rangle$ が成り立つ．

次に，$\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3$ が 1 次独立かどうか調べるために

$$c_1\boldsymbol{v}_1 + c_2\boldsymbol{v}_2 + c_3\boldsymbol{v}_3 = \boldsymbol{0} \quad \cdots\ (**)$$

とおくと，これは $(*)$ で $c_4 = 0$ とした方程式である．したがって，$(*)$ の解のうち $c_4 = 0$ であるような (c_1, c_2, c_3) が $(**)$ の解となる．ここで，$(*)$ の解で $c_4 = 0$ となるのは $t = 0$ のときなので，このときには $c_1 = c_2 = c_3 = 0$ となる．したがって，$(**)$ は自明な解のみをもつから，$\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3$ は 1 次独立である．以上より，$\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3$ が $W_1 + W_2$ の基底となり，$\dim(W_1 + W_2) = 3$ である．

（解答終）

例題 5.7. 次の $\mathbb{R}^4$ の 2 個の部分空間 W_1 と W_2 に対して，共通部分 $W_1 \cap W_2$ の次元と基底を求めよ．

$$W_1 = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \middle| \begin{array}{l} x_1 - x_2 + x_3 + x_4 = 0 \\ 2x_1 + x_2 + 5x_3 - x_4 = 0 \end{array} \right\}, \qquad W_2 = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \middle| \begin{array}{l} 2x_1 - 2x_2 + 3x_3 + x_4 = 0 \\ x_1 + 2x_2 - 2x_3 + 4x_4 = 0 \end{array} \right\}$$

（解答）　W_1 を定める方程式と W_2 を定める方程式を合わせれば

$$W_1 \cap W_2 = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \middle| \begin{array}{l} x_1 - x_2 + x_3 + x_4 = 0 \\ 2x_1 + x_2 + 5x_3 - x_4 = 0 \\ 2x_1 - 2x_2 + 3x_3 + x_4 = 0 \\ x_1 + 2x_2 - 2x_3 + 4x_4 = 0 \end{array} \right\}$$

となる．よって，$W_1 \cap W_2$ は次の斉次連立 1 次方程式

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 5 & -1 \\ 2 & -2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & -2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

の解空間である．

そこで，この解を求めるために係数行列を簡約階段行列に行基本変形すれば

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 5 & -1 \\ 2 & -2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & -2 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 1 列の掃き出し}]{\text{(1,1) 成分による}} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & -3 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{\text{第 2 行を 1/3 倍}} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & -3 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[\text{第 2 列の掃き出し}]{\text{(2,2) 成分による}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -6 & 6 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 3 列の掃き出し}]{\text{(3,3) 成分による}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

となる．よって，解は

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad (t \in \mathbb{R})$$

と表せるので，$\begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ が $W_1 \cap W_2$ の基底となる．ゆえに，$\dim(W_1 \cap W_2) = 1$ である．

（解答終）

定理 5.8. （次元公式）
W_1 と W_2 を V の有限次元部分空間とするとき，次元に関する次の等式が成り立つ．

$$\dim(W_1+W_2)=\dim W_1+\dim W_2-\dim(W_1\cap W_2)$$

証明. $W_1\cap W_2$ の基底を $\boldsymbol{x}_1,\dots,\boldsymbol{x}_n$ とし，これを延長して

- W_1 の基底 $\boldsymbol{x}_1,\dots,\boldsymbol{x}_n,\boldsymbol{y}_1,\dots,\boldsymbol{y}_k$
- W_2 の基底 $\boldsymbol{x}_1,\dots,\boldsymbol{x}_n,\boldsymbol{z}_1,\dots,\boldsymbol{z}_l$

をとる．このとき，$\boldsymbol{x}_1,\dots,\boldsymbol{x}_n,\boldsymbol{y}_1,\dots,\boldsymbol{y}_k,\boldsymbol{z}_1,\dots,\boldsymbol{z}_l$ が W_1+W_2 の基底になることを示す．

基底を選んだので $W_1=\langle\boldsymbol{x}_1,\cdots,\boldsymbol{x}_n,\boldsymbol{y}_1,\cdots,\boldsymbol{y}_k\rangle$, $W_2=\langle\boldsymbol{x}_1,\cdots,\boldsymbol{x}_n,\boldsymbol{z}_1,\cdots,\boldsymbol{z}_l\rangle$ であるから

$$W_1+W_2=\langle\boldsymbol{x}_1,\cdots,\boldsymbol{x}_n,\boldsymbol{y}_1,\cdots,\boldsymbol{y}_k,\boldsymbol{z}_1,\cdots,\boldsymbol{z}_l\rangle$$

となり，W_1+W_2 は $\boldsymbol{x}_1,\dots,\boldsymbol{x}_n,\boldsymbol{y}_1,\dots,\boldsymbol{y}_k,\boldsymbol{z}_1,\dots,\boldsymbol{z}_l$ で生成される．

$\boldsymbol{x}_1,\dots,\boldsymbol{x}_n,\boldsymbol{y}_1,\dots,\boldsymbol{y}_k,\boldsymbol{z}_1,\dots,\boldsymbol{z}_l$ が 1 次独立であることを示すため，$a_i,b_i,c_i\in\mathbb{K}$ に対して

$$a_1\boldsymbol{x}_1+\cdots+a_n\boldsymbol{x}_n+b_1\boldsymbol{y}_1+\cdots+b_k\boldsymbol{y}_k+c_1\boldsymbol{z}_1+\cdots+c_l\boldsymbol{z}_l=\boldsymbol{0}\quad\cdots\ (*)$$

とおく．このとき，後半を移項すると

$$a_1\boldsymbol{x}_1+\cdots+a_n\boldsymbol{x}_n+b_1\boldsymbol{y}_1+\cdots+b_k\boldsymbol{y}_k=-c_1\boldsymbol{z}_1-\cdots-c_l\boldsymbol{z}_l$$

となる．ここで，左辺は W_1 のベクトル，右辺は W_2 のベクトルなので，両辺とも $W_1\cap W_2$ のベクトルである．よって，$\boldsymbol{x}_1,\dots,\boldsymbol{x}_n$ が $W_1\cap W_2$ の基底であることより

$$-c_1\boldsymbol{z}_1-\cdots-c_l\boldsymbol{z}_l=d_1\boldsymbol{x}_1+\cdots+d_n\boldsymbol{x}_n\qquad(d_i\in\mathbb{K})$$

と表せる．さらに，$\boldsymbol{x}_1,\dots,\boldsymbol{x}_n,\boldsymbol{z}_1,\dots,\boldsymbol{z}_l$ は W_2 の基底なので 1 次独立だから，この式より

$$c_1=\cdots=c_l=d_1=\cdots=d_n=0$$

が成り立つ．これを $(*)$ に代入すると

$$a_1\boldsymbol{x}_1+\cdots+a_n\boldsymbol{x}_n+b_1\boldsymbol{y}_1+\cdots+b_k\boldsymbol{y}_k=\boldsymbol{0}$$

となり，$\boldsymbol{x}_1,\dots,\boldsymbol{x}_n,\boldsymbol{y}_1,\dots,\boldsymbol{y}_k$ は W_1 の基底なので 1 次独立だから，この式より

$$a_1=\cdots=a_n=b_1=\cdots=b_k=0$$

が得られる．ゆえに，$(*)$ は自明な関係式に限るから，$\boldsymbol{x}_1,\dots,\boldsymbol{x}_n,\boldsymbol{y}_1,\dots,\boldsymbol{y}_k,\boldsymbol{z}_1,\dots,\boldsymbol{z}_l$ は 1 次独立である．

したがって，$\boldsymbol{x}_1,\dots,\boldsymbol{x}_n,\boldsymbol{y}_1,\dots,\boldsymbol{y}_k,\boldsymbol{z}_1,\dots,\boldsymbol{z}_l$ は W_1+W_2 の基底であるから

$$\dim(W_1+W_2)=n+k+l$$

である．一方

$$\dim W_1+\dim W_2-\dim(W_1\cap W_2)=(n+k)+(n+l)-n=n+k+l$$

だから，求める等式が成り立つことが示された．□

例題 5.9. W_1 と W_2 を V の異なる部分空間とし，$\dim V = n$ とするとき，次が成り立つことを示せ．

(1) $\dim W_1 + \dim W_2 > n$ ならば，$W_1 \cap W_2 \neq \{\mathbf{0}\}$

(2) $\dim W_1 = \dim W_2 = n-1$ ならば，$\dim(W_1 \cap W_2) = n-2$

（解答）

(1) W_1 と W_2 は V の部分空間であるから，$W_1 + W_2 \subset V$ であり

$$\dim(W_1 + W_2) \leqq \dim V = n$$

である．よって

$$n < \dim W_1 + \dim W_2 = \dim(W_1 + W_2) + \dim(W_1 \cap W_2) \leqq n + \dim(W_1 \cap W_2)$$

より，$\dim(W_1 \cap W_2) > 0$ が成り立つ．ゆえに，$W_1 \cap W_2 \neq \{\mathbf{0}\}$ となる．

(2) $W_1 \neq W_2$ より，W_1 に属さないが W_2 に属する零でないベクトル $\boldsymbol{v}$ が存在する．よって

$$W_1 \subsetneqq W_1 + W_2 \subset V$$

となるので

$$n-1 = \dim W_1 < \dim(W_1 + W_2) \leqq \dim V = n$$

より，$\dim(W_1 + W_2) = n$ が成り立つ（つまり，$V = W_1 + W_2$ である）．よって

$$\dim(W_1 \cap W_2) = \dim W_1 + \dim W_2 - \dim(W_1 + W_2) = (n-1) + (n-1) - n = n-2$$

である．

（解答終）

また，部分空間に関する次元公式

$$\dim(W_1 + W_2) = \dim W_1 + \dim W_2 - \dim(W_1 \cap W_2)$$

から

$$\dim(W_1 + W_2) = \dim W_1 + \dim W_2 \quad \Longleftrightarrow \quad \dim(W_1 \cap W_2) = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad W_1 \cap W_2 = \{\mathbf{0}\}$$

が成り立つことがわかる．

5.2 部分空間の直和

$\mathbb{K}$ 上のベクトル空間 V が与えられたときに，それらを構造が簡単な部分空間の和に分解することを考える．ただし，自由に分解してもよい結果は得られない．

例えば，$\mathbb{R}^3$ の部分空間 W_1 と W_2 を

$$W_1 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \middle| \, z = 0 \right\}, \qquad W_2 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \middle| \, x = 0 \right\}$$

で定めると，任意のベクトル $\boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^3$ は

$$\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ z \end{pmatrix} \in W_1 + W_2$$

と表せるので，$\mathbb{R}^3 = W_1 + W_2$ が成り立つ．しかし，W_1 と W_2 のベクトルの和で表す方法は一意的ではない．実際

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \cdots$$

と何通りもの表し方があるので，W_1 と W_2 のベクトルの和で表しても “成分比較” ができないため，分解する利点はほとんどない．この原因は

$$W_1 \cap W_2 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \middle| \, x = z = 0 \right\} \neq \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

となっていることである．つまり，xy 平面である W_1 と yz 平面である W_2 の共通部分が y 軸であり，そのため y 成分で分解に 1 次元分の不定性が現れてしまうのである．

先に述べたように構造が簡単な部分空間に分解して成分比較などを行いたいので，分解に一意性がなければ効果的ではない．そのために次の “部分空間の直和” という概念が必要になる．

定義 5.10. （直和）
W_1 と W_2 を V の部分空間とする．V が W_1 と W_2 の**直和**であるとは，任意の $\boldsymbol{v} \in V$ に対して，ある $\boldsymbol{v}_1 \in W_1$，$\boldsymbol{v}_2 \in W_2$ が一意に存在して

$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}_1 + \boldsymbol{v}_2$$

と表せることである．このとき，$V = W_1 \oplus W_2$ と表す．

$V = W_1 \oplus W_2$ ならば，その定義より $V = W_1 + W_2$ となる．よって，直和は和空間の特別な場合である．一般に，直和であることを定義から直接示すのは困難なので，普段は次に述べる判定条件を用いる．

命題 5.11. （直和であるための必要十分条件）
W_1 と W_2 を有限次元ベクトル空間 V の部分空間とするとき，次の条件は全て同値である．

(1) $V = W_1 \oplus W_2$

(2) $\boldsymbol{w}_1, \dots, \boldsymbol{w}_k$ を W_1 の基底，$\boldsymbol{w}_{k+1}, \dots, \boldsymbol{w}_{k+l}$ を W_2 の基底とすると，$\boldsymbol{w}_1, \dots, \boldsymbol{w}_{k+l}$ は V の基底である．

(3) $V = W_1 + W_2$ かつ $\dim V = \dim W_1 + \dim W_2$

(4) $V = W_1 + W_2$ かつ $W_1 \cap W_2 = \{\boldsymbol{0}\}$

証明.

(1) $\Rightarrow$ (2)　$V = W_1 \oplus W_2$ であるとする．このとき

$$V = W_1 + W_2 = \langle \boldsymbol{w}_1, \cdots, \boldsymbol{w}_k \rangle + \langle \boldsymbol{w}_{k+1}, \cdots, \boldsymbol{w}_{k+l} \rangle = \langle \boldsymbol{w}_1, \cdots, \boldsymbol{w}_{k+l} \rangle$$

であるから，$\boldsymbol{w}_1, \dots, \boldsymbol{w}_{k+l}$ は V を生成する．

次に，$\boldsymbol{w}_1, \dots, \boldsymbol{w}_{k+l}$ が 1 次独立であることを示すために，$c_j \in \mathbb{K}$ として

$$c_1 \boldsymbol{w}_1 + \cdots + c_k \boldsymbol{w}_k + c_{k+1} \boldsymbol{w}_{k+1} + \cdots + c_{k+l} \boldsymbol{w}_{k+l} = \boldsymbol{0}$$

とおく．これは

$$(c_1 \boldsymbol{w}_1 + \cdots + c_k \boldsymbol{w}_k) + (c_{k+1} \boldsymbol{w}_{k+1} + \cdots + c_{k+l} \boldsymbol{w}_{k+l}) = \boldsymbol{0} + \boldsymbol{0}$$

と見れば，1 つのベクトルの W_1 のベクトルと W_2 のベクトルの和で表す 2 通りの方法を与えているが，$V = W_1 \oplus W_2$ よりこのような表示は一意的である．よって

$$c_1 \boldsymbol{w}_1 + \cdots + c_k \boldsymbol{w}_k = \boldsymbol{0} \in W_1, \qquad c_{k+1} \boldsymbol{w}_{k+1} + \cdots + c_{k+l} \boldsymbol{w}_{k+l} = \boldsymbol{0} \in W_2$$

が成り立つ．さらに，$\boldsymbol{w}_1, \dots, \boldsymbol{w}_k$ は W_1 の基底なので $c_1 = \cdots = c_k = 0$，$\boldsymbol{w}_{k+1}, \dots, \boldsymbol{w}_{k+l}$ は W_2 の基底なので $c_{k+1} = \cdots = c_{k+l} = 0$ となる．ゆえに $c_j = 0$ $(j = 1, \dots, k+l)$ となり自明な解しかもたないので $\boldsymbol{w}_1, \dots, \boldsymbol{w}_{k+l}$ は 1 次独立である．したがって，$\boldsymbol{w}_1, \dots, \boldsymbol{w}_{k+l}$ は V の基底となる．

(2) $\Rightarrow$ (3)　基底の選び方より $V = W_1 + W_2$ であり，$\dim V = k + l = \dim W_1 + \dim W_2$ である．

(3) $\Leftrightarrow$ (4)　部分空間に関する次元公式より

$$W_1 \cap W_2 = \{\boldsymbol{0}\} \quad \Longleftrightarrow \quad \dim V = \dim W_1 + \dim W_2$$

(4) $\Rightarrow$ (1)　まず，$V = W_1 + W_2$ であるから，任意の $\boldsymbol{v} \in V$ に対して

$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{w}_1 + \boldsymbol{w}_2 \qquad (\boldsymbol{w}_i \in W_i)$$

と表せる．この表示が一意的であることを示せばよい．そこで

$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{w}_1 + \boldsymbol{w}_2 = \boldsymbol{w}_1' + \boldsymbol{w}_2' \qquad (\boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{w}_1' \in W_1,\ \boldsymbol{w}_2, \boldsymbol{w}_2' \in W_2)$$

と 2 通りで表せたとする．そうすれば

$$\boldsymbol{w}_1 - \boldsymbol{w}_1' = \boldsymbol{w}_2' - \boldsymbol{w}_2$$

となり，左辺は W_1 のベクトル，右辺は W_2 のベクトルであるので，両辺とも $W_1 \cap W_2$ のベクトルとなる．ここで，$W_1 \cap W_2 = \{\boldsymbol{0}\}$ であったから，$\boldsymbol{w}_1 - \boldsymbol{w}_1' = \boldsymbol{w}_2' - \boldsymbol{w}_2 = \boldsymbol{0}$ となり

$$\boldsymbol{w}_1 = \boldsymbol{w}_1', \qquad \boldsymbol{w}_2 = \boldsymbol{w}_2'$$

が得られるので，上の形の表示は一意的であることがわかる．

□

実際に具体的な問題で $V = W_1 \oplus W_2$ であることを示すには，定理 5.11(4) の条件

$$V = W_1 + W_2, \qquad W_1 \cap W_2 = \{\mathbf{0}\}$$

を用いるのが簡単なことが多い．なお，V が有限次元でない場合には基底を用いて議論するのは難しく，次元を用いて議論するのは不可能なので，やはり (4) の条件を確認することになる．

ここで，V の部分空間 W_1 と W_2 に対して，常に $\mathbf{0} \in W_1$ かつ $\mathbf{0} \in W_2$ であるから

$$V \supset W_1 + W_2, \qquad W_1 \cap W_2 \supset \{\mathbf{0}\}$$

は必ず成り立つ．よって，実際には

$$V \subset W_1 + W_2, \qquad W_1 \cap W_2 \subset \{\mathbf{0}\}$$

であることを示せば十分である．

例 5.12. （直和の例）

座標平面・空間における直和の例を挙げておくので，各自で証明を試みてみよ．

(1) $\mathbb{R}^2$ において，W_1 と W_2 を原点を通る相異なる直線とすれば，$\mathbb{R}^2 = W_1 \oplus W_2$ である．

(2) $\mathbb{R}^3$ において，W_1 を原点を通る平面とし，W_2 を原点を通り W_1 に含まれない直線とすれば，$\mathbb{R}^3 = W_1 \oplus W_2$ である．

例題 5.13. 　$\mathbb{R}^3$ の部分空間

$$V = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \middle| \, x - y + z = 0 \right\}$$

$$W_1 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \middle| \, x - y = 0,\ z = 0 \right\}, \qquad W_2 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \middle| \, x = 0,\ y - z = 0 \right\}$$

に対して，$V = W_1 \oplus W_2$ が成り立つことを示せ．

（解答）　任意の $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in W_1 \cap W_2$ に対して，$x - y = z = 0$ かつ $x = y - z = 0$ より，$x = y = z = 0$ となる．よって，$W_1 \cap W_2 = \{\mathbf{0}\}$ が成り立つ．

また，平面 V は $s, t \in \mathbb{R}$ を用いて

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = s \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

とベクトル方程式で表せて

$$s \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \in W_1, \qquad t \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \in W_2$$

であるから，V の任意のベクトルは W_1 のベクトルと W_2 のベクトルの和で表せる．ゆえに，$V = W_1 + W_2$ である．

したがって，定理 5.11 より $V = W_1 \oplus W_2$ が成り立つ．

（解答終）

この例題では $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ が W_1 の基底，$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ が W_2 の基底であり，さらに $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ が V の基底であることを示してもよい．

例題 5.14. 実ベクトル空間 $M_n(\mathbb{R})$ の部分集合を

$$W_1 = \{\, A \in M_n(\mathbb{R}) \mid A \text{ は対称行列}\,\}, \qquad W_2 = \{\, A \in M_n(\mathbb{R}) \mid A \text{ は交代行列}\,\}$$

とおく．

(1) W_1 と W_2 は $M_n(\mathbb{R})$ の部分空間であることを示せ．

(2) $M_n(\mathbb{R}) = W_1 \oplus W_2$ が成り立つことを示せ．

（解答）

(1) 例題 2.15 で既に証明したので各自復習せよ．

(2) 任意の $A \in W_1 \cap W_2$ に対して，$A \in W_1$ より ${}^t\!A = A$ であり，かつ $A \in W_2$ より ${}^t\!A = -A$ である．よって，$A = {}^t\!A = -A$ となり $A = O$ であるから，$W_1 \cap W_2 = \{O\}$ が成り立つ．

また，任意の $A \in M_n(\mathbb{R})$ に対して

$$A = \frac{A + {}^t\!A}{2} + \frac{A - {}^t\!A}{2}$$

と表せて，さらに

$$\frac{A + {}^t\!A}{2} \in W_1 \qquad \frac{A - {}^t\!A}{2} \in W_2$$

となっている．なぜならば

$$ {}^t\!\left(\frac{A + {}^t\!A}{2}\right) = \frac{{}^t\!A + {}^t({}^t\!A)}{2} = \frac{{}^t\!A + A}{2} = \frac{A + {}^t\!A}{2}$$

$$ {}^t\!\left(\frac{A - {}^t\!A}{2}\right) = \frac{{}^t\!A - {}^t({}^t\!A)}{2} = \frac{{}^t\!A - A}{2} = -\frac{A - {}^t\!A}{2}$$

となるからである．ゆえに，$A \in W_1 + W_2$ より，$M_n(\mathbb{R}) = W_1 + W_2$ となる．

したがって，$M_n(\mathbb{R}) = W_1 \oplus W_2$ が成り立つ．

（解答終）

このような証明法は有名であるが，$A = \dfrac{A + {}^t\!A}{2} + \dfrac{A - {}^t\!A}{2}$ と変形する部分は非常に技巧的であり，初めて見る人にとっては難しいと考えられる．ただ，直和の証明では典型的な変形なので，このような方法に慣れておくことは大切である．もしこの変形に気付かなくても，$A \in M_n(\mathbb{R})$ が

$$A = B + C, \qquad B \in W_1, \qquad C \in W_2$$

と表せたとすると

$${}^t\!A = {}^t(B + C) = {}^t\!B + {}^t\!C = B + (-C) = B - C$$

であるから

$$B = \frac{A + {}^t\!A}{2}, \qquad C = \frac{A - {}^t\!A}{2}$$

となることがわかる．これより，直和の分解方法に見当はつくが，上の解答のようにこの表示が一意的であることは示さなければならない．

例題 5.15. 　閉区間 $[-1,1]$ 上の実数値連続関数全体の集合を $V = C([-1,1])$ とおくと，これは実ベクトル空間となる．また，V の部分集合を

$$W_1 = \left\{ f \in V \;\middle|\; \int_{-1}^{1} f(x)\,dx = 0 \right\}, \qquad W_2 = \{\, f \in V \mid f \text{ は定数関数} \,\}$$

とおく．

(1) W_1 と W_2 は V の部分空間であることを示せ．

(2) $V = W_1 \oplus W_2$ が成り立つことを示せ．

（解答）

(1) 　定数関数 0 について $0 \in W_1$ は明らかなので，$W_1 \neq \emptyset$ である．また，任意の $f, g \in W_1$ と $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ に対して

$$\int_{-1}^{1} \{\alpha f(x) + \beta g(x)\}\,dx = \alpha \int_{-1}^{1} f(x)\,dx + \beta \int_{-1}^{1} g(x)\,dx = \alpha \cdot 0 + \beta \cdot 0 = 0$$

より，$\alpha f + \beta g \in W_1$ である．よって，W_1 は V の部分空間である．

定数関数 0 について $0 \in W_2$ なので，$W_2 \neq \emptyset$ である．また，任意の $f, g \in W_2$ と $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ に対して，$f(x)$ と $g(x)$ が定数関数ならば $\alpha f(x) + \beta g(x)$ も定数関数であるから，$\alpha f + \beta g \in W_2$ である．よって，W_2 は V の部分空間である．

(2) 　任意の $f \in W_1 \cap W_2$ に対して，$f \in W_2$ より $f(x) \equiv c$（定数関数）であり，$f \in W_1$ より

$$\int_{-1}^{1} f(x)\,dx = \int_{-1}^{1} c\,dx = 2c = 0$$

となる．よって，$c = 0$ より $f(x) \equiv 0$ となるから，$f = 0$ である．ゆえに，$W_1 \cap W_2 = \{0\}$ が成り立つ．

次に，$f \in V$ が $f(x) = g(x) + c \ \ (g \in W_1,\ c \in W_2)$ と表せるとすると

$$\int_{-1}^{1} f(x)\,dx = \int_{-1}^{1} g(x)\,dx + \int_{-1}^{1} c\,dx = 0 + 2c = 2c$$

より，$c = \dfrac{1}{2} \displaystyle\int_{-1}^{1} f(x)\,dx$ となるしかない．

そこで，任意の $f \in V$ に対して，定数 $c_f \in \mathbb{R}$ を $c_f = \dfrac{1}{2} \displaystyle\int_{-1}^{1} f(x)\,dx$ により定める．このとき

$$\int_{-1}^{1} \{f(x) - c_f\}\,dx = \int_{-1}^{1} f(x)\,dx - 2c_f = 0$$

であるから，$f - c_f \in W_1$ となる．よって

$$f = (f - c_f) + c_f \in W_1 + W_2$$

と表せるので，$V = W_1 + W_2$ である．

したがって，$V = W_1 \oplus W_2$ が成り立つ．

（解答終）

この証明のように，$V = W_1 + W_2$ を示す際に，とりあえず分解して表せると仮定して候補を探すというのは基本的な手法である．

5.3　3 個以上の部分空間の直和の定義とその特徴づけ

これまでは 2 個の部分空間の直和を考えてきたが，ここでは 3 個以上の部分空間の直和について触れておく．定義や同値条件を間違えやすいので注意すること．

定義 5.16. （直和）
$W_1, W_2, \ldots, W_k$ を V の部分空間とする．任意の $\boldsymbol{v} \in V$ が

$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}_1 + \boldsymbol{v}_2 + \cdots + \boldsymbol{v}_k \qquad (\boldsymbol{v}_j \in W_j,\ j = 1, 2, \ldots, k)$$

の形に一意的に表せるとき，V は $W_1, W_2, \ldots, W_k$ の**直和**であるといい

$$V = W_1 \oplus W_2 \oplus \cdots \oplus W_k$$

で表す．

前に述べた $k = 2$ のときの定理 5.11 のような同値条件は，$k \geqq 3$ のときは次のようになる．

命題 5.17. （直和であるための必要十分条件）
$W_1, W_2, \cdots, W_k$ $(k \geqq 3)$ を V の部分空間とするとき，次の条件は同値になる．

(1) $V = W_1 \oplus W_2 \oplus \cdots \oplus W_k$

(2) $j = 1, \ldots, k$ に対して $\boldsymbol{w}_1^{(j)}, \ldots, \boldsymbol{w}_{s_j}^{(j)}$ を W_j の基底とすると，$\{\boldsymbol{w}_p^{(j)}\}_{p=1,2,\ldots,s_j}^{j=1,2,\ldots,k}$ は V の基底である．

(3) $V = W_1 + W_2 + \cdots + W_k$ かつ $\dim V = \dim W_1 + \dim W_2 + \cdots + \dim W_k$

(4) $V = W_1 + W_2 + \cdots + W_k$ かつ $(W_1 + \cdots + W_j) \cap W_{j+1} = \{\boldsymbol{0}\}$　$(j = 1, 2 \ldots, k-1)$

証明は $k = 2$ の場合と同様なので省略する．ここで必要十分条件のうちの (4) は

$$W_i \cap W_j = \{\boldsymbol{0}\} \qquad (i \neq j)$$

ではないことに注意すること．すべての 2 個どうしの組を考えても直和とはいえない．

例 5.18.　$\mathbb{R}^2$ の部分空間 W_1, W_2, W_3 を次で定める．

$$W_1 = \left\{ \begin{pmatrix} a \\ 0 \end{pmatrix} \middle| \, a \in \mathbb{R} \right\}, \qquad W_2 = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ a \end{pmatrix} \middle| \, a \in \mathbb{R} \right\}, \qquad W_3 = \left\{ \begin{pmatrix} a \\ a \end{pmatrix} \middle| \, a \in \mathbb{R} \right\}$$

このとき

$$\mathbb{R}^2 = W_1 + W_2 + W_3 \qquad \text{かつ} \qquad W_j \cap W_k = \{\boldsymbol{0}\} \quad (j \neq k)$$

である．しかし，もちろん $\mathbb{R}^2 = W_1 \oplus W_2$ であるから，$\mathbb{R}^2 = W_1 \oplus W_2 \oplus W_3$ とはならない．あるいは，次元についてみても $\mathbb{R}^2 = W_1 \oplus W_2 \oplus W_3$ でないことがわかる．

例 5.19.　$\mathbb{R}^3$ の部分空間を

$$W_1 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \middle| \, x \in \mathbb{R} \right\}, \qquad W_2 = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ y \\ 0 \end{pmatrix} \middle| \, y \in \mathbb{R} \right\}, \qquad W_3 = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ z \end{pmatrix} \middle| \, z \in \mathbb{R} \right\}$$

で定めると，$\mathbb{R}^3 = W_1 \oplus W_2 \oplus W_3$ が成り立つ．各自で確かめてみよ．直感的な理解のみでなく，定理 5.17 の 4 条件を直接確かめてみること．

第9章　線形写像

1　写像

中学および高校数学では $f(x)=x^2+2x$ のような関数について学習した．関数とは，定義域の実数を1つ代入すると，1つの実数が出てくるものであった．

この概念を一般化し，定義域を一般の集合とした写像という概念を導入する．これにより，定義域として数列の集合や行列の集合，関数の集合などを選ぶことができ，多様な理論が展開され様々な分野への線形代数学の応用が可能となる．

定義 1.1.（写像）
X と Y を空でない集合とする．
集合 X の要素 x に対して，集合 Y の要素 $f(x)$ がただ1つ定まるとき，f を X から Y への写像であるという．このとき，X を f の定義域，$f(x)$ を f による x の像とよぶ．また，f が集合 X から Y への写像であることを $f\colon X\longrightarrow Y$ と表す．

例 1.2.（写像の例）

(1) $f(x)=x^2,\ f(x)=e^x,\ f(x)=\sin x$ は $\mathbb{R}$ から $\mathbb{R}$ への写像であるから，$f\colon\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ と書ける．

(2) $f(x)=\log x$ は正の実数全体の集合 $\mathbb{R}^+=(0,\infty)$ から実数 $\mathbb{R}$ への写像であるから，$f\colon\mathbb{R}^+\longrightarrow\mathbb{R}$ と書ける．

(3) 円 $x^2+y^2=1$ 上の点に対し，x を決めてそれに対応する y を対応させるものは

$$y=\pm\sqrt{1-x^2}$$

より $-1<x<1$ ならば y は2個対応する．よって，これは写像ではない．

(4) 実数を成分にもつ 2×2 行列全体のなす集合を $M_2(\mathbb{R})$ とおく．

$$f\left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\right)=ad-bc$$

は $M_2(\mathbb{R})$ から $\mathbb{R}$ への写像であるから，$f\colon M_2(\mathbb{R})\longrightarrow\mathbb{R}$ と表せる．

(5) $X=\{\,1,2,3\,\},\ Y=\{\,7,8,9\,\}$ として

$$f(1)=f(2)=7,\qquad f(3)=8$$

とすれば，$f\colon X\longrightarrow Y$ は写像である．このように，写像は必ずしも数式で表されなくてもよい．定義域 X の要素に対し Y のただ1つの要素を対応させるものだから，この例のように具体的に定義域のすべての要素の像を指定してもよい．

(6) 実数全体で定義された無限回微分可能な関数 $f(x)$ 全体のなす集合を $C^\infty(\mathbb{R})$ とおく．

$$D(f)=\frac{df}{dx}$$

は $C^\infty(\mathbb{R})$ から $C^\infty(\mathbb{R})$ への写像であるから，$D\colon C^\infty(\mathbb{R})\longrightarrow C^\infty(\mathbb{R})$ と表せる．

2 つの写像があると，連続して要素を移すものとして次の合成写像が定義できることがある．関数の場合には合成関数と呼ばれているものであり，同様の記号を用いて表される．

定義 1.3. （合成写像）
写像 $f\colon X \longrightarrow Y$ と $g\colon Y \longrightarrow Z$ に対して，写像 $g \circ f\colon X \longrightarrow Z$ を

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) \qquad (x \in X)$$

と定義し，$g \circ f$ を f と g の**合成写像**という．

注意 1.4. 上の定義で合成写像を作ることができるためには，$x \in X$ に対して $f(x) \in Y$ となることが必要である．実際，そうでなければ $f(x)$ という要素を g に代入できない．合成写像 $g \circ f$ を考える場合には，前提として f による像が g の定義域に含まれていることを確認すること．

例 1.5. 写像の合成について，一般に

$$g \circ f \fallingdotseq f \circ g$$

となる．これは代入する順番を入れ替えたら異なる結果になるという意味で当たり前のことである．
例えば，$\mathbb{R}$ から $\mathbb{R}$ への写像として

$$f(x) = \sin x, \qquad g(x) = x^2 + x$$

とおくと

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(\sin x) = \sin^2 x + \sin x$$

であり

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(x^2 + x) = \sin(x^2 + x)$$

となる．よって，$g \circ f \fallingdotseq f \circ g$ である．

定理 1.6. 3 つの写像 $f\colon X \longrightarrow Y,\ g\colon Y \longrightarrow Z,\ g\colon Z \longrightarrow W$ があるとき，合成写像について

$$h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$$

が成り立つ．

証明. 任意の $x \in X$ に対して，合成写像の定義より

$$\bigl(h \circ (g \circ f)\bigr)(x) = h\bigl((g \circ f)(x)\bigr) = h\bigl(g(f(x))\bigr)$$
$$\bigl((h \circ g) \circ f\bigr)(x) = (h \circ g)(f(x)) = h\bigl(g(f(x))\bigr)$$

となるから

$$\bigl(h \circ (g \circ f)\bigr)(x) = \bigl((h \circ g) \circ f\bigr)(x)$$

が成り立つ．ここで，$x \in X$ は任意だったので，写像として

$$h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$$

である． □

この定理より，3 つの写像から合成写像を作るときには，右から順に合成しても，左から順に合成しても同じ結果となる．そこで，$h \circ (g \circ f)$ はかっこを省略して

$$h \circ g \circ f$$

と書き，計算しやすい方から計算するのが普通である．

定義 1.7.（単射，全射）
$f\colon X \longrightarrow Y$ を写像とする．

(1) 任意の $x, x' \in X$ に対して，$x \neq x'$ ならば $f(x) \neq f(x')$ が成り立つとき，f は**単射**（**1 対 1 写像**）であるという．

(2) 任意の $y \in Y$ に対して，$f(x) = y$ となる $x \in X$ があるとき，f は**全射**（**上への写像**）であるという．

(3) 写像 $f\colon X \longrightarrow Y$ が全射かつ単射であるとき，**全単射**であるという．

f が単射であることを示すには，命題の対偶である

$$f(x) = f(x') \quad \Longrightarrow \quad x = x'$$

が成り立つことを示す方が一般には簡単である．また，f が全射であることは $Y = \{f(x) \mid x \in X\}$ となることと同値である．この右辺の集合を X の f による**像**といい，$f(X) = \{\, f(x) \mid x \in X \,\}$ で表す．

例 1.8.（単射性と全射性）

(1) 写像 $f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ を $f(x) = 2x + 3$ で定めると，これは全単射である．

(2) 写像 $f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ を $f(x) = x^2$ で定めると，これは全射でも単射でもない．

(3) 写像 f_1 と f_2 を

$$f_1\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad f_1(x) = e^x, \qquad\qquad f_2\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^+, \quad f_2(x) = e^x$$

で定めると，f_1 は単射であるが全射ではない．f_2 は全単射である．

(4) 写像 f_1, f_2, f_3, f_4 を

$$\begin{aligned}
&f_1\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, && f_1(x) = \sin x \\
&f_2\colon \mathbb{R} \longrightarrow [-1, 1], && f_2(x) = \sin x \\
&f_3\colon \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \longrightarrow \mathbb{R}, && f_3(x) = \sin x \\
&f_4\colon \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \longrightarrow [-1, 1], && f_4(x) = \sin x
\end{aligned}$$

で定めると，f_1 は全射でも単射でもない．f_2 は全射であるが単射ではない．f_3 は単射であるが全射ではない．f_4 は全単射である．

このようにどこからどこへの写像であるかということが，写像の性質に大きくかかわってくる．

定義 1.9.（恒等写像）
X を空でない集合とする．このとき

$$\mathrm{id}_X(x) = x \qquad (x \in X)$$

とおくと，$\mathrm{id}_X\colon X \longrightarrow X$ は写像となる．これは X の**恒等写像**と呼ばれる．

定義より恒等写像はすべての要素を動かさないので全単射である．また，任意の写像 $f\colon X \longrightarrow Y$ に対して

$$f \circ \mathrm{id}_X = f, \qquad \mathrm{id}_Y \circ f = f$$

が成り立つ（つまり，合成しても変わらない）．各自確かめてみよ．

定義 1.10.（逆写像）
$f\colon X \longrightarrow Y$ が全単射であるとき，$y \in Y$ に対して $f(x) = y$ となる $x \in X$ を対応させて $f^{-1}(y) = x$ と定義することにより，写像 $f^{-1}\colon Y \longrightarrow X$ が定まる．この f^{-1} を f の**逆写像**という．

注意 1.11. $f\colon X \longrightarrow Y$ を全単射とし，その逆写像を $f^{-1}\colon Y \longrightarrow X$ とおくとき

$$f^{-1} \circ f = \mathrm{id}_X, \qquad f \circ f^{-1} = \mathrm{id}_Y, \qquad (f^{-1})^{-1} = f$$

が成り立つ．逆写像の定義から明らかであるが，各自で確認しておくこと．

例 1.12.（逆写像の例）
写像 $f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^+$ を $f(x) = e^x$ で定めると，その逆写像は $f^{-1}(x) = \log x\ (x > 0)$ である．
写像 $g\colon \left[-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right] \longrightarrow [-1, 1]$ を $g(x) = \sin x$ で定めると，その逆写像は逆三角関数 $g^{-1}(x) = \mathrm{Sin}^{-1}\, x$ である．

定理 1.13.（全単射となるための条件）
$f\colon X \longrightarrow Y$ と $g\colon Y \longrightarrow X$ を写像とする．

(1) 合成写像 $g \circ f$ が全射ならば，g は全射である．

(2) 合成写像 $g \circ f$ が単射ならば，f は単射である．

(3) $g \circ f = \mathrm{id}_X$，$f \circ g = \mathrm{id}_Y$ が成り立つならば，f と g はともに全単射であり，互いに逆写像となる．つまり，$g = f^{-1}$ が成り立つ．

証明. (1) $g \circ f\colon X \longrightarrow X$ が全射なので，任意の $x_1 \in X$ に対して

$$(g \circ f)(x_2) = x_1$$

となる $x_2 \in X$ が存在する．そこで，$y = f(x_2) \in Y$ とおけば

$$x_1 = (g \circ f)(x_2) = g(f(x_2)) = g(y)$$

が成り立つ．$x_1 \in X$ は任意だったので，g は全射である（この y が定義をみたしている）．

(2) 任意の $x_1, x_2 \in X$ に対して，$f(x_1) = f(x_2)$ とする．このとき，両辺を g で移せば

$$g(f(x_1)) = g(f(x_2)) \qquad \therefore\ (g \circ f)(x_1) = (g \circ f)(x_2)$$

となる．ここで，$g \circ f$ は単射なので，定義より $x_1 = x_2$ が成り立つ．したがって，$f(x_1) = f(x_2)$ ならば $x_1 = x_2$ となるから，f は単射である．

(3) 条件より $g \circ f = \mathrm{id}_X$ は全単射なので，(1) より g は全射であり，(2) より f は単射である．また，$f \circ g = \mathrm{id}_Y$ も全単射なので，(1) より f は全射であり，(2) より g は単射である．よって，f と g はともに全単射となる．

このとき，f の逆写像 f^{-1} を $g \circ f = \mathrm{id}_X$ と合成すれば

$$g \circ f \circ f^{-1} = \mathrm{id}_X \circ f^{-1} = f^{-1}$$

となり，$f \circ f^{-1} = \mathrm{id}_Y$ なので，$g = f^{-1}$ が得られる．

□

2　線形写像の定義と性質

2.1　線形写像の定義と例

第 3 章では実数を成分にもつ数ベクトル空間の間の線形写像 $f\colon \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^n$ について学習したが，その概念は抽象的なベクトル空間の場合にも拡張できる．

定義 2.1. （線形写像）
V と W を $\mathbb{K}$ 上のベクトル空間とする．写像 $f\colon V \longrightarrow W$ が**線形写像**であるとは，任意の $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in V$ と $\alpha \in \mathbb{K}$ に対して，次の 2 条件

- $f(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}) = f(\boldsymbol{x}) + f(\boldsymbol{y})$
- $f(\alpha\boldsymbol{x}) = \alpha f(\boldsymbol{x})$

が成り立つことをいう．この 2 つの性質を合わせて**線形性**という．
特に $V = W$ のときには，線形写像 $f\colon V \longrightarrow V$ を V 上の**線形変換**という．

線形性の 2 条件は，任意の $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in V$ と $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$ に対して

$$f(\alpha\boldsymbol{x} + \beta\boldsymbol{y}) = \alpha f(\boldsymbol{x}) + \beta f(\boldsymbol{y})$$

のように 1 つの式でまとめることもできる．

また，f が線形写像ならば，線形性より $c_j \in \mathbb{K}$ と $\boldsymbol{v}_j \in V$ に対して

$$f(\boldsymbol{0}) = \boldsymbol{0}, \qquad f(c_1\boldsymbol{v}_1 + c_2\boldsymbol{v}_2 + \cdots + c_k\boldsymbol{v}_k) = c_1 f(\boldsymbol{v}_1) + c_2 f(\boldsymbol{v}_2) + \cdots + c_k f(\boldsymbol{v}_k)$$

が成り立つ．実際

$$f(\boldsymbol{0}) = f(\boldsymbol{0}+\boldsymbol{0}) = f(\boldsymbol{0}) + f(\boldsymbol{0}) = 2f(\boldsymbol{0})$$

より，$f(\boldsymbol{0}) = \boldsymbol{0}$ となる．後半は数学的帰納法により証明できる．

代表的な線形写像は，第 3 章で扱ったような行列から定まる数ベクトル空間の間の写像である．そこで，復習のために再度述べることにする．まず，実数成分の $m \times n$ 行列 A に対して

$$T_A\colon \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m, \qquad T_A(\boldsymbol{x}) = A\boldsymbol{x} \qquad (\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n)$$

と写像を定める．このとき，任意の $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^n$ と $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ に対して

$$T_A(\alpha\boldsymbol{x} + \beta\boldsymbol{y}) = A(\alpha\boldsymbol{x} + \beta\boldsymbol{y}) = \alpha A\boldsymbol{x} + \beta A\boldsymbol{y} = \alpha T_A(\boldsymbol{x}) + \beta T_A(\boldsymbol{y})$$

が成り立つので，T_A は線形写像である．

この節では，このように行列から定まるもの以外の線形写像について考察する．なお，対象とするベクトル空間が有限次元ならば，線形写像に関する問題の多くは行列の議論に帰着できるということがこの章の主題である．

例題 2.2. 写像 $D\colon P(\mathbb{R}) \longrightarrow P(\mathbb{R})$ を $f(x) \in P(\mathbb{R})$ に対して

$$D(f(x)) = x^2\frac{d^2f(x)}{dx^2} + (x+1)\frac{df(x)}{dx} - 5f(x)$$

で定義すると，D は $P(\mathbb{R})$ 上の線形変換となることを示せ．

（解答） $f(x)$ が実数係数の多項式ならば $D(f(x))$ もそうであるから，確かに $D\colon P(\mathbb{R}) \longrightarrow P(\mathbb{R})$ である．また，任意の $f(x), g(x) \in P(\mathbb{R})$ と $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ に対して，微分の性質より

$$\begin{aligned}
D(\alpha f(x) + \beta g(x)) &= x^2\frac{d^2}{dx^2}\{\alpha f(x) + \beta g(x)\} + (x+1)\frac{d}{dx}\{\alpha f(x) + \beta g(x)\} - 5\{\alpha f(x) + \beta g(x)\} \\
&= x^2\{\alpha f''(x) + \beta g''(x)\} + (x+1)\{\alpha f'(x) + \beta g'(x)\} - 5\{\alpha f(x) + \beta g(x)\} \\
&= \alpha\{x^2 f''(x) + (x+1)f'(x) - 5f(x)\} + \beta\{x^2 g''(x) + (x+1)g'(x) - 5g(x)\} \\
&= \alpha D(f(x)) + \beta D(g(x))
\end{aligned}$$

が成り立つから，D は $P(\mathbb{R})$ 上の線形変換となる．

（解答終）

例題 2.3. r を正の整数とする．写像 $D\colon C^r(a,b) \longrightarrow C^{r-1}(a,b)$ を $D(f) = f'$ で定めれば，D は線形写像である（これは示さなくてよい）．また，$a < c < b$ として，写像 $I\colon C^{r-1}(a,b) \longrightarrow C^r(a,b)$ を

$$(I(g))(x) = \int_c^x g(t)\,dt \qquad (a < x < b)$$

によって定める．このとき，次の主張を示せ．

(1) I は線形写像である．

(2) $D \circ I$ は $C^{r-1}(a,b)$ 上の恒等変換である．

(3) $I \circ D$ は $C^r(a,b)$ 上の恒等変換ではない．

（解答）

(1) 任意の $f, g \in C^{r-1}(a,b)$ と $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ に対して

$$I(\alpha f + \beta g)(x) = \int_c^x \{\alpha f(t) + \beta g(t)\}\,dt = \alpha\int_c^x f(t)\,dt + \beta\int_c^x g(t)\,dt = \alpha I(f)(x) + \beta I(g)(x)$$

が任意の $a < x < b$ について成り立つ．よって

$$I(\alpha f + \beta g) = \alpha I(f) + \beta I(g)$$

となるから，I は線形写像である．

(2) $g \in C^{r-1}(a,b)$ に対して

$$\big((D \circ I)(g)\big)(x) = \frac{d}{dx}\int_c^x g(t)\,dt = g(x)$$

であるから，$D \circ I$ は $C^{r-1}(a,b)$ 上の恒等変換である．

(3) $f \in C^r(a,b)$ に対して

$$\big((I \circ D)(f)\big)(x) = \int_c^x f'(t)\,dt = f(x) - f(c)$$

であるから，$I \circ D$ は $C^r(a,b)$ 上の恒等変換ではない．

例題 2.4. $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & -2 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ とし，V を原点を通り $\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ を法線ベクトルとする $\mathbb{R}^3$ 内の平面とする．

(1) $T_A \colon \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ により V のベクトルは V のベクトルに写ることを示せ．

(2) 写像 $f \colon V \longrightarrow V$ を $f(\boldsymbol{x}) = A\boldsymbol{x}$ により定めれば，これは V 上の線形変換となることを示せ．

（解答）

(1) 平面 V の方程式は

$$x - 2y + z = 0$$

である．よって，任意の $\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \in V$ は $a - 2b + c = 0$ をみたす．このとき

$$T_A(\boldsymbol{v}) = A\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & -2 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a + 2b - c \\ 2a - 2b + 2c \\ -a + 2b + c \end{pmatrix}$$

について

$$\begin{aligned} x - 2y + z &= (a + 2b - c) - 2(2a - 2b + 2c) + (-a + 2b + c) \\ &= -4a + 8b - 4c \\ &= -4(a - 2b + c) = 0 \end{aligned}$$

より，$T_A(\boldsymbol{v}) = A\boldsymbol{v}$ も平面 V 上にあるから，T_A により V のベクトルは V のベクトルに写る．

(2) 任意の $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in V$ と $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ に対して

$$f(\alpha\boldsymbol{u} + \beta\boldsymbol{v}) = A(\alpha\boldsymbol{u} + \beta\boldsymbol{v}) = \alpha A\boldsymbol{u} + \beta A\boldsymbol{v} = \alpha f(\boldsymbol{u}) + \beta f(\boldsymbol{v})$$

が成り立つから，f は V 上の線形変換である．

（解答終）

2.2 線形写像の性質

線形写像の性質で最も重要なものは『線形写像は基底が写る先を決めれば 1 つに定まる』ということである．以下では V と W を $\mathbb{K}$ 上のベクトル空間とする．

定理 2.5. $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_n$ を V の基底，$\boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{w}_2, \ldots, \boldsymbol{w}_n$ を W のベクトルとする．このとき，線形写像 $f\colon V \longrightarrow W$ で $f(\boldsymbol{v}_j) = \boldsymbol{w}_j$ $(j = 1, 2, \ldots, n)$ をみたすものがただ 1 つ存在する．

証明. $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_n$ は V の基底なので，V の任意のベクトル $\boldsymbol{x}$ は

$$\boldsymbol{x} = x_1\boldsymbol{v}_1 + x_2\boldsymbol{v}_2 + \cdots + x_n\boldsymbol{v}_n$$

と表せて，このような $x_1, x_2, \ldots, x_n \in \mathbb{K}$ は $\boldsymbol{x}$ に対して一通りに定まる．そこで

$$f(\boldsymbol{x}) = x_1\boldsymbol{w}_1 + x_2\boldsymbol{w}_2 + \cdots + x_n\boldsymbol{w}_n$$

により写像 $f\colon V \longrightarrow W$ を定義することができる．この f が求めるものであることを示す．

$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{v}_j$ のときは $x_j = 1,\ x_k = 0\ (k \neq j)$ が対応するから

$$f(\boldsymbol{v}_j) = \boldsymbol{w}_j \qquad (j = 1, 2, \ldots, n)$$

が成り立つ．

任意の $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in V$ と $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$ に対して

$$\boldsymbol{x} = x_1\boldsymbol{v}_1 + x_2\boldsymbol{v}_2 + \cdots + x_n\boldsymbol{v}_n, \qquad \boldsymbol{y} = y_1\boldsymbol{v}_1 + y_2\boldsymbol{v}_2 + \cdots + y_n\boldsymbol{v}_n$$

と表せば

$$\begin{aligned}\alpha\boldsymbol{x} + \beta\boldsymbol{y} &= \alpha(x_1\boldsymbol{v}_1 + x_2\boldsymbol{v}_2 + \cdots + x_n\boldsymbol{v}_n) + \beta(y_1\boldsymbol{v}_1 + y_2\boldsymbol{v}_2 + \cdots + y_n\boldsymbol{v}_n) \\ &= (\alpha x_1 + \beta y_1)\boldsymbol{v}_1 + (\alpha x_2 + \beta y_2)\boldsymbol{v}_2 + \cdots + (\alpha x_n + \beta y_n)\boldsymbol{v}_n\end{aligned}$$

となるから，写像 f の定義より

$$\begin{aligned}f(\alpha\boldsymbol{x} + \beta\boldsymbol{y}) &= (\alpha x_1 + \beta y_1)\boldsymbol{w}_1 + (\alpha x_2 + \beta y_2)\boldsymbol{w}_2 + \cdots + (\alpha x_n + \beta y_n)\boldsymbol{w}_n \\ &= \alpha(x_1\boldsymbol{w}_1 + x_2\boldsymbol{w}_2 + \cdots + x_n\boldsymbol{w}_n) + \beta(y_1\boldsymbol{w}_1 + y_2\boldsymbol{w}_2 + \cdots + y_n\boldsymbol{w}_n) \\ &= \alpha f(\boldsymbol{x}) + \beta f(\boldsymbol{y})\end{aligned}$$

が成り立つので，f は線形写像である．

次に，線形写像 $g\colon V \longrightarrow W$ も $g(\boldsymbol{v}_j) = \boldsymbol{w}_j$ $(j = 1, 2, \ldots, n)$ をみたすとする．このとき，任意のベクトル $\boldsymbol{x} \in V$ を

$$\boldsymbol{x} = x_1\boldsymbol{v}_1 + x_2\boldsymbol{v}_2 + \cdots + x_n\boldsymbol{v}_n$$

と表せば，g の線形性より

$$\begin{aligned}g(\boldsymbol{x}) &= g(x_1\boldsymbol{v}_1 + x_2\boldsymbol{v}_2 + \cdots + x_n\boldsymbol{v}_n) \\ &= x_1 g(\boldsymbol{v}_1) + x_2 g(\boldsymbol{v}_2) + \cdots + x_n g(\boldsymbol{v}_n) \\ &= x_1\boldsymbol{w}_1 + x_2\boldsymbol{w}_2 + \cdots + x_n\boldsymbol{w}_n \\ &= f(\boldsymbol{x})\end{aligned}$$

となるため，$g = f$ が成り立つ．ゆえに，定理の条件をみたす線形写像は一意的である． □

線形写像については，単射であるための必要十分条件が簡単になる．

例題 2.6. 線形写像 $f\colon V \longrightarrow W$ が単射であるための必要十分条件は,「$f(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{0}$ ならば $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$」が成り立つことであることを示せ.

（解答） f が単射であるとする．この仮定に関係なく線形写像ならば常に $f(\boldsymbol{0}) = \boldsymbol{0}$ であるから，f が単射なので「$f(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{0}$ ならば $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$」が成り立つ．

逆に「$f(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{0}$ ならば $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$」が成り立つとする．$\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in V$ に対して $f(\boldsymbol{x}) = f(\boldsymbol{y})$ とすると，f の線形性より

$$\boldsymbol{0} = f(\boldsymbol{x}) - f(\boldsymbol{y}) = f(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y})$$

となる．よって，仮定より $\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y} = \boldsymbol{0}$ となり，$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{y}$ が成り立つ．ゆえに，f は単射である．

（解答終）

例題 2.7. $f\colon V \longrightarrow W$ を単射な線形写像とする．このとき，$\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_n$ が V の 1 次独立なベクトルならば，$f(\boldsymbol{v}_1), f(\boldsymbol{v}_2), \ldots, f(\boldsymbol{v}_n)$ は W の 1 次独立なベクトルであることを示せ.

（解答） $f(\boldsymbol{v}_1), f(\boldsymbol{v}_2), \ldots, f(\boldsymbol{v}_n)$ が 1 次独立であることを示すために，$c_j \in \mathbb{K}$ に対して

$$c_1 f(\boldsymbol{v}_1) + c_2 f(\boldsymbol{v}_2) + \cdots + c_n f(\boldsymbol{v}_n) = \boldsymbol{0}$$

とおく．このとき，左辺は f の線形性より

$$f(c_1\boldsymbol{v}_1 + c_2\boldsymbol{v}_2 + \cdots + c_n\boldsymbol{v}_n) = \boldsymbol{0}$$

となり，f は単射なので

$$c_1\boldsymbol{v}_1 + c_2\boldsymbol{v}_2 + \cdots + c_n\boldsymbol{v}_n = \boldsymbol{0}$$

が得られる．ここで，$\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_n$ は 1 次独立であったから，$c_1 = c_2 = \cdots = c_n = 0$ が成り立つ．ゆえに，自明な解のみをもつから，$f(\boldsymbol{v}_1), f(\boldsymbol{v}_2), \ldots, f(\boldsymbol{v}_n)$ は 1 次独立である．

（解答終）

命題 2.7 の主張は f が単射でなければ成り立つかどうかはわからない．一方，次の主張は f が単射かどうかに関係なく成り立つ．

練習問題 2.1. $f\colon V \longrightarrow W$ を線形写像，$\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_n$ を V のベクトルとする．
このとき，$f(\boldsymbol{v}_1), f(\boldsymbol{v}_2), \ldots, f(\boldsymbol{v}_n)$ が W の 1 次独立なベクトルならば，$\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_n$ は V の 1 次独立なベクトルであることを示せ.

命題 2.8. （線形写像の合成）

V, W, Z を $\mathbb{K}$ 上のベクトル空間とし，$f\colon V \longrightarrow W,\ g\colon W \longrightarrow Z$ をともに線形写像とする．

(1) 合成写像 $g \circ f\colon V \longrightarrow Z$ は線形写像である．

(2) f が全単射ならば，逆写像 $f^{-1}\colon W \longrightarrow V$ も線形写像である．

証明.

(1) $h = g \circ f$ とおく．任意の $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in V$ と $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$ に対して

$$h(\alpha\boldsymbol{x} + \beta\boldsymbol{y}) = g\big(f(\alpha\boldsymbol{x} + \beta\boldsymbol{y})\big) = g\big(\alpha f(\boldsymbol{x}) + \beta f(\boldsymbol{y})\big) = \alpha g\big(f(\boldsymbol{x})\big) + \beta g\big(f(\boldsymbol{y})\big) = \alpha h(\boldsymbol{x}) + \beta h(\boldsymbol{y})$$

より，h は線形写像である．

(2) 任意の $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in W$ と $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$ に対して，$\boldsymbol{u} = f^{-1}(\boldsymbol{x}),\ \boldsymbol{v} = f^{-1}(\boldsymbol{y})$ とおけば，f の線形性より

$$\alpha\boldsymbol{x} + \beta\boldsymbol{y} = \alpha f(\boldsymbol{u}) + \beta f(\boldsymbol{v}) = f(\alpha\boldsymbol{u} + \beta\boldsymbol{v})$$

となる．これより

$$f^{-1}(\alpha\boldsymbol{x} + \beta\boldsymbol{y}) = f^{-1}\big(f(\alpha\boldsymbol{u} + \beta\boldsymbol{v})\big) = \alpha\boldsymbol{u} + \beta\boldsymbol{v} = \alpha f^{-1}(\boldsymbol{x}) + \beta f^{-1}(\boldsymbol{y})$$

が成り立つから，f^{-1} も線形写像である．

□

2.3 ベクトル空間の同型

定義 2.9. （同型写像）
線形写像 $f\colon V \longrightarrow W$ が全単射ならば，f を**同型写像**という．このとき，V と W は**同型**であるといい，$V \cong W$ で表す．

2 つのベクトル空間が同型であるとは，“本質的に” ベクトル空間としての構造が同じであるということである．

例題 2.10. 実ベクトル空間 $\mathbb{R}^3$ と $P_2(\mathbb{R})$ は同型であることを示せ．

（解答） 写像 $f\colon \mathbb{R}^3 \longrightarrow P_2(\mathbb{R})$ を

$$f\left(\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}\right) = a + bx + cx^2$$

で定義する．まず，任意の $\boldsymbol{x}_1 = \begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \\ c_1 \end{pmatrix}$，$\boldsymbol{x}_2 = \begin{pmatrix} a_2 \\ b_2 \\ c_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$ と $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ に対して

$$\begin{aligned} f(\alpha\boldsymbol{x}_1 + \beta\boldsymbol{x}_2) = f\left(\begin{pmatrix} \alpha a_1 + \beta a_2 \\ \alpha b_1 + \beta b_2 \\ \alpha c_1 + \beta c_2 \end{pmatrix}\right) &= (\alpha a_1 + \beta a_2) + (\alpha b_1 + \beta b_2)x + (\alpha c_1 + \beta c_2)x^2 \\ &= \alpha(a_1 + b_1 x + c_1 x^2) + \beta(a_2 + b_2 x + c_2 x^2) = \alpha f(\boldsymbol{x}_1) + \beta f(\boldsymbol{x}_2) \end{aligned}$$

が成り立つから，f は線形写像である．

次に，$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ に対して $f(\boldsymbol{x}) = 0$ とすると

$$f(\boldsymbol{x}) = a + bx + cx^2 = 0$$

より $a = b = c = 0$ となる．よって，$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ であるから，f は単射である．

さらに，任意の $a + bx + cx^2 \in P_2(\mathbb{R})$ に対して，$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$ とおけば

$$f(\boldsymbol{x}) = a + bx + cx^2$$

であるから，f は全射である．したがって，f は同型写像であり，$\mathbb{R}^3$ と $P_2(\mathbb{R})$ は同型である．

（解答終）

同様にして，$\mathbb{R}^4$ と $M_2(\mathbb{R})$ が同型であることも示すことができる．

有限次元ベクトル空間については，同型かどうかは次元を調べることで判断できる．

定理 2.11. $\mathbb{K}$ 上の有限次元ベクトル空間 V と W が同型であるための必要十分条件は

$$\dim V = \dim W$$

が成り立つことである．

証明. V と W が同型とする．$f\colon V \longrightarrow W$ を同型写像とし，$\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_n$ を V の基底とするとき，$f(\boldsymbol{v}_1), f(\boldsymbol{v}_2), \ldots, f(\boldsymbol{v}_n)$ が W の基底となることを示す．

任意の $\boldsymbol{w} \in W$ に対して，f は全単射なので，ある $\boldsymbol{v} \in V$ で $\boldsymbol{w} = f(\boldsymbol{v})$ となるものが存在する．ここで，$\boldsymbol{v}$ は V の基底の 1 次結合で

$$\boldsymbol{v} = c_1\boldsymbol{v}_1 + c_2\boldsymbol{v}_2 + \cdots + c_n\boldsymbol{v}_n$$

と表せるから，$\boldsymbol{w}$ は

$$\boldsymbol{w} = f(\boldsymbol{v}) = c_1 f(\boldsymbol{v}_1) + c_2 f(\boldsymbol{v}_2) + \cdots + c_n f(\boldsymbol{v}_n)$$

と $f(\boldsymbol{v}_1), f(\boldsymbol{v}_2), \ldots, f(\boldsymbol{v}_n)$ の 1 次結合で表せる．よって，$f(\boldsymbol{v}_1), f(\boldsymbol{v}_2), \ldots, f(\boldsymbol{v}_n)$ は W を生成する．

さらに，f は単射で $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_n$ は 1 次独立なので，例題 2.7 より $f(\boldsymbol{v}_1), f(\boldsymbol{v}_2), \ldots, f(\boldsymbol{v}_n)$ は 1 次独立となる．したがって，$f(\boldsymbol{v}_1), f(\boldsymbol{v}_2), \ldots, f(\boldsymbol{v}_n)$ は W の基底であるから，$\dim W = n = \dim V$ が成り立つ．

逆に，$\dim V = \dim W = n$ とし，$\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_n$ を V の基底，$\boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{w}_2, \ldots, \boldsymbol{w}_n$ を W の基底とする．このとき，命題 2.5 より，線形写像 $f\colon V \longrightarrow W$ で $f(\boldsymbol{v}_j) = \boldsymbol{w}_j$ $(j = 1, 2, \ldots, n)$ となるものが存在する．この f が同型写像であることを示せばよい．

まず $\underline{f \text{ が単射であること}}$を示すために，$\boldsymbol{x} \in V$ に対して $f(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{0}$ とする．このとき，V の基底を用いて

$$\boldsymbol{x} = x_1\boldsymbol{v}_1 + x_2\boldsymbol{v}_2 + \cdots + x_n\boldsymbol{v}_n$$

と表せば

$$\boldsymbol{0} = f(\boldsymbol{x}) = x_1 f(\boldsymbol{v}_1) + x_2 f(\boldsymbol{v}_2) + \cdots + x_n f(\boldsymbol{v}_n) = x_1\boldsymbol{w}_1 + x_2\boldsymbol{w}_2 + \cdots + x_n\boldsymbol{w}_n$$

となり，$\boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{w}_2, \ldots, \boldsymbol{w}_n$ は W の基底であるから，$x_1 = x_2 = \cdots = x_n = 0$ が成り立つ．よって，$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ であるから，例題 2.6 より f は単射である．

次に $\underline{f \text{ が全射であること}}$を示すために，任意の $\boldsymbol{y} \in W$ をとる．このとき，W の基底を用いて

$$\boldsymbol{y} = y_1\boldsymbol{w}_1 + y_2\boldsymbol{w}_2 + \cdots + y_n\boldsymbol{w}_n$$

と表せば，V のベクトル $\boldsymbol{x}$ を

$$\boldsymbol{x} = y_1\boldsymbol{v}_1 + y_2\boldsymbol{v}_2 + \cdots + y_n\boldsymbol{v}_n$$

とおくことにより

$$f(\boldsymbol{x}) = y_1 f(\boldsymbol{v}_1) + y_2 f(\boldsymbol{v}_2) + \cdots + y_n f(\boldsymbol{v}_n) = y_1\boldsymbol{w}_1 + y_2\boldsymbol{w}_2 + \cdots + y_n\boldsymbol{w}_n = \boldsymbol{y}$$

が成り立つ．よって，f は全射である．

以上より $f\colon V \longrightarrow W$ は全単射であるから同型写像なので，V と W は同型である． □

この定理の証明からわかるように，同型写像 $f\colon V \longrightarrow W$ は V の基底を W の基底にうつす写像である．

3　線形写像の核と像

3.1　核と像の定義

線形写像に対して，今後重要な役割を果たす部分空間を定義する．

定義 3.1.（線形写像の核と像，階数）
V と W を $\mathbb{K}$ 上のベクトル空間とし，$f\colon V \longrightarrow W$ を線形写像とする．

(1) V の部分空間 $\operatorname{Ker} f$ を

$$\operatorname{Ker} f := \{\, \boldsymbol{v} \in V \mid f(\boldsymbol{v}) = \boldsymbol{0} \,\}$$

で定め，f の**核**という．

(2) W の部分空間 $\operatorname{Im} f$ を

$$\operatorname{Im} f := \{\, \boldsymbol{w} \in W \mid f(\boldsymbol{v}) = \boldsymbol{w} \text{ をみたす } \boldsymbol{v} \in V \text{ がある} \,\}$$

で定め，f の**像**という．

(3) 像の次元 $\dim \operatorname{Im} f$ を f の**階数**とよび，$\operatorname{rank} f := \dim \operatorname{Im} f$ で表す．

注意 3.2.　例題 2.6 より，線形写像 $f\colon V \longrightarrow W$ が単射であるための必要十分条件は $\operatorname{Ker} f = \{\boldsymbol{0}\}$ である．また，線形写像 $f\colon V \longrightarrow W$ が全射であるとは $\operatorname{Im} f = W$ となることであり，W が有限次元ならば定理 4.28 より $\dim \operatorname{Im} f = \dim W$ となることと同値である．

例題 3.3.　$f\colon V \longrightarrow W$ を線形写像とする．

(1) $\operatorname{Ker} f$ は V の部分空間であることを示せ．

(2) $\operatorname{Im} f$ は W の部分空間であることを示せ．

（解答）　議論をわかりやすくするため，$\boldsymbol{0}_V$ で V の零ベクトルを，$\boldsymbol{0}_W$ で W の零ベクトルを表すことにする．慣れればこのようにせず，すべて $\boldsymbol{0}$ で表してよい．

(1)　まず $f(\boldsymbol{0}_V) = \boldsymbol{0}_W$ より，$\boldsymbol{0}_V \in \operatorname{Ker} f$ なので，$\operatorname{Ker} f \neq \emptyset$ である．
また，任意の $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2 \in \operatorname{Ker} f$ と $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$ に対して

$$f(\boldsymbol{v}_1) = \boldsymbol{0}_W, \qquad f(\boldsymbol{v}_2) = \boldsymbol{0}_W$$

であるから，f の線形性より

$$f(\alpha \boldsymbol{v}_1 + \beta \boldsymbol{v}_2) = \alpha f(\boldsymbol{v}_1) + \beta f(\boldsymbol{v}_2) = \alpha \boldsymbol{0}_W + \beta \boldsymbol{0}_W = \boldsymbol{0}_W$$

となる．よって，$\alpha \boldsymbol{v}_1 + \beta \boldsymbol{v}_2 \in \operatorname{Ker} f$ が成り立つ．したがって，$\operatorname{Ker} f$ は V の部分空間である．

(2)　まず $f(\boldsymbol{0}_V) = \boldsymbol{0}_W$ より，$\boldsymbol{0}_W \in \operatorname{Im} f$ なので，$\operatorname{Im} f \neq \emptyset$ である．
また，任意の $\boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{w}_2 \in \operatorname{Im} f$ と $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$ に対して

$$f(\boldsymbol{v}_1) = \boldsymbol{w}_1, \qquad f(\boldsymbol{v}_2) = \boldsymbol{w}_2$$

となる $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2 \in V$ が存在するから，f の線形性より

$$\alpha \boldsymbol{w}_1 + \beta \boldsymbol{w}_2 = \alpha f(\boldsymbol{v}_1) + \beta f(\boldsymbol{v}_2) = f(\alpha \boldsymbol{v}_1 + \beta \boldsymbol{v}_2)$$

となる．よって，$\alpha \boldsymbol{w}_1 + \beta \boldsymbol{w}_2 \in \operatorname{Im} f$ が成り立つ．したがって，$\operatorname{Im} f$ は V の部分空間である．

（解答終）

実数成分の $m \times n$ 行列 $A \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$ の定める線形写像

$$T_A \colon \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m, \qquad T_A(\boldsymbol{x}) = A\boldsymbol{x}$$

について，その核 $\operatorname{Ker} T_A$ や像 $\operatorname{Im} T_A$ および階数 $\operatorname{rank} T_A$ を考えてみる．

- ＜線形写像 T_A の核＞

$$T_A(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{0} \quad\Longleftrightarrow\quad A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$$

より，T_A の核は

$$\operatorname{Ker} T_A = \{\, \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n \mid A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0} \,\}$$

であるから，これは A を係数行列とする斉次連立 1 次方程式の解空間と一致する $\mathbb{R}^n$ の部分空間である．よって，$\operatorname{Ker} T_A$ の基底や次元は第 8 章 4.3 節のように求めることができる．

- ＜線形写像 T_A の像＞

$$\operatorname{Im} T_A = \{\, \boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^m \mid A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{y} \text{ となる } \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n \text{ が存在する} \,\}$$

である．そこで，行列 A を

$$A = \begin{pmatrix} \boldsymbol{a}_1 & \boldsymbol{a}_2 & \cdots & \boldsymbol{a}_n \end{pmatrix}$$

と列ベクトル分解すれば，$\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ に対して

$$A\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{a}_1 & \boldsymbol{a}_2 & \cdots & \boldsymbol{a}_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = x_1\boldsymbol{a}_1 + x_2\boldsymbol{a}_2 + \cdots + x_n\boldsymbol{a}_n$$

となる．よって，$\boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^n$ に対して，$\boldsymbol{y} \in \operatorname{Im} T_A$ であることは $\boldsymbol{y}$ が $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_n$ の 1 次結合で表せることと同値であるから，T_A の像について

$$\operatorname{Im} T_A = \{\, x_1\boldsymbol{a}_1 + x_2\boldsymbol{a}_2 + \cdots + x_n\boldsymbol{a}_n \mid x_j \in \mathbb{R},\ j = 1, 2, \ldots, n \,\} = \langle \boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_n \rangle$$

が成り立つ．つまり，$\operatorname{Im} T_A$ は A の列ベクトル $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_n$ で生成される $\mathbb{R}^m$ の部分空間である．よって，$\operatorname{Im} T_A$ の基底や次元は第 8 章 4.4 節のように求めることができる．

- ＜線形写像 T_A の階数＞

　上の考察より $\operatorname{Im} T_A = \langle \boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_n \rangle$ であり，生成される部分空間の基底や次元を求める方法を思い出すと，A を簡約階段行列に行基本変形した際の階段の数だけ 1 次独立なベクトルを選ぶことができた．よって，行列 A の階数 $\operatorname{rank} A$ と像の次元 $\dim \operatorname{Im} T_A$ は等しくなる．したがって

$$\operatorname{rank} T_A = \operatorname{rank} A$$

が成り立つ．

　第 4 章において，行列 A の階数を A の行基本変形を用いて定義したが，線形写像 T_A の像の次元 $\dim \operatorname{Im} T_A$ は A の基本変形とは無関係に定まるものである．この事実より，A の階数の定義が階段行列への行基本変形の方法によらないこともわかる．さらに，基本変形により階数が変わらないことから，正則行列をかけても階数は変わらないので，P を m 次正則行列，Q を n 次正則行列とすれば

$$\operatorname{rank}(PAQ) = \operatorname{rank} A$$

が成り立つこともわかる．

第 7 章に定理 5.10 において行列の正則性をまとめたが，1 次独立性や基底の概念を導入するとさらに次のようになる．

定理 3.4. （行列が正則であるための必要十分条件）
実数を成分にもつ n 次正方行列 A に対して，次の条件はすべて同値である．ただし

$$A = \begin{pmatrix} \boldsymbol{a}_1 & \boldsymbol{a}_2 & \cdots & \boldsymbol{a}_n \end{pmatrix}$$

を A の列ベクトル分解とする．

(1) A は正則である．つまり，A の逆行列が存在する．

(2) 階数について $\operatorname{rank} A = n$ となる．

(3) A は行基本変形により単位行列 E_n に変形できる．

(4) A は基本行列の積で表せる．

(5) 行列式について $\det A \fallingdotseq 0$ となる．

(6) 斉次連立 1 次方程式 $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ は自明な解 $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ しかもたない．

(7) $\mathbb{R}^n$ のベクトル $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_n$ は 1 次独立である．

(8) $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_n$ は $\mathbb{R}^n$ の基底である．

すでに第 8 章定理 4.25 において (7) と (8) は同値であることは示してある．また，階数に着目すれば

$$\operatorname{rank} A = n \quad \Longleftrightarrow \quad \operatorname{rank} T_A = \dim\langle \boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_n \rangle = n$$

となるので，(2) と (7) が同値であることもわかる．
別証明としては，(6) と (7) が必要十分条件であることも簡単に確認できる．各自で確かめてみよ．

これより，$\mathbb{R}^n$ **の基底を並べて** n **次正方行列** A **を作れば，**A **は正則行列となる．**逆に，**実数を成分にもつ** n **次正則行列** A **の** n **個の列ベクトルは** $\mathbb{R}^n$ **の基底となる．**この事実は後で何度も用いるので，必ず理解しておくこと．

また，ここでは実数の場合を説明したが，n 次正方行列 A の成分に複素数も許す場合には，上の定理 3.4 において

(7) $\mathbb{C}^n$ のベクトル $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_n$ は 1 次独立である．

(8) $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_n$ は $\mathbb{C}^n$ の基底である．

と修正すればよい．

3.2　核と像の計算例

行列 A から定まる線形写像 T_A の核と像は次のように計算できる．基本的なアイデアは解空間と生成される部分空間に関する計算法である．

例題 3.5.　$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix}$ のとき，$\operatorname{Ker} T_A$ と $\operatorname{Im} T_A$ のそれぞれの次元と基底を求めよ．

（解答）　$\operatorname{Ker} T_A$ は斉次連立 1 次方程式 $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ の解空間である．方程式の解を求めるために，係数行列 A を簡約階段行列に行基本変形すれば

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 1 列の掃き出し}]{\text{(1,1) 成分による}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & -6 \\ 0 & -6 & -12 \end{pmatrix} \xrightarrow[(-1/3)\text{ 倍}]{\text{第 2 行を}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & -6 & -12 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 2 列の掃き出し}]{\text{(2,2) 成分による}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

より，解は

$$\boldsymbol{x} = t \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad (t \in \mathbb{R})$$

と表せる．よって，$\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ は $\operatorname{Ker} T_A$ を生成し，これは零ベクトルでないから 1 次独立である．ゆえに，$\operatorname{Ker} T_A$ の基底として $\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ がとれる．したがって，$\dim \operatorname{Ker} T_A = 1$ である．

$\operatorname{Im} T_A$ は A の列ベクトルで生成される部分空間なので，A の列ベクトルを用いて

$$\operatorname{Im} T_A = \langle \boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3 \rangle, \qquad A = \begin{pmatrix} \boldsymbol{a}_1 & \boldsymbol{a}_2 & \boldsymbol{a}_3 \end{pmatrix}$$

となる．この $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3$ の中から最大個数の 1 次独立な組を選べばよいから

$$x_1\boldsymbol{a}_1 + x_2\boldsymbol{a}_2 + x_3\boldsymbol{a}_3 = \boldsymbol{0} \quad \Longleftrightarrow \quad A \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \boldsymbol{0}$$

とおく．この解はすでに

$$(x_1,\, x_2,\, x_3) = (t,\, -2t,\, t)$$

と求めているから，特に $t = 1$ とすれば

$$\boldsymbol{a}_1 - 2\boldsymbol{a}_2 + \boldsymbol{a}_3 = \boldsymbol{0} \qquad \therefore\ \boldsymbol{a}_3 = -\boldsymbol{a}_1 + 2\boldsymbol{a}_2$$

が得られる．ゆえに，$\operatorname{Im} T_A = \langle \boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2 \rangle$ が成り立つ．さらに，方程式

$$x_1\boldsymbol{a}_1 + x_2\boldsymbol{a}_2 = \boldsymbol{0}$$

を考えると，これは上で $x_3 = 0$ とした方程式なので $t = 0$ に対応し，$x_1 = x_2 = 0$ という自明な解のみをもつ．よって，$\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2$ は 1 次独立である．したがって，$\boldsymbol{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$，$\boldsymbol{a}_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}$ が $\operatorname{Im} T_A$ の基底となり，$\dim \operatorname{Im} T_A = 2$ である．

（解答終）

例題 3.6. $A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 6 & 0 \\ 2 & -5 & 9 & 2 \\ 3 & 0 & -9 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ のとき，$\mathrm{Ker}\, T_A$ と $\mathrm{Im}\, T_A$ のそれぞれの次元と基底を求めよ．

（解答） $\mathrm{Ker}\, T_A$ は方程式 $A\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$ の解空間であり，係数行列 A を簡約階段行列に行基本変形すれば

$$\begin{pmatrix} 1 & -3 & 6 & 0 \\ 2 & -5 & 9 & 2 \\ 3 & 0 & -9 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 1 列の掃き出し}]{\text{(1,1) 成分による}} \begin{pmatrix} 1 & -3 & 6 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 2 \\ 0 & 9 & -27 & 0 \\ 0 & -2 & 6 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 2 列の掃き出し}]{\text{(2,2) 成分による}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 & 6 \\ 0 & 1 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -18 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{\text{第 3 行を } (-1/18) \text{ 倍}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 & 6 \\ 0 & 1 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 4 列の掃き出し}]{\text{(3,4) 成分による}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

より，解は

$$\boldsymbol{x} = t \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad (t \in \mathbb{R})$$

と表せる．よって，$\begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ は $\mathrm{Ker}\, T_A$ を生成し，これは零ベクトルでないから 1 次独立である．ゆえに，$\mathrm{Ker}\, T_A$ の基底として $\begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ がとれる．したがって，$\dim \mathrm{Ker}\, T_A = 1$ である．

$\mathrm{Im}\, T_A$ は A の列ベクトルで生成される部分空間なので，A の列ベクトルを用いて

$$\mathrm{Im}\, T_A = \langle \boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3, \boldsymbol{a}_4 \rangle, \qquad A = \begin{pmatrix} \boldsymbol{a}_1 & \boldsymbol{a}_2 & \boldsymbol{a}_3 & \boldsymbol{a}_4 \end{pmatrix}$$

となる．この $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3, \boldsymbol{a}_4$ の中から最大個数の 1 次独立な組を選べばよいから

$$x_1\boldsymbol{a}_1 + x_2\boldsymbol{a}_2 + x_3\boldsymbol{a}_3 + x_4\boldsymbol{a}_4 = \mathbf{0} \iff A \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \mathbf{0}$$

とおく．この解はすでに $(x_1, x_2, x_3, x_4) = (3t, 3t, t, 0)$ と求めているから，特に $t = 1$ とすれば

$$3\boldsymbol{a}_1 + 3\boldsymbol{a}_2 + \boldsymbol{a}_3 = \mathbf{0} \qquad \therefore\ \boldsymbol{a}_3 = -3\boldsymbol{a}_1 - 3\boldsymbol{a}_2$$

が得られる．ゆえに，$\mathrm{Im}\, T_A = \langle \boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_4 \rangle$ が成り立つ．さらに，方程式

$$x_1\boldsymbol{a}_1 + x_2\boldsymbol{a}_2 + x_4\boldsymbol{a}_4 = \mathbf{0}$$

を考えると，これは上で $x_3 = 0$ とした方程式なので $t = 0$ に対応し，$x_1 = x_2 = x_4 = 0$ という自明な解のみをもつ．よって，$\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_4$ は 1 次独立である．したがって，$\boldsymbol{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$，$\boldsymbol{a}_2 = \begin{pmatrix} -3 \\ -5 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$，$\boldsymbol{a}_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ が $\mathrm{Im}\, T_A$ の基底となり，$\dim \mathrm{Im}\, T_A = 3$ である．

（解答終）

例題 3.7. $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 6 & 7 \\ 2 & -1 & -3 & 9 \\ 3 & 4 & 12 & 19 \end{pmatrix}$ のとき，$\operatorname{Ker} T_A$ と $\operatorname{Im} T_A$ のそれぞれの次元と基底を求めよ．

（解答） $\operatorname{Ker} T_A$ は方程式 $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ の解空間であり，係数行列 A を簡約階段行列に行基本変形すれば

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 6 & 7 \\ 2 & -1 & -3 & 9 \\ 3 & 4 & 12 & 19 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 1 列の掃き出し}]{\text{(1,1) 成分による}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 6 & 7 \\ 0 & -5 & -15 & -5 \\ 0 & -2 & -6 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{\text{第 2 行を } (-1/5) \text{ 倍}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 6 & 7 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & -2 & -6 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 2 列の掃き出し}]{\text{(2,2) 成分による}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

より，解は

$$\boldsymbol{x} = s \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -5 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad (s, t \in \mathbb{R})$$

と表せる．よって，$\begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -5 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ は $\operatorname{Ker} T_A$ を生成し，上式で $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ とすれば $s = t = 0$ という自明な解のみをもつから 1 次独立である．ゆえに，$\begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -5 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ は $\operatorname{Ker} T_A$ の基底となり，$\dim \operatorname{Ker} T_A = 2$ である．

$\operatorname{Im} T_A$ は A の列ベクトルで生成される部分空間なので，A の列ベクトルを用いて

$$\operatorname{Im} T_A = \langle \boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3, \boldsymbol{a}_4 \rangle, \qquad A = \begin{pmatrix} \boldsymbol{a}_1 & \boldsymbol{a}_2 & \boldsymbol{a}_3 & \boldsymbol{a}_4 \end{pmatrix}$$

となる．この $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3, \boldsymbol{a}_4$ の中から最大個数の 1 次独立な組を選べばよいから

$$x_1\boldsymbol{a}_1 + x_2\boldsymbol{a}_2 + x_3\boldsymbol{a}_3 + x_4\boldsymbol{a}_4 = \boldsymbol{0} \quad \Longleftrightarrow \quad A \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \boldsymbol{0}$$

とおく．この解はすでに

$$(x_1,\, x_2,\, x_3,\, x_4) = (-5t,\, -3s - t,\, s,\, t)$$

と求めているから，特に $(s, t) = (1, 0),\ (0, 1)$ とすれば

$$\boldsymbol{a}_3 = 3\boldsymbol{a}_2, \qquad \boldsymbol{a}_4 = 5\boldsymbol{a}_1 + \boldsymbol{a}_2$$

が得られる．ゆえに，$\operatorname{Im} T_A = \langle \boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2 \rangle$ が成り立つ．さらに，方程式

$$x_1\boldsymbol{a}_1 + x_2\boldsymbol{a}_2 = \boldsymbol{0}$$

を考えると，これは上で $x_3 = x_4 = 0$ とした方程式なので $s = t = 0$ に対応し，$x_1 = x_2 = 0$ という自明な解のみをもつ．よって，$\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2$ は 1 次独立である．したがって，$\boldsymbol{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$，$\boldsymbol{a}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}$ が $\operatorname{Im} T_A$ の基底となり，$\dim \operatorname{Im} T_A = 2$ である．

（解答終）

例題 3.8. $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & 1 \\ -2 & 4 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & -1 & -2 \\ 1 & -2 & 1 & 4 \end{pmatrix}$ のとき，$\operatorname{Ker} T_A$ と $\operatorname{Im} T_A$ のそれぞれの次元と基底を求めよ．

（解答） $\operatorname{Ker} T_A$ は方程式 $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ の解空間であり，係数行列 A を簡約階段行列に行基本変形すれば

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & 1 \\ -2 & 4 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & -1 & -2 \\ 1 & -2 & 1 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 1 列の掃き出し}]{\text{(1,1) 成分による}} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 3 列の掃き出し}]{\text{(2,3) 成分による}} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

より，解は

$$\boldsymbol{x} = s\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad (s, t \in \mathbb{R})$$

と表せる．よって，$\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$ は $\operatorname{Ker} T_A$ を生成し，上式で $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ とすれば $s = t = 0$ という自明な解のみをもつから 1 次独立である．ゆえに，$\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$ は $\operatorname{Ker} T_A$ の基底となり，$\dim \operatorname{Ker} T_A = 2$ である．

$\operatorname{Im} T_A$ は A の列ベクトルで生成される部分空間なので，A の列ベクトルを用いて

$$\operatorname{Im} T_A = \langle \boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3, \boldsymbol{a}_4 \rangle, \qquad A = \begin{pmatrix} \boldsymbol{a}_1 & \boldsymbol{a}_2 & \boldsymbol{a}_3 & \boldsymbol{a}_4 \end{pmatrix}$$

となる．この $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3, \boldsymbol{a}_4$ の中から最大個数の 1 次独立な組を選べばよいから

$$x_1\boldsymbol{a}_1 + x_2\boldsymbol{a}_2 + x_3\boldsymbol{a}_3 + x_4\boldsymbol{a}_4 = \boldsymbol{0} \iff A\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \boldsymbol{0}$$

とおく．この解はすでに

$$(x_1,\, x_2,\, x_3,\, x_4) = (2s - t,\, s,\, -3t,\, t)$$

と求めているから，特に $(s, t) = (1, 0),\ (0, 1)$ とすれば

$$\boldsymbol{a}_2 = -2\boldsymbol{a}_1, \qquad \boldsymbol{a}_4 = \boldsymbol{a}_1 + 3\boldsymbol{a}_3$$

が得られる．ゆえに，$\operatorname{Im} T_A = \langle \boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_3 \rangle$ が成り立つ．さらに，方程式

$$x_1\boldsymbol{a}_1 + x_3\boldsymbol{a}_3 = \boldsymbol{0}$$

を考えると，これは上で $x_2 = x_4 = 0$ とした方程式なので $s = t = 0$ に対応し，$x_1 = x_3 = 0$ という自明な解のみをもつ．よって，$\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_3$ は 1 次独立である．したがって，$\boldsymbol{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$，$\boldsymbol{a}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ が $\operatorname{Im} T_A$ の基底となり，$\dim \operatorname{Im} T_A = 2$ である．

（解答終）

3.3　次元公式とその応用

次の公式は次元公式と呼ばれ，非常に重要な公式である．

定理 3.9.（次元公式）
V が有限次元ならば，線形写像 $f\colon V \longrightarrow W$ に対して，次の等式が成り立つ．

$$\dim \operatorname{Ker} f + \operatorname{rank} f = \dim V$$

証明.　$\operatorname{Ker} f$ の基底 $\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_s$ をとり，これを延長して V の基底 $\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_s, \boldsymbol{v}_{s+1}, \ldots, \boldsymbol{v}_n$ をつくる．このとき，$f(\boldsymbol{v}_{s+1}), \ldots, f(\boldsymbol{v}_n)$ が $\operatorname{Im} f$ の基底であることを示す．

任意の $\boldsymbol{w} \in \operatorname{Im} f$ に対して，$\boldsymbol{w} = f(\boldsymbol{v})$ となる $\boldsymbol{v} \in V$ が存在する．この $\boldsymbol{v}$ を V の基底を用いて

$$\boldsymbol{v} = c_1\boldsymbol{v}_1 + \cdots + c_s\boldsymbol{v}_s + c_{s+1}\boldsymbol{v}_{s+1} + \cdots + c_n\boldsymbol{v}_n \qquad (c_j \in \mathbb{K},\ j = 1, \ldots, n)$$

と表すと，$f(\boldsymbol{v}_j) = \boldsymbol{0}$　$(j = 1, \ldots, s)$ より

$$\begin{aligned} \boldsymbol{w} = f(\boldsymbol{v}) &= f(c_1\boldsymbol{v}_1 + \cdots + c_s\boldsymbol{v}_s + c_{s+1}\boldsymbol{v}_{s+1} + \cdots + c_n\boldsymbol{v}_n) \\ &= c_1 f(\boldsymbol{v}_1) + \cdots + c_s f(\boldsymbol{v}_s) + c_{s+1} f(\boldsymbol{v}_{s+1}) + \cdots + c_n f(\boldsymbol{v}_n) \\ &= c_{s+1} f(\boldsymbol{v}_{s+1}) + \cdots + c_n f(\boldsymbol{v}_n) \end{aligned}$$

となり，$\boldsymbol{w}$ は $f(\boldsymbol{v}_{s+1}), \ldots, f(\boldsymbol{v}_n)$ の 1 次結合で表せる．よって，$f(\boldsymbol{v}_{s+1}), \ldots, f(\boldsymbol{v}_n)$ は $\operatorname{Im} f$ を生成する．

次に $f(\boldsymbol{v}_{s+1}), \ldots, f(\boldsymbol{v}_n)$ が 1 次独立であることを示すため

$$x_{s+1} f(\boldsymbol{v}_{s+1}) + \cdots + x_n f(\boldsymbol{v}_n) = \boldsymbol{0} \qquad (x_j \in \mathbb{K},\ j = s+1, \ldots, n)$$

とする．このとき，f の線形性より左辺は

$$f(x_{s+1}\boldsymbol{v}_{s+1} + \cdots + x_n\boldsymbol{v}_n) = \boldsymbol{0}$$

となるので，$x_{s+1}\boldsymbol{v}_{s+1} + \cdots + x_n\boldsymbol{v}_n \in \operatorname{Ker} f$ である．よって，$\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_s$ が $\operatorname{Ker} f$ の基底であることより，$x_{s+1}\boldsymbol{v}_{s+1} + \cdots + x_n\boldsymbol{v}_n$ は $\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_s$ の 1 次結合で表せる．それを

$$x_{s+1}\boldsymbol{v}_{s+1} + \cdots + x_n\boldsymbol{v}_n = x_1\boldsymbol{v}_1 + \cdots + x_s\boldsymbol{v}_s \qquad (x_j \in \mathbb{K},\ j = 1, \ldots, s)$$

と表せば，移項して

$$-x_1\boldsymbol{v}_1 - \cdots - x_s\boldsymbol{v}_s + x_{s+1}\boldsymbol{v}_{s+1} + \cdots + x_n\boldsymbol{v}_n = \boldsymbol{0}$$

となり，$\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_s, \boldsymbol{v}_{s+1}, \ldots, \boldsymbol{v}_n$ は V の基底だから 1 次独立なので

$$x_1 = \cdots = x_s = x_{s+1} = \cdots = x_n = 0$$

が得られる．ゆえに，自明な解しかもたないので，$f(\boldsymbol{v}_{s+1}), \ldots, f(\boldsymbol{v}_n)$ は 1 次独立である．

以上より，$f(\boldsymbol{v}_{s+1}), \ldots, f(\boldsymbol{v}_n)$ は $\operatorname{Im} f$ の基底であるから

$$\dim \operatorname{Im} f = n - s = \dim V - \dim \operatorname{Ker} f$$

となる．したがって，f の階数とは $\operatorname{rank} f = \dim \operatorname{Im} f$ のことであったから

$$\dim \operatorname{Ker} f + \operatorname{rank} f = \dim V$$

が成り立つ．　□

次元公式を利用して，次の定理が証明される．

定理 3.10. （解空間の次元）
$A \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$ を係数行列とする斉次連立 1 次方程式の解空間の次元は $n - \operatorname{rank} A$ である．

証明． 解空間は $\operatorname{Ker} T_A$ なので，線形写像 $T_A\colon \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ に関する次元公式より

$$\dim \operatorname{Ker} T_A = \dim \mathbb{R}^n - \operatorname{rank} T_A = n - \operatorname{rank} A$$

である． □

命題 3.11. $\dim V = \dim W$ とし，$f\colon V \longrightarrow W$ を線形写像とする．このとき，f が単射または全射ならば，f は同型写像である．

証明． 一般の線形写像 $f\colon V \longrightarrow W$ について，常に

$$\begin{aligned} f: \text{単射} \quad &\Longleftrightarrow \quad \operatorname{Ker} f = \{\mathbf{0}\} \quad \Longleftrightarrow \quad \dim \operatorname{Ker} f = 0 \\ f: \text{全射} \quad &\Longleftrightarrow \quad \operatorname{Im} f = W \quad \Longleftrightarrow \quad \operatorname{rank} f = \dim W \end{aligned}$$

である．よって，仮定より $\dim V = \dim W$ なので，次元公式と合わせて

$$\dim \operatorname{Ker} f + \operatorname{rank} f = \dim V = \dim W$$

であるから

$$f: \text{単射} \quad \Longleftrightarrow \quad \dim \operatorname{Ker} f = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \operatorname{rank} f = \dim W \quad \Longleftrightarrow \quad f: \text{全射}$$

となる．ゆえに，単射であることと全射であることが同値になるので，単射か全射のどちらかをみたせば全単射となる．したがって，$\dim V = \dim W$ ならば，f が単射または全射ならば同型写像である． □

$\mathrm{rank}\, A$ と $\mathrm{rank}\, T_A$ の関係および次元公式を利用すれば，基底を具体的に求めなくても $\mathrm{Im}\, T_A$ や $\mathrm{Ker}\, T_A$ の次元を求めることができる．

例題 3.12. a を実数とする．A を次の行列とするとき，$\mathrm{Ker}\, T_A$ と $\mathrm{Im}\, T_A$ の次元を求めよ．

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & -6 & -7 \\ 3 & 1 & 7 & 7 & 9 \\ 1 & 9 & a+1 & 19 & 11 \\ 2 & 7 & 11 & 15 & a \end{pmatrix}$$

（解答） A の階数を求めるために行基本変形すれば

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & -6 & -7 \\ 3 & 1 & 7 & 7 & 9 \\ 1 & 9 & a+1 & 19 & 11 \\ 2 & 7 & 11 & 15 & a \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 1 列の掃き出し}]{\text{(1,1) 成分による}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & -6 & -7 \\ 0 & -5 & -5 & 25 & 30 \\ 0 & 7 & a-3 & 25 & 18 \\ 0 & 3 & 3 & 27 & a+14 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{\text{第 2 行を } (-1/5) \text{ 倍}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & -6 & -7 \\ 0 & 1 & 1 & -5 & -6 \\ 0 & 7 & a-3 & 25 & 18 \\ 0 & 3 & 3 & 27 & a+14 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[\text{第 2 列の掃き出し}]{\text{(2,2) 成分による}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 4 & 5 \\ 0 & 1 & 1 & -5 & -6 \\ 0 & 0 & a-10 & 60 & 60 \\ 0 & 0 & 0 & 42 & a+32 \end{pmatrix} \quad \cdots (*)$$

となる．

- $a \neq 10$ のとき，$\mathrm{rank}\, A = 4$ であるから，$\mathrm{rank}\, T_A = \dim \mathrm{Im}\, T_A = 4$ となる．また，$T_A \colon \mathbb{R}^5 \longrightarrow \mathbb{R}^4$ に次元公式を適用すれば

$$\dim \mathrm{Ker}\, T_A = \dim \mathbb{R}^5 - \mathrm{rank}\, T_A = 5 - 4 = 1$$

  である．

- $a = 10$ のとき，さらに行基本変形すれば

$$(*) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 4 & 5 \\ 0 & 1 & 1 & -5 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 60 & 60 \\ 0 & 0 & 0 & 42 & 42 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{1/60 倍}]{\text{第 3 行を}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 4 & 5 \\ 0 & 1 & 1 & -5 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 42 & 42 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 4 列の掃き出し}]{\text{(3,4) 成分による}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

  となる．よって，$a = 10$ ならば $\mathrm{rank}\, A = 3$ であるから，$\mathrm{rank}\, T_A = \dim \mathrm{Im}\, T_A = 3$ となる．また，$T_A \colon \mathbb{R}^5 \longrightarrow \mathbb{R}^4$ に次元公式を適用すれば

$$\dim \mathrm{Ker}\, T_A = \dim \mathbb{R}^5 - \mathrm{rank}\, T_A = 5 - 3 = 2$$

  である．

（解答終）

文字式を含んだ行列 A に対して，線形写像 T_A の像や核の基底を具体的に求めるのは面倒なことが多いので，上記のような議論にも慣れておくと便利なことがある．

4　これ以降の線形代数学の内容の流れ

4.1　抽象的ベクトル空間の数ベクトル空間との同一視

定理 2.11 より，実 n 次元ベクトル空間 V は $\mathbb{R}^n$ と同型である．その同型写像 $f\colon V \longrightarrow \mathbb{R}^n$ は，例えば V の基底を $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_n$ とするとき，$\mathbb{R}^n$ の標準基底を用いて

$$f(\boldsymbol{v}_j) = \boldsymbol{e}_j \qquad (j = 1, 2, \ldots, n)$$

で与えられる．ここで，命題 2.5 より，線形写像は V の基底のうつり先を決めるだけで V 全体で一意的に定まることに注意すること．

この同型写像を用いて，抽象的なベクトル空間 V は和とスカラー倍に関して $\mathbb{R}^n$ と同一視できることがわかる．上で述べたことを具体的な例で説明すると，実 4 次元数ベクトル空間 $\mathbb{R}^4$，実数を成分にもつ 2 次正方行列全体 $M_2(\mathbb{R})$，実数係数 3 次以下多項式全体 $P_3(\mathbb{R})$ はすべて 4 次元実ベクトル空間なので

$$\mathbb{R}^4 \cong M_2(\mathbb{R}) \cong P_3(\mathbb{R})$$

と同型になる．この同型対応において，具体的な要素の自然な対応は

$$\begin{array}{ccccc} \mathbb{R}^4 & & M_2(\mathbb{R}) & & P_3(\mathbb{R}) \\ \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} & \longleftrightarrow & \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} & \longleftrightarrow & a + bx + cx^2 + dx^3 \end{array}$$

である．確かに，和についてはそれぞれ

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \\ c_1 \\ d_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_2 \\ b_2 \\ c_2 \\ d_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 + a_2 \\ b_1 + b_2 \\ c_1 + c_2 \\ d_1 + d_2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 + a_2 & b_1 + b_2 \\ c_1 + c_2 & d_1 + d_2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} &(a_1 + b_1 x + c_1 x^2 + d_1 x^3) + (a_2 + b_2 x + c_2 x^2 + d_2 x^3) \\ &\qquad = (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2)x + (c_1 + c_2)x^2 + (d_1 + d_2)x^3 \end{aligned}$$

となり，これは本質的に同じ計算をしている，実際，見た目が「数字を縦に並べて書いた」「数字を正方形の形に並べて書いた」「数字を係数に並べて書いた」と異なるだけである．

スカラー倍についても

$$2\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2a \\ 2b \\ 2c \\ 2d \end{pmatrix} \quad \longleftrightarrow \quad 2\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2a & 2b \\ 2c & 2d \end{pmatrix} \quad \longleftrightarrow \quad \begin{aligned} &2(a + bx + cx^2 + dx^3) \\ &\quad = 2a + 2bx + 2cx^2 + 2dx^3 \end{aligned}$$

と見た目は異なるが，書き方が異なるだけで各成分で行った計算は同じである．この意味において，行列や多項式は縦ベクトルだと思うことができる．一般的な実 n 次元ベクトル空間 V でも，各ベクトル $\boldsymbol{v} \in V$ を基底の 1 次結合で表示し，その係数を縦に並べることで $\mathbb{R}^n$ と同一視できる．

4.2　抽象的ベクトル空間の間の線形写像と行列との同一視

前節で実 4 次元数ベクトル空間 $\mathbb{R}^4$，実数を成分にもつ 2 次正方行列全体 $M_2(\mathbb{R})$，実数係数 3 次以下多項式全体 $P_3(\mathbb{R})$ はすべて 4 次元実ベクトル空間なので同型，すなわちベクトル空間としては同じものと考えてよいことを説明した．

一方，和とスカラー倍以外にはそれぞれの空間で "個性" がある．例えば，行列には「行列の積」「トレース」など多くの概念を，多項式には「多項式の積」「微分・積分」などを考えることができる．特にその演算が線形写像となっているものは，ベクトル空間の同型を用いることで，数ベクトル空間 $\mathbb{R}^n$ の間の線形写像に翻訳することができる．第 3 章で学習したように，すべての線形写像 $f\colon \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^n$ は行列を用いて表せたので，例えば**多項式の微積分は行列で表すことができる**．このように，考察しているベクトル空間において線形性が成り立つような対象に関する問題は，上記の同一視を通すことで行列の問題に帰着できる（第 9 章 5 節の内容）．

やや内容を先取りすれば，写像 $D\colon P_2(\mathbb{R}) \longrightarrow P_2(\mathbb{R})$ を

$$D(f(x)) = (x^2-1)\frac{d^2 f(x)}{dx^2} + (x-2)\frac{df(x)}{dx} - 2f(x)$$

と定めると，例題 2.2 と同様にして，D は $P_2(\mathbb{R})$ 上の線形変換であることが示せる．また

$$D(1) = -2, \qquad D(x) = -2-x, \qquad D(x^2) = -2-4x+2x^2$$

であるから，D の線形性より

$$\begin{aligned} D(a+bx+cx^2) &= aD(1) + bD(x) + cD(x^2) \\ &= a(-2) + b(-2-x) + c(-2-4x+2x^2) \\ &= (-2a-2b-2c) + (-b-4c)x + 2cx^2 \end{aligned}$$

となる．この線形変換 $D\colon P_2(\mathbb{R}) \longrightarrow P_2(\mathbb{R})$ を

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & & P_2(\mathbb{R}) \\ \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} & \longleftrightarrow & a+bx+cx^2 \end{array}$$

という対応により，数ベクトル空間 $\mathbb{R}^3$ で考えれば

$$D\colon \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} -2a-2b-2c \\ -b-4c \\ 2c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & -2 & -2 \\ 0 & -1 & -4 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$$

とみなせるから，この線形変換 D を表す行列は $A = \begin{pmatrix} -2 & -2 & -2 \\ 0 & -1 & -4 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ と考えられる．よって，D の代わりに A を用いてさまざまな量を計算することができる．例えば，線形変換 D を n 回合成した写像 D^n は行列 A^n を求めればよく，$\operatorname{Ker} D$ を求めるには $\operatorname{Ker} T_A$ を計算すればよいことを次節で示す．

どんな線形写像も行列とみなすことができれば，問題の解法はこれまでに学んだものばかりである．ただし，実 n 次元ベクトル空間 V の基底の取り方は 1 つだけではないので，$V \cong \mathbb{R}^n$ の同一視の方法は無限にある．そこで，同一視の結果として簡単な行列が現れるように V の基底の選び方を工夫した方がよい場面が多い．例えば，上の例では A についての n 乗計算は大変そうである．

4.3 線形写像の固有ベクトルと表現行列の対角化

前節に引き続き，$P_2(\mathbb{R})$ 上の線形変換

$$D(f(x)) = (x^2-1)\frac{d^2f(x)}{dx^2} + (x-2)\frac{df(x)}{dx} - 2f(x)$$

について考える．ここで唐突ではあるが，$P_2(\mathbb{R})$ の基底として $1, x, x^2$ でなく

$$g_1(x) = 1, \qquad g_2(x) = -2+x, \qquad g_3(x) = 1-8x+6x^2$$

を選ぶ（これが $P_2(\mathbb{R})$ の基底であることは各自確かめよ）．このやや複雑な基底を通して，次のように $\mathbb{R}^3$ と $P_2(\mathbb{R})$ を同一視する．

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & & P_2(\mathbb{R}) \\ \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} & \longleftrightarrow & ag_1(x)+bg_2(x)+cg_3(x) = a+b(x-2)+c(6x^2-8x+1) \end{array}$$

このとき，例えば x^2 は

$$x^2 = \frac{5}{2} + \frac{4}{3}(x-2) + \frac{1}{6}(6x^2-8x+1) \quad \longleftrightarrow \quad \begin{pmatrix} 5/2 \\ 4/3 \\ 1/6 \end{pmatrix}$$

と対応する．このように，既に計算は大変な予感がするが，この基底を用いた同一視で線形変換 D を行列で表すことにする．

このとき，直接計算により

$$D(g_1(x)) = -2g_1(x), \qquad D(g_2(x)) = -g_2(x), \qquad D(g_3(x)) = 2g_3(x)$$

であることがわかる．ゆえに，基底 $g_1(x), g_2(x), g_3(x)$ を用いて $P_2(\mathbb{R})$ と $\mathbb{R}^3$ を同一視すると

$$\begin{aligned} D(ag_1(x)+bg_2(x)+cg_3(x)) &= aD(g_1(x)) + bD(g_2(x)) + cD(g_3(x)) \\ &= -2ag_1(x) - bg_2(x) + 2cg_3(x) \end{aligned}$$

なので

$$D\colon \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} -2a \\ -b \\ 2c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$$

より，線形写像 D に対応する行列 B は $B = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ となる．この対角行列 B については，これを係数行列とする方程式でも n 乗でも何でも簡単に計算できる．このように線形変換に対して適切な基底を選ぶことで，線形変換を対角行列で表すことを**対角化** という．

ここでは説明のために天下り的に基底 $g_1(x), g_2(x), g_3(x)$ を与えたが，これを自力で見つける方法は第 10 章で扱う．また，よい性質をもつ行列（対称行列）については，特別によい性質をもつ基底を選べるので，その計算手法についても第 12 章で扱う．

ここまでに $P_2(\mathbb{R})$ 上の線形変換

$$D(f(x)) = (x^2-1)\frac{d^2 f(x)}{dx^2} + (x-2)\frac{df(x)}{dx} - 2f(x)$$

を 2 通りの方法で行列で表した．

- $1, x, x^2$ の係数を並べて $\mathbb{R}^3 \cong P_2(\mathbb{R})$ と見たときは $A = \begin{pmatrix} -2 & -2 & -2 \\ 0 & -1 & -4 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$
- $g_1(x), g_2(x), g_3(x)$ の係数を並べて $\mathbb{R}^3 \cong P_2(\mathbb{R})$ と見たときは $B = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

上の方は同一視の方法は簡単だが，行列 A に関する計算が面倒であり，下の方は行列 B に関する計算は簡単だが同一視の方法が複雑である．

そこで，2 組の基底の関係に着目すると，多項式の係数の関係は

$$[g_1(x),\, g_2(x),\, g_3(x)] = [1,\, -2+x,\, 1-8x+6x^2] = [1,\, x,\, x^2] \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -8 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$$

となっている．ここで，$[\cdot]$ という記号を用いたのは，成分が多項式なのでこれまでの数ベクトルとは異なることを強調するためである．このとき

$$P = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -8 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$$

とおくと，直接計算により

$$P^{-1} = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 6 & 12 & 15 \\ 0 & 6 & 8 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad P^{-1}AP = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = B$$

が成り立つことがわかる．これより，“基底の変換規則” を表す行列 P を用いて，よく見た経験があると思われる $P^{-1}AP$ を計算することにより，$B = P^{-1}AP$ と対角化できていることがわかる．

つまり，線形変換 D を表す行列を対角化するには，D にうまく適合した基底 $g_1(x), g_2(x), g_3(x)$ を選び，標準的な基底 $1, x, x^2$ からどのように変換されたものかを調べればよいとわかる．実は，うまく適合した基底を求めるには，対角化したい行列 A の固有値と固有ベクトルを求めればよいことが知られている（実は固有ベクトルを集めたものが上で述べた適合した基底である）．この計算方法を理解し，計算に習熟することが線形代数学の主題の 1 つであり，行列の応用において必須の知識である．

第 10 章で扱うが，λ が行列 A の固有値であるとは $|\lambda E_n - A| = 0$ が成り立つこと，$\boldsymbol{v} \neq \boldsymbol{0}$ が λ に対する A の固有ベクトルであるとは $(A - \lambda E_n)\boldsymbol{v} = \boldsymbol{0}$ が成り立つことである．

この定義から，対角化を実行するためには「文字式を含んだ行列式の計算」「解空間の計算」が必要で，さらに行列が対角化可能かどうかを判定するためには「選んだベクトルが基底となっているか調べるための 1 次独立性の判定および部分空間の直和」の概念が必要になる．さらに，自然科学や工学，統計などでよく現れる対称行列については，よりよい対角化の方法が知られているので，第 11 章で学習する「正規直交基底」「グラム・シュミットの直交化法」も必要となる．行列の対角化にはこれまでに線形代数学で扱った概念を総動員して取り組む必要があるので，ここまでで苦手な内容がある場合には復習を早めにしておくこと．

5　線形写像の表現行列

5.1　表現行列の定義と計算例

以下では V と W を $\mathbb{K}$ 上のベクトル空間とし，$f\colon V \longrightarrow W$ を線形写像とする．

これからはベクトル $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \cdots, \boldsymbol{v}_n$ の順番も考えて並べたものを $[\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \cdots, \boldsymbol{v}_n]$ で表す．つまり

$$[\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \cdots, \boldsymbol{v}_n] = [\boldsymbol{v}'_1, \boldsymbol{v}'_2, \cdots, \boldsymbol{v}'_n] \quad \Longleftrightarrow \quad \boldsymbol{v}_j = \boldsymbol{v}'_j \quad (j = 1, 2, \ldots, n)$$

であり，例えば

$$[\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3, \cdots, \boldsymbol{v}_n] \neq [\boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_3, \cdots, \boldsymbol{v}_n]$$

となる．もし各 $\boldsymbol{v}_k$ が $\mathbb{R}^m$ のベクトルならば，これまでと同様に $[\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \cdots, \boldsymbol{v}_n]$ は $m \times n$ 行列の列ベクトル分解表示とみなせる．一般のベクトル空間の場合には普通の行列とはみなせないので注意すること．

記号的には，ベクトル $\boldsymbol{v} \in V$ の基底 $[\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \cdots, \boldsymbol{v}_n]$ に関する 1 次結合は

$$\boldsymbol{v} = x_1\boldsymbol{v}_1 + x_2\boldsymbol{v}_2 + \cdots + x_n\boldsymbol{v}_n = [\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \cdots, \boldsymbol{v}_n] \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

とあたかも行列の積のように表せる．ここで，右側の縦ベクトルは $x_j \in \mathbb{K}$ より数ベクトルである．

ベクトル空間 V と W の間の線形写像 $f\colon V \longrightarrow W$ に対応する行列を，基底を用いて次のように定める．

定義 5.1.（線形写像の表現行列）
$f\colon V \longrightarrow W$ を線形写像とし，$[\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \cdots, \boldsymbol{v}_n]$ を V の基底，$[\boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{w}_2, \cdots, \boldsymbol{w}_m]$ を W の基底とする．このとき，$j = 1, 2, \ldots, n$ に対して

$$f(\boldsymbol{v}_j) = \sum_{i=1}^{m} a_{ij}\boldsymbol{w}_i \qquad (a_{ij} \in \mathbb{K})$$

により定まる $m \times n$ 行列 $(a_{ij})_{ij}$ を V の基底 $[\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \cdots, \boldsymbol{v}_n]$ と W の基底 $[\boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{w}_2, \cdots, \boldsymbol{w}_m]$ に関する f の表現行列という．

特に $V = W$ で $[\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \cdots, \boldsymbol{v}_n] = [\boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{w}_2, \cdots, \boldsymbol{w}_n]$ の場合，n 次正方行列 $(a_{ij})_{ij}$ を V の基底 $[\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \cdots, \boldsymbol{v}_n]$ に関する線形変換 $f\colon V \longrightarrow V$ の表現行列という．

$f\colon V \longrightarrow W$ を線形写像とし，$[\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \cdots, \boldsymbol{v}_n]$ を V の基底，$[\boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{w}_2, \cdots, \boldsymbol{w}_m]$ を W の基底とするとき，f の表現行列 A とは

$$[f(\boldsymbol{v}_1), f(\boldsymbol{v}_2), \cdots, f(\boldsymbol{v}_n)] = [\boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{w}_2, \cdots, \boldsymbol{w}_m] \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

と表したときの $m \times n$ 行列

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

のことである．

線形写像 $f\colon V \longrightarrow W$ の表現行列は V と W の基底を 1 組決めて初めて定まるものである．そのため，**基底を変えれば当然 f の表現行列は別のものになる．基底を決めずに表現行列を求めることはできないことに注意すること．**

行列 $A=\begin{pmatrix}1&2&3\\4&5&6\end{pmatrix}$ で定まる線形写像を $T_A\colon \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ とする．$\mathbb{R}^3$ の標準基底 $[\boldsymbol{e}_1^{(3)},\boldsymbol{e}_2^{(3)},\boldsymbol{e}_3^{(3)}]$ と $\mathbb{R}^2$ の標準基底 $[\boldsymbol{e}_1^{(2)},\boldsymbol{e}_2^{(2)}]$ に関する T_A の表現行列を求めてみる．ここで，標準基底とは

$$\boldsymbol{e}_1^{(3)}=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},\ \boldsymbol{e}_2^{(3)}=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix},\ \boldsymbol{e}_3^{(3)}=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix},\qquad \boldsymbol{e}_1^{(2)}=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix},\ \boldsymbol{e}_2^{(2)}=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$$

であった．なお，ベクトルの右上の数は成分数を表している（単に $\boldsymbol{e}_1$ と書くと次元がどちらかわからないため）．与えられた基底を線形写像でうつせば

$$T_A(\boldsymbol{e}_1^{(3)})=A\boldsymbol{e}_1^{(3)}=\begin{pmatrix}1&2&3\\4&5&6\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}+4\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}=\boldsymbol{e}_1^{(2)}+4\boldsymbol{e}_2^{(2)}$$

$$T_A(\boldsymbol{e}_2^{(3)})=A\boldsymbol{e}_2^{(3)}=\begin{pmatrix}1&2&3\\4&5&6\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\5\end{pmatrix}=2\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}+5\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}=2\boldsymbol{e}_1^{(2)}+5\boldsymbol{e}_2^{(2)}$$

$$T_A(\boldsymbol{e}_3^{(3)})=A\boldsymbol{e}_3^{(3)}=\begin{pmatrix}1&2&3\\4&5&6\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\6\end{pmatrix}=3\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}+6\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}=3\boldsymbol{e}_1^{(2)}+6\boldsymbol{e}_2^{(2)}$$

より

$$[T_A(\boldsymbol{e}_1^{(3)}),T_A(\boldsymbol{e}_2^{(3)}),T_A(\boldsymbol{e}_3^{(3)})]=[\boldsymbol{e}_1^{(2)},\boldsymbol{e}_1^{(2)}]\begin{pmatrix}1&2&3\\4&5&6\end{pmatrix}$$

が成り立つから，$\mathbb{R}^3$ の標準基底 $[\boldsymbol{e}_1^{(3)},\boldsymbol{e}_2^{(3)},\boldsymbol{e}_3^{(3)}]$ と $\mathbb{R}^2$ の標準基底 $[\boldsymbol{e}_1^{(2)},\boldsymbol{e}_2^{(2)}]$ に関する T_A の表現行列は $\begin{pmatrix}1&2&3\\4&5&6\end{pmatrix}$ であり，これは A と一致する．

次に，$\mathbb{R}^3$ の基底 $[\boldsymbol{v}_1,\boldsymbol{v}_2,\boldsymbol{v}_3]$ と $\mathbb{R}^2$ の基底 $[\boldsymbol{w}_1,\boldsymbol{w}_2]$ に関する T_A の表現行列を求めてみる．ここで

$$\boldsymbol{v}_1=\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix},\ \boldsymbol{v}_2=\begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix},\ \boldsymbol{v}_3=\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix},\qquad \boldsymbol{w}_1=\begin{pmatrix}2\\5\end{pmatrix},\ \boldsymbol{w}_2=\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}$$

とする．与えられた基底を線形写像でうつせば

$$T_A(\boldsymbol{v}_1)=A\boldsymbol{v}_1=\begin{pmatrix}1&2&3\\4&5&6\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4\\10\end{pmatrix}=2\begin{pmatrix}2\\5\end{pmatrix}=2\boldsymbol{w}_1$$

$$T_A(\boldsymbol{v}_2)=A\boldsymbol{v}_2=\begin{pmatrix}1&2&3\\4&5&6\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4\\13\end{pmatrix}=-\begin{pmatrix}2\\5\end{pmatrix}+6\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}=-\boldsymbol{w}_1+6\boldsymbol{w}_2$$

$$T_A(\boldsymbol{v}_3)=A\boldsymbol{v}_3=\begin{pmatrix}1&2&3\\4&5&6\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5\\11\end{pmatrix}=4\begin{pmatrix}2\\5\end{pmatrix}-3\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}=4\boldsymbol{w}_1-3\boldsymbol{w}_2$$

より

$$[T_A(\boldsymbol{v}_1),T_A(\boldsymbol{v}_2),T_A(\boldsymbol{v}_3)]=[\boldsymbol{w}_1,\boldsymbol{w}_2]\begin{pmatrix}2&-1&4\\0&6&-3\end{pmatrix}$$

が成り立つから，$\mathbb{R}^3$ の基底 $[\boldsymbol{v}_1,\boldsymbol{v}_2,\boldsymbol{v}_3]$ と $\mathbb{R}^2$ の基底 $[\boldsymbol{w}_1,\boldsymbol{w}_2]$ に関する T_A の表現行列は $\begin{pmatrix}2&-1&4\\0&6&-3\end{pmatrix}$ である．このように考える基底を取り換えると線形写像の表現行列も別の行列になる．

例 5.2. （行列で定まる線形写像の標準基底に関する表現行列）

$A=(a_{ij})\in M_{m\times n}(\mathbb{R})$ から定まる線形写像

$$T_A\colon \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m, \qquad T_A(\boldsymbol{x})=A\boldsymbol{x}$$

に対して，$\mathbb{R}^n$ の標準基底 $[\boldsymbol{e}_1^{(n)},\boldsymbol{e}_2^{(n)},\cdots,\boldsymbol{e}_n^{(n)}]$ と $\mathbb{R}^m$ の標準基底 $[\boldsymbol{e}_1^{(m)},\boldsymbol{e}_2^{(m)},\cdots,\boldsymbol{e}_m^{(m)}]$ に関する表現行列を求めてみる（ベクトルの右上の数は成分数を表している）．

$A=\begin{pmatrix}\boldsymbol{a}_1 & \boldsymbol{a}_2 & \cdots & \boldsymbol{a}_n\end{pmatrix}$ と列ベクトルに分解すると

$$T_A(\boldsymbol{e}_1^{(n)})=A\boldsymbol{e}_1^{(n)}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{a}_1 & \boldsymbol{a}_2 & \cdots & \boldsymbol{a}_n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix}=\boldsymbol{a}_1=\begin{pmatrix}a_{11}\\a_{21}\\\vdots\\a_{m1}\end{pmatrix}=a_{11}\boldsymbol{e}_1^{(m)}+a_{21}\boldsymbol{e}_2^{(m)}+\cdots+a_{m1}\boldsymbol{e}_m^{(m)}$$

となる．同様にして計算すれば

$$T_A(\boldsymbol{e}_j^{(n)})=A\boldsymbol{e}_j^{(n)}=a_{1j}\boldsymbol{e}_1^{(m)}+a_{2j}\boldsymbol{e}_2^{(m)}+\cdots+a_{mj}\boldsymbol{e}_m^{(m)} \qquad (j=1,2,\ldots,n)$$

が成り立つ．よって

$$[T_A(\boldsymbol{e}_1^{(n)}),T_A(\boldsymbol{e}_2^{(n)}),\cdots,T_A(\boldsymbol{e}_n^{(n)})]=[\boldsymbol{e}_1^{(m)},\boldsymbol{e}_2^{(m)},\cdots,\boldsymbol{e}_m^{(m)}]\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn}\end{pmatrix}$$

と表せるので，$\mathbb{R}^n$ の標準基底 $[\boldsymbol{e}_1^{(n)},\boldsymbol{e}_2^{(n)},\cdots,\boldsymbol{e}_n^{(n)}]$ と $\mathbb{R}^m$ の標準基底 $[\boldsymbol{e}_1^{(m)},\boldsymbol{e}_2^{(m)},\cdots,\boldsymbol{e}_m^{(m)}]$ に関する T_A の表現行列は A となる．この結果は線形写像の定義を振り返ると当たり前のことなので．これを納得するまで表現行列の定義と前の例を含めて見直すこと．

なお，このような計算に慣れてくれば，形式的には

$$[T_A(\boldsymbol{e}_1^{(n)}),T_A(\boldsymbol{e}_2^{(n)}),\cdots,T_A(\boldsymbol{e}_n^{(n)})]=[\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\cdots,\boldsymbol{a}_n]=A=E_mA=[\boldsymbol{e}_1^{(m)},\boldsymbol{e}_2^{(m)},\cdots,\boldsymbol{e}_m^{(m)}]A$$

のように計算して，表現行列が A であることを求めてもよい．

例 5.3. （恒等写像の表現行列）

V をベクトル空間とし，$[\boldsymbol{v}_1,\boldsymbol{v}_2,\cdots,\boldsymbol{v}_n]$ を V の基底とする．このとき，V の恒等写像 $\mathrm{id}_V\colon V\longrightarrow V$ については

$$\mathrm{id}_V(\boldsymbol{v}_j)=\boldsymbol{v}_j \qquad (j=1,2,\ldots,n)$$

となる．よって

$$[\mathrm{id}_V(\boldsymbol{v}_1),\mathrm{id}_V(\boldsymbol{v}_2),\cdots,\mathrm{id}_V(\boldsymbol{v}_n)]=[\boldsymbol{v}_1,\boldsymbol{v}_2,\cdots,\boldsymbol{v}_n]\begin{pmatrix}1 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & 1 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & 1\end{pmatrix}$$

と表せるから，$[\boldsymbol{v}_1,\boldsymbol{v}_2,\cdots,\boldsymbol{v}_n]$ に関する id_V の表現行列は単位行列 E_n となる．

これはすべてのベクトルを変化させない恒等写像 id_V と，すべての数ベクトルにかけても変わらない単位行列 E_n が対応していることを意味している．

例題 5.4.　線形変換 $D\colon P_2(\mathbb{R}) \longrightarrow P_2(\mathbb{R})$ を

$$D(f(x)) = (x-1)\frac{df(x)}{dx} - 2f(x)$$

で定める．このとき，$P_2(\mathbb{R})$ の基底 $[1, x, x^2]$ に関する D の表現行列を求めよ．

（解答）　与えられた基底を D でうつせば

$$D(1) = (x-1)\cdot 0 - 2\cdot 1 = -2$$
$$D(x) = (x-1)\cdot 1 - 2x = -1 - x$$
$$D(x^2) = (x-1)\cdot 2x - 2x^2 = -2x$$

である．よって

$$[D(1),\, D(x),\, D(x^2)] = [1,\, x,\, x^2]\begin{pmatrix} -2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

と表せるので，線形変換 D の基底 $[1, x, x^2]$ に関する表現行列は $\begin{pmatrix} -2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ である．

（解答終）

例題 5.5.　a を実数とし，線形変換 $F\colon P_3(\mathbb{R}) \longrightarrow P_3(\mathbb{R})$ を

$$F(f(x)) = f(x-a)$$

で定める．このとき，$P_3(\mathbb{R})$ の基底 $[1, x, x^2, x^3]$ に関する F の表現行列を求めよ．

（解答）　与えられた基底を F でうつせば

$$F(1) = 1$$
$$F(x) = x - a = -a + x$$
$$F(x^2) = (x-a)^2 = a^2 - 2ax + x^2$$
$$F(x^3) = (x-a)^3 = -a^3 + 3a^2x - 3ax^2 + x^3$$

である．よって

$$[F(1),\, F(x),\, F(x^2),\, F(x^3)] = [1,\, x,\, x^2,\, x^3]\begin{pmatrix} 1 & -a & a^2 & -a^3 \\ 0 & 1 & -2a & 3a^2 \\ 0 & 0 & 1 & -3a \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

と表せるので，線形変換 F の基底 $[1, x, x^2, x^3]$ に関する表現行列は $\begin{pmatrix} 1 & -a & a^2 & -a^3 \\ 0 & 1 & -2a & 3a^2 \\ 0 & 0 & 1 & -3a \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ である．

（解答終）

例題 5.6. 線形変換 $F\colon P_2(\mathbb{R}) \longrightarrow P_2(\mathbb{R})$ を

$$F(f(x)) = 15\int_{-1}^{1} (x-t)^2 f(t)\,dt$$

で定める．このとき，$P_2(\mathbb{R})$ の基底 $[1, x, x^2]$ に関する F の表現行列を求めよ．

（解答） 与えられた基底を F でうつせば

$$F(1) = 15\int_{-1}^{1} (x-t)^2\,dt = 15\int_{-1}^{1} (x^2 - 2xt + t^2)\,dt = 30x^2 + 10$$

$$F(x) = 15\int_{-1}^{1} (x-t)^2 t\,dt = 15\int_{-1}^{1} (x^2 t - 2xt^2 + t^3)\,dt = -20x$$

$$F(x^2) = 15\int_{-1}^{1} (x-t)^2 t^2\,dt = 15\int_{-1}^{1} (x^2t^2 - 2xt^3 + t^4)\,dt = 10x^2 + 6$$

である．よって

$$[F(1),\, F(x),\, F(x^2)] = [1,\, x,\, x^2] \begin{pmatrix} 10 & 0 & 6 \\ 0 & -20 & 0 \\ 30 & 0 & 10 \end{pmatrix}$$

と表せるので，線形変換 F の基底 $[1, x, x^2]$ に関する表現行列は $\begin{pmatrix} 10 & 0 & 6 \\ 0 & -20 & 0 \\ 30 & 0 & 10 \end{pmatrix}$ である．

（解答終）

例題 5.7. 線形写像 $D\colon P_2(\mathbb{R}) \longrightarrow P_3(\mathbb{R})$ を

$$D(f(x)) = x^2\,\frac{d^2 f(x)}{dx^2} - x\,\frac{df(x)}{dx} + f(0)x^3$$

で定める．このとき，$P_2(\mathbb{R})$ の基底 $[1, x, x^2]$ と $P_3(\mathbb{R})$ の基底 $[1, x, x^2, x^3]$ に関する D の表現行列を求めよ．

（解答） 与えられた基底を D でうつせば

$$D(1) = 0 - 0 + x^3 = x^3$$

$$D(x) = 0 - x \cdot 1 + 0 = -x$$

$$D(x^2) = x^2 \cdot 2 - x \cdot 2x + 0 = 0$$

である．よって

$$[D(1),\, D(x),\, D(x^2)] = [1,\, x,\, x^2,\, x^3] \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

と表せるので，線形写像 D の $P_2(\mathbb{R})$ の基底 $[1, x, x^2]$ と $P_3(\mathbb{R})$ の基底 $[1, x, x^2, x^3]$ に関する表現行列は $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ である．

（解答終）

例題 5.8. $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & -3 & 3 \\ 2 & 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$ に対して，次の $\mathbb{R}^4$ の基底 $[\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3, \boldsymbol{v}_4]$ と $\mathbb{R}^3$ の基底 $[\boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{w}_2, \boldsymbol{w}_3]$

$$\boldsymbol{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},\ \boldsymbol{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},\ \boldsymbol{v}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},\ \boldsymbol{v}_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{w}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},\ \boldsymbol{w}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},\ \boldsymbol{w}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

に関する線形写像 $T_A\colon \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ の表現行列 B を求めよ.

（解答） $P = \begin{pmatrix} \boldsymbol{v}_1 & \boldsymbol{v}_2 & \boldsymbol{v}_3 & \boldsymbol{v}_4 \end{pmatrix}$, $Q = \begin{pmatrix} \boldsymbol{w}_1 & \boldsymbol{w}_2 & \boldsymbol{w}_3 \end{pmatrix}$ とおく．表現行列の定義より

$$[T_A(\boldsymbol{v}_1), T_A(\boldsymbol{v}_2), T_A(\boldsymbol{v}_3), T_A(\boldsymbol{v}_4)] = [\boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{w}_2, \boldsymbol{w}_3]B = QB$$

であり

$$[T_A(\boldsymbol{v}_1), T_A(\boldsymbol{v}_2), T_A(\boldsymbol{v}_3), T_A(\boldsymbol{v}_4)] = [A\boldsymbol{v}_1, A\boldsymbol{v}_2, A\boldsymbol{v}_3, A\boldsymbol{v}_4] = A[\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3, \boldsymbol{v}_4] = AP$$

となるから

$$QB = AP$$

が成り立つ．ここで

$$AP = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & -3 & 3 \\ 2 & 1 & -1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 3 \\ 5 & 3 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

であるから

$$(Q \,|\, AP) = \left(\begin{array}{ccc|cccc} 1 & 1 & 1 & 3 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & 3 & 2 & 3 \end{array}\right) \xrightarrow[\text{第 2 列の掃き出し}]{\text{(2,2) 成分による}} \left(\begin{array}{ccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 4 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & 3 & 2 & 3 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[\text{第 3 列の掃き出し}]{\text{(3,3) 成分による}} \left(\begin{array}{ccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 4 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & -6 & -2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & 3 & 2 & 3 \end{array}\right)$$

となる．ゆえに

$$B = Q^{-1}AP = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 1 & -3 \\ -6 & -2 & -2 & 0 \\ 5 & 3 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

である.

（解答終）

後の定理 5.21 で示すように，T_A の表現行列を計算するときには与えられた基底を並べて正則行列を作り，$Q^{-1}AP$ を計算すればよい．ただし，A が正方行列である場合にはどちらが P でどちらが Q かを間違えやすいので，いつも上のように定義に基づいて考える方がミスが少ない．なお，途中で

$$Q^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

と求めて直接 $Q^{-1}AP$ を計算する方がやっていることはわかりやすいが，効率上はあまりよくない．ただし，今回は Q^{-1} が簡単に求まるので，掃き出し法でミスが多い人は Q^{-1} を求めて確かに逆行列になっていることを検算するのも悪い解法ではない.

例題 5.9. $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ とし，写像 $F\colon M_2(\mathbb{R}) \longrightarrow M_2(\mathbb{R})$ を

$$F(X) = AX - XA \qquad (X \in M_2(\mathbb{R}))$$

で定める．

(1) F は $M_2(\mathbb{R})$ 上の線形変換であることを示せ．

(2) $M_2(\mathbb{R})$ の基底 $[E_{11}, E_{12}, E_{21}, E_{22}]$ に関する F の表現行列を求めよ．ただし

$$E_{11} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad E_{12} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad E_{21} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad E_{22} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

である．

（解答）

(1) 任意の $X, Y \in M_2(\mathbb{R})$ と $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ に対して

$$\begin{aligned} F(\alpha X + \beta Y) &= A(\alpha X + \beta Y) - (\alpha X + \beta Y)A \\ &= \alpha(AX - XA) + \beta(AY - YA) = \alpha F(X) + \beta F(Y) \end{aligned}$$

が成り立つ．よって，F は $M_2(\mathbb{R})$ 上の線形変換である．

(2) 与えられた基底を F でうつせば

$$F(E_{11}) = AE_{11} - E_{11}A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} = -2E_{12} + 3E_{21}$$

$$F(E_{12}) = AE_{12} - E_{12}A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & -3 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = -3E_{11} - 3E_{12} + 3E_{22}$$

$$F(E_{21}) = AE_{21} - E_{21}A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 4 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} = 2E_{11} + 3E_{21} - 2E_{22}$$

$$F(E_{22}) = AE_{22} - E_{22}A = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -3 & 0 \end{pmatrix} = 2E_{12} - 3E_{21}$$

である．よって

$$[F(E_{11}),\, F(E_{12}),\, F(E_{21}),\, F(E_{22})] = [E_{11},\, E_{12},\, E_{21},\, E_{22}] \begin{pmatrix} 0 & -3 & 2 & 0 \\ -2 & -3 & 0 & 2 \\ 3 & 0 & 3 & -3 \\ 0 & 3 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

と表せるので，線形変換 F の基底 $[E_{11}, E_{12}, E_{21}, E_{22}]$ に関する表現行列は $\begin{pmatrix} 0 & -3 & 2 & 0 \\ -2 & -3 & 0 & 2 \\ 3 & 0 & 3 & -3 \\ 0 & 3 & -2 & 0 \end{pmatrix}$ である．

（解答終）

例題 5.10. $f\colon V \longrightarrow V$ は $\mathbb{K}$ 上のベクトル空間 V の線形変換で $f = f^2\,(= f\circ f)$ をみたすとする．

(1) $V = \operatorname{Ker} f \oplus \operatorname{Im} f$ であることを示せ．

(2) V は有限次元とする．このとき，V の基底を適当に選べば，その基底に関する f の表現行列を

$$\begin{pmatrix} E_r & O \\ O & O \end{pmatrix} \qquad (r = \operatorname{rank} f)$$

の形にできることを示せ．

（解答）

(1) 任意の $\boldsymbol{v} \in \operatorname{Ker} f \cap \operatorname{Im} f$ をとる．このとき，$\boldsymbol{v} \in \operatorname{Ker} f$ より $f(\boldsymbol{v}) = \boldsymbol{0}$ であり，$\boldsymbol{v} \in \operatorname{Im} f$ なので $\boldsymbol{v} = f(\boldsymbol{w})$ となる $\boldsymbol{w} \in V$ が存在する．よって，$f = f^2$ であるから

$$\boldsymbol{0} = f(\boldsymbol{v}) = f\bigl(f(\boldsymbol{w})\bigr) = f^2(\boldsymbol{w}) = f(\boldsymbol{w}) = \boldsymbol{v}$$

より，$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{0}$ である．ゆえに $\operatorname{Ker} f \cap \operatorname{Im} f = \{\boldsymbol{0}\}$ が成り立つ．

次に，$V = \operatorname{Ker} f + \operatorname{Im} f$ であることを示す．任意の $\boldsymbol{v} \in V$ をとると，これは

$$\boldsymbol{v} = \bigl(\boldsymbol{v} - f(\boldsymbol{v})\bigr) + f(\boldsymbol{v})$$

と表せる．ここで，$f = f^2$ より

$$f\bigl(\boldsymbol{v} - f(\boldsymbol{v})\bigr) = f(\boldsymbol{v}) - f^2(\boldsymbol{v}) = f(\boldsymbol{v}) - f(\boldsymbol{v}) = \boldsymbol{0}$$

なので，$\boldsymbol{v} - f(\boldsymbol{v}) \in \operatorname{Ker} f$ である．また，$f(\boldsymbol{v}) \in \operatorname{Im} f$ であるから

$$\boldsymbol{v} = \bigl(\boldsymbol{v} - f(\boldsymbol{v})\bigr) + f(\boldsymbol{v}) \in \operatorname{Ker} f + \operatorname{Im} f$$

となり，$V = \operatorname{Ker} f + \operatorname{Im} f$ が成り立つ．

したがって，定理 5.11 より $V = \operatorname{Ker} f \oplus \operatorname{Im} f$ が成り立つ．

(2) $\dim \operatorname{Im} f = \operatorname{rank} f = r$ なので，$\operatorname{Im} f$ の基底 $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_r$ がとれる．また，$\dim V = n$ とおけば (1) より，$\dim \operatorname{Ker} f = n - r$ である．よって，$\operatorname{Ker} f$ の基底 $\boldsymbol{v}_{r+1}, \boldsymbol{v}_{r+2}, \ldots, \boldsymbol{v}_n$ をとれば，$\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_n$ は V の基底となる．この基底 $[\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_n]$ に関する f の表現行列は，(1) の $V = \operatorname{Ker} f \oplus \operatorname{Im} f$ の具体的な分解式より

$$f(\boldsymbol{v}_j) = \boldsymbol{v}_j \quad (j = 1, 2, \ldots, r), \qquad f(\boldsymbol{v}_j) = \boldsymbol{0} \quad (j = r+1, r+2, \ldots, n)$$

となるから

$$[f(\boldsymbol{v}_1), \cdots, f(\boldsymbol{v}_r), f(\boldsymbol{v}_{r+1}), \cdots, f(\boldsymbol{v}_n)] = [\boldsymbol{v}_1, \cdots, \boldsymbol{v}_r, \boldsymbol{v}_{r+1}, \cdots, \boldsymbol{v}_n] \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

より，$\begin{pmatrix} E_r & O \\ O & O \end{pmatrix}$ の形である．

（解答終）

5.2　表現行列の意味と性質

線形写像に対して表現行列を導入したが，これが表す意味を考察する．V と W を $\mathbb{K}$ 上のベクトル空間，$f\colon V \longrightarrow W$ を線形写像とする．さらに $[\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \cdots, \boldsymbol{v}_n]$ を V の基底，$[\boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{w}_2, \cdots, \boldsymbol{w}_m]$ を W の基底とし，これらの基底に関する線形写像 f の表現行列を $A = (a_{ij})$ とする．つまり

$$[f(\boldsymbol{v}_1), f(\boldsymbol{v}_2), \cdots, f(\boldsymbol{v}_n)] = [\boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{w}_2, \cdots, \boldsymbol{w}_m]A$$

である．ここで，V や W は数ベクトル空間 $\mathbb{R}^n$ とは限らないので，f は一般に行列から定まる線形写像ではない．前ページまでの多項式空間の線形変換 D などを想定して読むとよい．

任意のベクトル $\boldsymbol{v} \in V$ をとる．このとき，$\boldsymbol{v}$ は

$$\boldsymbol{v} = x_1\boldsymbol{v}_1 + x_2\boldsymbol{v}_2 + \cdots + x_n\boldsymbol{v}_n \qquad (x_j \in \mathbb{K},\ j = 1, 2, \ldots, n)$$

と V の基底 $[\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \cdots, \boldsymbol{v}_n]$ の 1 次結合で一意的に表せる．また，$f(\boldsymbol{v}) \in W$ も

$$f(\boldsymbol{v}) = y_1\boldsymbol{w}_1 + y_2\boldsymbol{w}_2 + \cdots + y_m\boldsymbol{w}_m \qquad (y_k \in \mathbb{K},\ k = 1, 2, \ldots, m)$$

と W の基底 $[\boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{w}_2, \cdots, \boldsymbol{w}_m]$ の 1 次結合で一意的に表せる．そこで，数ベクトルを

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^n, \qquad \vec{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^m$$

とおき，$\vec{x}$ と $\vec{y}$ の関係を調べてみる．ここで，数ベクトルであることを強調するためベクトルを矢印で表した．

このとき，ベクトル $\boldsymbol{v}$ を線形写像 f で写せば，表現行列の定義も用いて

$$\begin{aligned} f(\boldsymbol{v}) &= f(x_1\boldsymbol{v}_1 + x_2\boldsymbol{v}_2 + \cdots + x_n\boldsymbol{v}_n) \\ &= x_1 f(\boldsymbol{v}_1) + x_2 f(\boldsymbol{v}_2) + \cdots + x_n f(\boldsymbol{v}_n) \\ &= [f(\boldsymbol{v}_1), f(\boldsymbol{v}_2), \cdots, f(\boldsymbol{v}_n)] \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = [\boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{w}_2, \cdots, \boldsymbol{w}_m]A\vec{x} \end{aligned}$$

が成り立つ．一方，$\vec{y}$ を用いれば

$$f(\boldsymbol{v}) = y_1\boldsymbol{w}_1 + y_2\boldsymbol{w}_2 + \cdots + y_m\boldsymbol{w}_m = [\boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{w}_2, \cdots, \boldsymbol{w}_m] \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix} = [\boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{w}_2, \cdots, \boldsymbol{w}_m]\vec{y}$$

とも表せる．こうして $f(\boldsymbol{v})$ の 2 通りの表示を得たが，W の基底 $[\boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{w}_2, \cdots, \boldsymbol{w}_m]$ の 1 次結合による表示は一意的なので，これらの結果より

$$\vec{y} = A\vec{x}$$

が成り立つ．

これより，$f(\boldsymbol{v})$ を W の基底 $[\boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{w}_2, \cdots, \boldsymbol{w}_m]$ の 1 次結合で表した係数を求めるには，行列 A と数ベクトル $\vec{x}$ の積を計算すればよい．つまり，基底の 1 次結合で表した係数に着目して数ベクトルの世界で考えたときに，線形写像 f に対応するのが表現行列から定まる数ベクトル空間の間の線形写像 T_A となっている．

線形写像の合成写像や逆写像について，表現行列は次のようになる．

定理 5.11. （合成写像の表現行列）

$f\colon V \longrightarrow W,\ g\colon W \longrightarrow Z$ をともに線形写像とし，$[\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \cdots, \boldsymbol{v}_n]$, $[\boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{w}_2, \cdots, \boldsymbol{w}_m]$, $[\boldsymbol{z}_1, \boldsymbol{z}_2, \cdots, \boldsymbol{z}_l]$ をそれぞれ V, W, Z の基底とする．このとき

- V の基底 $[\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \cdots, \boldsymbol{v}_n]$ と W の基底 $[\boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{w}_2, \cdots, \boldsymbol{w}_m]$ に関する f の表現行列を A
- W の基底 $[\boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{w}_2, \cdots, \boldsymbol{w}_m]$ と Z の基底 $[\boldsymbol{z}_1, \boldsymbol{z}_2, \cdots, \boldsymbol{z}_l]$ に関する g の表現行列を B
- V の基底 $[\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \cdots, \boldsymbol{v}_n]$ と Z の基底 $[\boldsymbol{z}_1, \boldsymbol{z}_2, \cdots, \boldsymbol{z}_l]$ に関する合成写像 $g \circ f$ の表現行列を C

とすれば

$$C = BA$$

が成り立つ．

証明. 　表現行列の定義より

$$[f(\boldsymbol{v}_1), f(\boldsymbol{v}_2), \cdots, f(\boldsymbol{v}_n)] = [\boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{w}_2, \cdots, \boldsymbol{w}_m]A, \qquad [g(\boldsymbol{w}_1), g(\boldsymbol{w}_2), \cdots, g(\boldsymbol{w}_m)] = [\boldsymbol{z}_1, \boldsymbol{z}_2, \cdots, \boldsymbol{z}_l]B$$

であるから，左側の式の両辺を g で写せば

$$[g(f(\boldsymbol{v}_1)), g(f(\boldsymbol{v}_2)), \cdots, g(f(\boldsymbol{v}_n))] = [g(\boldsymbol{w}_1), g(\boldsymbol{w}_2), \cdots, g(\boldsymbol{w}_m)]A = [\boldsymbol{z}_1, \boldsymbol{z}_2, \cdots, \boldsymbol{z}_l]BA$$

より

$$[(g \circ f)(\boldsymbol{v}_1), (g \circ f)(\boldsymbol{v}_2), \cdots, (g \circ f)(\boldsymbol{v}_n)] = [\boldsymbol{z}_1, \boldsymbol{z}_2, \cdots, \boldsymbol{z}_l]BA$$

となる．よって，$[\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \cdots, \boldsymbol{v}_n]$ と $[\boldsymbol{z}_1, \boldsymbol{z}_2, \cdots, \boldsymbol{z}_l]$ に関する $g \circ f$ の表現行列は BA である． □

定理 5.12. （逆写像の表現行列）

$f\colon V \longrightarrow W$ を同型写像とし，$[\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \cdots, \boldsymbol{v}_n]$ を V の基底，$[\boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{w}_2, \cdots, \boldsymbol{w}_n]$ を W の基底とする．このとき

- V の基底 $[\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \cdots, \boldsymbol{v}_n]$ と W の基底 $[\boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{w}_2, \cdots, \boldsymbol{w}_n]$ に関する f の表現行列を A
- W の基底 $[\boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{w}_2, \cdots, \boldsymbol{w}_n]$ と V の基底 $[\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \cdots, \boldsymbol{v}_n]$ に関する逆写像 f^{-1} の表現行列を B

とすれば，A は正則行列で

$$B = A^{-1}$$

が成り立つ．

証明. 　定理 5.11 より，基底 $[\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \cdots, \boldsymbol{v}_n]$ に関する V の線形変換 $f^{-1} \circ f$ の表現行列は BA となる．

一方，$f^{-1} \circ f = \mathrm{id}_V$ であるから，基底 $[\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \cdots, \boldsymbol{v}_n]$ に関する $f^{-1} \circ f$ の表現行列は E_n でもある．よって，$BA = E_n$ が成り立つ．ここで，A と B はともに n 次正方行列であるから，A は正則であり，$B = A^{-1}$ である． □

これより，線形写像の合成には表現行列の積が対応し，逆写像の表現行列には逆行列が対応する．これは数ベクトル空間の間の線形写像の場合と同様の性質が成り立つことを表している．

5.3　一般の線形写像の核と像の計算例

線形写像 $f\colon V \longrightarrow W$ の核 $\operatorname{Ker} f$ や像 $\operatorname{Im} f$ の基底を求めるには，V と W の基底を 1 組選んで f の表現行列 A を作り，その行列 A から定まる線形写像 T_A に関する $\operatorname{Ker} T_A$ や $\operatorname{Im} T_A$ の基底を求めればよい．最後に，選んだ基底を通してその数ベクトルと対応する V や W のベクトルを作ることで，$\operatorname{Ker} f$ や $\operatorname{Im} f$ の基底が得られる．具体例を通して計算法を身につけること．

例題 5.13.　線形変換 $D\colon P_2(\mathbb{R}) \longrightarrow P_2(\mathbb{R})$ を

$$D(f(x)) = (x^2-1)\frac{d^2 f(x)}{dx^2} + (2x-8)\frac{df(x)}{dx} - 6f(x)$$

で定める．このとき，$\operatorname{Ker} D$ の次元と基底を求めよ．

（解答）　$P_2(\mathbb{R})$ の基底 $[1, x, x^2]$ に関する D の表現行列 A を求める．この基底を D で写せば

$$D(1) = -6, \qquad D(x) = -8-4x, \qquad D(x^2) = -2-16x$$

であるから

$$[D(1),\, D(x),\, D(x^2)] = [1,\, x,\, x^2]\begin{pmatrix} -6 & -8 & -2 \\ 0 & -4 & -16 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \therefore\ A = \begin{pmatrix} -6 & -8 & -2 \\ 0 & -4 & -16 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

が得られる．

$\operatorname{Ker} T_A$ は方程式 $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ の解空間である．そこで，係数行列 A を簡約階段行列に行基本変形すれば

$$\begin{pmatrix} -6 & -8 & -2 \\ 0 & -4 & -16 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 2 行を } (-1/4) \text{ 倍}]{\text{第 1 行を } (-1/2) \text{ 倍}} \begin{pmatrix} 3 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[\text{第 2 列の掃き出し}]{\text{(2,2) 成分による}} \begin{pmatrix} 3 & 0 & -15 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{第 1 行を } 1/3 \text{ 倍}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -5 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

より，解は

$$\boldsymbol{x} = t\begin{pmatrix} 5 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad (t \in \mathbb{R})$$

と表せる．よって，$\begin{pmatrix} 5 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix}$ が $\operatorname{Ker} T_A$ を生成し，さらに 1 次独立なので，$\operatorname{Ker} T_A$ の基底となる．

ゆえに，$P_2(\mathbb{R})$ の基底 $[1, x, x^2]$ を通して $\operatorname{Ker} T_A$ の基底と対応する多項式を作れば，$\operatorname{Ker} D$ の基底は

$$[1,\, x,\, x^2]\begin{pmatrix} 5 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix} = 5 - 4x + x^2$$

となる．したがって，$\dim \operatorname{Ker} D = 1$ である．

（解答終）

求めた $\operatorname{Ker} D$ の基底を実際に D に代入してみると

$$D(x^2-4x+5) = (x^2-1)\cdot 2 + (2x-8)(2x-4) - 6(x^2-4x+5) = 0$$

となる．よって，x^2-4x+5 は確かに $\operatorname{Ker} D$ のベクトルとなっている．基底を求めた後は，必ずこのように検算すること．

例題 5.14. 線形変換 $D\colon P_2(\mathbb{R}) \longrightarrow P_2(\mathbb{R})$ を

$$D(f(x)) = 2\,\frac{df(x)}{dx} + (2x+1)f(2)$$

で定める．このとき，$\operatorname{Ker} D$ の次元と基底を求めよ．

（解答） $P_2(\mathbb{R})$ の基底 $[1, x, x^2]$ に関する D の表現行列 A を求める．この基底を D で写せば

$$D(1) = 1 + 2x, \qquad D(x) = 4 + 4x, \qquad D(x^2) = 4 + 12x$$

であるから

$$[D(1),\, D(x),\, D(x^2)] = [1,\, x,\, x^2]\begin{pmatrix}1 & 4 & 4\\ 2 & 4 & 12\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix} \qquad \therefore\ A = \begin{pmatrix}1 & 4 & 4\\ 2 & 4 & 12\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

が得られる．

$\operatorname{Ker} T_A$ は方程式 $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ の解空間である．そこで，係数行列 A を簡約階段行列に行基本変形すれば

$$\begin{pmatrix}1 & 4 & 4\\ 2 & 4 & 12\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 1 列の掃き出し}]{\text{(1,1) 成分による}} \begin{pmatrix}1 & 4 & 4\\ 0 & -4 & 4\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{\text{第 2 行を } (-1/4) \text{ 倍}} \begin{pmatrix}1 & 4 & 4\\ 0 & 1 & -1\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 2 列の掃き出し}]{\text{(2,2) 成分による}} \begin{pmatrix}1 & 0 & 8\\ 0 & 1 & -1\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

より，解は

$$\boldsymbol{x} = t\begin{pmatrix}-8\\ 1\\ 1\end{pmatrix} \qquad (t \in \mathbb{R})$$

と表せる．よって，$\begin{pmatrix}-8\\ 1\\ 1\end{pmatrix}$ が $\operatorname{Ker} T_A$ を生成し，さらに 1 次独立なので，$\operatorname{Ker} T_A$ の基底となる．

ゆえに，$P_2(\mathbb{R})$ の基底 $[1, x, x^2]$ を通して $\operatorname{Ker} T_A$ の基底と対応する多項式を作れば，$\operatorname{Ker} D$ の基底は

$$[1,\, x,\, x^2]\begin{pmatrix}-8\\ 1\\ 1\end{pmatrix} = -8 + x + x^2$$

となる．したがって，$\dim \operatorname{Ker} D = 1$ である．

（解答終）

今回も検算してみると

$$D(x^2 + x - 8) = 2(2x+1) + (2x+1)(-2) = 0$$

となるので，$x^2 + x - 8$ は確かに $\operatorname{Ker} D$ のベクトルである．

よく $\operatorname{Ker} D$ の基底として数ベクトル $\begin{pmatrix}-8\\ 1\\ 1\end{pmatrix}$ を解答とする学生がいるが，絶対にそれはおかしいと気づけるようにすること．なぜなら D と T_A は異なるものであり，この数ベクトルを核を求める線形写像 D に代入することはできない．D の定義域は $P_2(\mathbb{R})$ だから，答えは多項式なはずである．基底を通して表現行列の問題に帰着させて計算をするが，最後は D の定義域のベクトル空間の要素で答えるよう注意すること．

例題 5.15. 線形変換 $D\colon P_2(\mathbb{R}) \longrightarrow P_2(\mathbb{R})$ を

$$D(f(x)) = (x^2 - x - 2)f''(x) + (x^2 + x)f'(x) + (-2x + 1)f(x)$$

で定める．このとき，$\mathrm{Ker}\, D$ と $\mathrm{Im}\, D$ のそれぞれの次元と基底を求めよ．

（解答） $P_2(\mathbb{R})$ の基底 $[1, x, x^2]$ に関する D の表現行列 A を求める．基底を D で写せば

$$D(1) = -2x + 1, \qquad D(x) = -x^2 + 2x, \qquad D(x^2) = 5x^2 - 2x - 4$$

であるから

$$[D(1),\, D(x),\, D(x^2)] = [1,\, x,\, x^2] \begin{pmatrix} 1 & 0 & -4 \\ -2 & 2 & -2 \\ 0 & -1 & 5 \end{pmatrix} \qquad \therefore\ A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -4 \\ -2 & 2 & -2 \\ 0 & -1 & 5 \end{pmatrix}$$

が得られる．

$\mathrm{Ker}\, T_A$ は方程式 $A\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$ の解空間である．そこで，係数行列 A を簡約階段行列に行基本変形すれば

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -4 \\ -2 & 2 & -2 \\ 0 & -1 & 5 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 1 列の掃き出し}]{\text{(1,1) 成分による}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -4 \\ 0 & 2 & -10 \\ 0 & -1 & 5 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{1/2 倍}]{\text{第 2 行を}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -4 \\ 0 & 1 & -5 \\ 0 & -1 & 5 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 2 列の掃き出し}]{\text{(2,2) 成分による}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -4 \\ 0 & 1 & -5 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

より，解は

$$\boldsymbol{x} = t \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad (t \in \mathbb{R})$$

と表せる．よって，よって，$\begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}$ が $\mathrm{Ker}\, T_A$ を生成し，さらに 1 次独立なので，$\mathrm{Ker}\, T_A$ の基底となる．ゆえに，$P_2(\mathbb{R})$ の基底 $[1, x, x^2]$ を通して $\mathrm{Ker}\, T_A$ の基底と対応する多項式を作れば，$\mathrm{Ker}\, D$ の基底は $4 + 5x + x^2$ となる．したがって，$\dim \mathrm{Ker}\, D = 1$ である．

$\mathrm{Im}\, T_A$ は A の列ベクトルで生成される部分空間なので，A の列ベクトルを用いて

$$\mathrm{Im}\, T_A = \langle \boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3 \rangle, \qquad A = \begin{pmatrix} \boldsymbol{a}_1 & \boldsymbol{a}_2 & \boldsymbol{a}_3 \end{pmatrix}$$

となる．この $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3$ の中から最大個数の 1 次独立な組を選べばよいから

$$x_1\boldsymbol{a}_1 + x_2\boldsymbol{a}_2 + x_3\boldsymbol{a}_3 = \mathbf{0} \quad \Longleftrightarrow \quad A \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \mathbf{0}$$

とおく．この解はすでに $(x_1,\, x_2,\, x_3) = (4t,\, 5t,\, t)$ と求めているから，特に $t = 1$ とすれば

$$\boldsymbol{a}_3 = -4\boldsymbol{a}_1 - 5\boldsymbol{a}_2$$

が得られる．ゆえに，$\mathrm{Im}\, T_A = \langle \boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2 \rangle$ が成り立つ．さらに，方程式

$$x_1\boldsymbol{a}_1 + x_2\boldsymbol{a}_2 = \mathbf{0}$$

を考えると，これは上で $x_3 = 0$ とした方程式なので $t = 0$ に対応し，$x_1 = x_2 = 0$ という自明な解のみをもつ．よって，$\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2$ は 1 次独立である．したがって，$\boldsymbol{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$，$\boldsymbol{a}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ が $\mathrm{Im}\, T_A$ の基底となる．ゆえに，$P_2(\mathbb{R})$ の基底 $[1, x, x^2]$ を通して $\mathrm{Im}\, T_A$ の基底と対応する多項式を作れば，$\mathrm{Im}\, D$ の基底は $1 - 2x,\ 2x - x^2$ となる．したがって，$\dim \mathrm{Im}\, D = 2$ である．

（解答終）

5.4 基底の変換行列

線形写像 $f\colon V \longrightarrow W$ の表現行列は V と W の基底を決めて初めて定まるものであり，異なる基底を選べば表現行列も異なる．そこで，表現行列を理解して応用するためには，基底を取り替えたときに表現行列がどのように変わるかを調べる必要がある．そのために基底の変換行列を定義する．

定義 5.16. （基底の変換行列）

$[\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \cdots, \boldsymbol{v}_n]$ と $[\boldsymbol{v}'_1, \boldsymbol{v}'_2, \cdots, \boldsymbol{v}'_n]$ をともに V の基底とする．$j = 1, 2, \ldots, n$ に対して

$$\boldsymbol{v}'_j = \sum_{i=1}^{n} p_{ij} \boldsymbol{v}_i \qquad (p_{ij} \in \mathbb{K})$$

と表したとき，n 次正方行列 $P = (p_{ij})_{ij}$ を $[\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \cdots, \boldsymbol{v}_n]$ から $[\boldsymbol{v}'_1, \boldsymbol{v}'_2, \cdots, \boldsymbol{v}'_n]$ への**基底の変換行列**という．

上の定義を式で書くと

$$[\boldsymbol{v}'_1, \boldsymbol{v}'_2, \cdots, \boldsymbol{v}'_n] = [\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \cdots, \boldsymbol{v}_n] P$$

となる．このような n 次正方行列 P を $[\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \cdots, \boldsymbol{v}_n]$ から $[\boldsymbol{v}'_1, \boldsymbol{v}'_2, \cdots, \boldsymbol{v}'_n]$ への基底の変換行列という．つまり，変換前の基底に変換行列 P をかければ変換後の基底が得られる．

ここで，V の基底 $[\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \cdots, \boldsymbol{v}_n]$ から $[\boldsymbol{v}'_1, \boldsymbol{v}'_2, \cdots, \boldsymbol{v}'_n]$ への基底の変換行列 P は

$$[\mathrm{id}_V(\boldsymbol{v}'_1), \mathrm{id}_V(\boldsymbol{v}'_2), \cdots, \mathrm{id}_V(\boldsymbol{v}'_n)] = [\boldsymbol{v}'_1, \boldsymbol{v}'_2, \cdots, \boldsymbol{v}'_n] = [\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \cdots, \boldsymbol{v}_n] P$$

より，$[\boldsymbol{v}'_1, \boldsymbol{v}'_2, \cdots, \boldsymbol{v}'_n]$ と $[\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \cdots, \boldsymbol{v}_n]$ に関する恒等写像 $\mathrm{id}_V\colon V \longrightarrow V$ の表現行列と一致する．恒等写像は同型写像だから，**基底の変換行列 P は正則行列である**ことがわかる．

次に基底の変換行列の意味を考察する．V の基底 $[\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \cdots, \boldsymbol{v}_n]$ から $[\boldsymbol{v}'_1, \boldsymbol{v}'_2, \cdots, \boldsymbol{v}'_n]$ への変換行列を P とする．このとき，任意のベクトル $\boldsymbol{v} \in V$ は

$$\boldsymbol{v} = \sum_{j=1}^{n} x_j \boldsymbol{v}_j = \sum_{j=1}^{n} x'_j \boldsymbol{v}'_j \qquad (x_j, x'_j \in \mathbb{K})$$

とそれぞれの基底の 1 次結合で一意的に表せる．そこで，数ベクトルを

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^n, \qquad \vec{x}' = \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ \vdots \\ x'_n \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^n$$

とおき，$\vec{x}$ と $\vec{x}'$ の関係を調べてみる．ここで，数ベクトルであることを強調するためベクトルを矢印で表した．このとき，基底の変換行列の定義より

$$\boldsymbol{v} = [\boldsymbol{v}'_1, \boldsymbol{v}'_2, \cdots, \boldsymbol{v}'_n] \vec{x'} = [\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \cdots, \boldsymbol{v}_n] P \vec{x}'$$

となる．一方

$$\boldsymbol{v} = [\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \cdots, \boldsymbol{v}_n] \vec{x}$$

が成り立つ．こうして $\boldsymbol{v}$ の 2 通りの表示を得たが，V の基底 $[\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \cdots, \boldsymbol{v}_n]$ の 1 次結合による表示は一意的なので，これらの結果より

$$\vec{x} = P \vec{x}'$$

が成り立つ．

これより，変換後の基底に関する係数からなる数ベクトルに基底の変換行列をかければ，変換前の基底に関する係数からなる数ベクトルが得られる．基底とは対応が逆なので注意すること．

例題 5.17. $\mathbb{R}^2$ の基底 $\left[\begin{pmatrix}5\\2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}7\\3\end{pmatrix}\right]$ から $\left[\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-4\\1\end{pmatrix}\right]$ への変換行列 P を求めよ.

（解答） 基底の変換行列の定義より

$$\left[\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-4\\1\end{pmatrix}\right]=\left[\begin{pmatrix}5\\2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}7\\3\end{pmatrix}\right]P \qquad \therefore \begin{pmatrix}2&-4\\3&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5&7\\2&3\end{pmatrix}P$$

となる．よって

$$P=\begin{pmatrix}5&7\\2&3\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}2&-4\\3&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3&-7\\-2&5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&-4\\3&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-15&-19\\11&13\end{pmatrix}$$

である.

（解答終）

例題 5.18. $\mathbb{R}^3$ のベクトルを次で定める.

$$\boldsymbol{v}_1=\begin{pmatrix}1\\0\\-2\end{pmatrix},\qquad \boldsymbol{v}_2=\begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix},\qquad \boldsymbol{v}_3=\begin{pmatrix}0\\-1\\5\end{pmatrix}$$

(1) $\boldsymbol{v}_1,\boldsymbol{v}_2,\boldsymbol{v}_3$ は $\mathbb{R}^3$ の基底であることを示せ.

(2) $\mathbb{R}^3$ の標準基底 $[\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3]$ から上で示した基底 $[\boldsymbol{v}_1,\boldsymbol{v}_2,\boldsymbol{v}_3]$ への変換行列 P を求めよ.

（解答）

(1) $x_1\boldsymbol{v}_1+x_2\boldsymbol{v}_2+x_3\boldsymbol{v}_3=\boldsymbol{0}$ $(x_j\in\mathbb{R})$ とおく．これは

$$\begin{pmatrix}\boldsymbol{v}_1&\boldsymbol{v}_2&\boldsymbol{v}_3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\boldsymbol{0}$$

と表せて，この斉次連立 1 次方程式の係数行列を簡約階段行列に行基本変形すれば

$$\begin{pmatrix}1&2&0\\0&1&-1\\-2&0&5\end{pmatrix}\xrightarrow[\text{第 1 列の掃き出し}]{\text{(1,1) 成分による}}\begin{pmatrix}1&2&0\\0&1&-1\\0&4&5\end{pmatrix}\xrightarrow[\text{第 2 列の掃き出し}]{\text{(2,2) 成分による}}\begin{pmatrix}1&0&2\\0&1&-1\\0&0&9\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{\text{第 3 行を 1/9 倍}}\begin{pmatrix}1&0&2\\0&1&-1\\0&0&1\end{pmatrix}\xrightarrow[\text{第 3 列の掃き出し}]{\text{(3,3) 成分による}}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$$

となる．よって，自明な解 $(x_1,x_2,x_3)=(0,0,0)$ のみをもつから，$\boldsymbol{v}_1,\boldsymbol{v}_2,\boldsymbol{v}_3$ は 1 次独立である. $\dim\mathbb{R}^3=3$ であるから，3 個の 1 次独立なベクトルの組 $\boldsymbol{v}_1,\boldsymbol{v}_2,\boldsymbol{v}_3$ は $\mathbb{R}^3$ の基底である.

(2) 基底の変換行列の定義より

$$[\boldsymbol{v}_1,\boldsymbol{v}_2,\boldsymbol{v}_3]=[\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3]P=E_3P=P$$

なので

$$P=\begin{pmatrix}\boldsymbol{v}_1&\boldsymbol{v}_2&\boldsymbol{v}_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&2&0\\0&1&-1\\-2&0&5\end{pmatrix}$$

である.

（解答終）

例題 5.19.　$\mathbb{R}^3$ の基底 $\left[\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\3\\3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}3\\4\\8\end{pmatrix}\right]$ から $\left[\begin{pmatrix}2\\1\\-1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\2\\-1\end{pmatrix}\right]$ への変換行列 P を求めよ．

（解答）　基底の変換行列の定義より

$$\left[\begin{pmatrix}2\\1\\-1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\2\\-1\end{pmatrix}\right] = \left[\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\3\\3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}3\\4\\8\end{pmatrix}\right] P$$

なので，基底を並べた行列を

$$X = \begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\1 & 3 & 4\\2 & 3 & 8\end{pmatrix}, \qquad Y = \begin{pmatrix}2 & 1 & 0\\1 & -1 & 2\\-1 & 0 & -1\end{pmatrix}$$

とおくと，$XP = Y$ となる．ここで

$$\begin{aligned}(X \,|\, Y) = \left(\begin{array}{ccc|ccc}1 & 2 & 3 & 2 & 1 & 0\\1 & 3 & 4 & 1 & -1 & 2\\2 & 3 & 8 & -1 & 0 & -1\end{array}\right) &\xrightarrow[\text{第 1 列の掃き出し}]{\text{(1,1) 成分による}} \left(\begin{array}{ccc|ccc}1 & 2 & 3 & 2 & 1 & 0\\0 & 1 & 1 & -1 & -2 & 2\\0 & -1 & 2 & -5 & -2 & -1\end{array}\right)\\
&\xrightarrow[\text{第 2 列の掃き出し}]{\text{(2,2) 成分による}} \left(\begin{array}{ccc|ccc}1 & 0 & 1 & 4 & 5 & -4\\0 & 1 & 1 & -1 & -2 & 2\\0 & 0 & 3 & -6 & -4 & 1\end{array}\right)\\
&\xrightarrow{\text{第 3 行を 1/3 倍}} \left(\begin{array}{ccc|ccc}1 & 0 & 1 & 4 & 5 & -4\\0 & 1 & 1 & -1 & -2 & 2\\0 & 0 & 1 & -2 & -4/3 & 1/3\end{array}\right)\\
&\xrightarrow[\text{第 3 列の掃き出し}]{\text{(3,3) 成分による}} \left(\begin{array}{ccc|ccc}1 & 0 & 0 & 6 & 19/3 & -13/3\\0 & 1 & 0 & 1 & -2/3 & 5/3\\0 & 0 & 1 & -2 & -4/3 & 1/3\end{array}\right)\end{aligned}$$

となる．よって，求める基底の変換行列は

$$P = X^{-1}Y = \frac{1}{3}\begin{pmatrix}18 & 19 & -13\\3 & -2 & 5\\-6 & -4 & 1\end{pmatrix}$$

である．

（解答終）

例題 5.20.　$P_2(\mathbb{R})$ の基底 $[1, x, x^2]$ から $[1, x+3, (x+3)^2]$ への変換行列 P を求めよ．

（解答）　$(x+3)^2 = x^2 + 6x + 9$ より

$$[1,\, x+3,\, (x+3)^2] = [1,\, x,\, x^2]\begin{pmatrix}1 & 3 & 9\\0 & 1 & 6\\0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

と表せる．よって，求める基底の変換行列は

$$P = \begin{pmatrix}1 & 3 & 9\\0 & 1 & 6\\0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

である．

（解答終）

5.5　基底の変換と表現行列の関係

基底を取り替えたときの線形写像の表現行列の変化の様子を説明する．

定理 5.21. （基底の変換と表現行列の関係）
$f\colon V \longrightarrow W$ を線形写像とし

- $[\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \cdots, \boldsymbol{v}_n]$ と $[\boldsymbol{v}'_1, \boldsymbol{v}'_2, \cdots, \boldsymbol{v}'_n]$ をともに V の基底
- $[\boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{w}_2, \cdots, \boldsymbol{w}_m]$ と $[\boldsymbol{w}'_1, \boldsymbol{w}'_2, \cdots, \boldsymbol{w}'_m]$ をともに W の基底
- $[\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \cdots, \boldsymbol{v}_n]$ から $[\boldsymbol{v}'_1, \boldsymbol{v}'_2, \cdots, \boldsymbol{v}'_n]$ への V の基底の変換行列を P
- $[\boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{w}_2, \cdots, \boldsymbol{w}_m]$ から $[\boldsymbol{w}'_1, \boldsymbol{w}'_2, \cdots, \boldsymbol{w}'_m]$ への W の基底の変換行列を Q
- V の基底 $[\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \cdots, \boldsymbol{v}_n]$ と W の基底 $[\boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{w}_2, \cdots, \boldsymbol{w}_m]$ に関する f の表現行列を A

とする．このとき，V の基底 $[\boldsymbol{v}'_1, \boldsymbol{v}'_2, \cdots, \boldsymbol{v}'_n]$ と W の基底 $[\boldsymbol{w}'_1, \boldsymbol{w}'_2, \cdots, \boldsymbol{w}'_m]$ に関する f の表現行列を B とおけば

$$B = Q^{-1}AP$$

が成り立つ．

証明.　基底の変換行列の定義より

$$[\boldsymbol{v}'_1, \boldsymbol{v}'_2, \cdots, \boldsymbol{v}'_n] = [\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \cdots, \boldsymbol{v}_n]P, \qquad [\boldsymbol{w}'_1, \boldsymbol{w}'_2, \cdots, \boldsymbol{w}'_m] = [\boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{w}_2, \cdots, \boldsymbol{w}_m]Q$$

である．そこで，この左側の式の両辺を線形写像 f でうつせば

$$[f(\boldsymbol{v}'_1), f(\boldsymbol{v}'_2), \cdots, f(\boldsymbol{v}'_n)] = [f(\boldsymbol{v}_1), f(\boldsymbol{v}_2), \cdots, f(\boldsymbol{v}_n)]P$$

が成り立つ．一方，表現行列の定義より

$$[f(\boldsymbol{v}_1), f(\boldsymbol{v}_2), \cdots, f(\boldsymbol{v}_n)] = [\boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{w}_2, \cdots, \boldsymbol{w}_m]A$$

であるから

$$\begin{aligned}
[f(\boldsymbol{v}'_1), f(\boldsymbol{v}'_2), \cdots, f(\boldsymbol{v}'_n)] &= [f(\boldsymbol{v}_1), f(\boldsymbol{v}_2), \cdots, f(\boldsymbol{v}_n)]P \\
&= [\boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{w}_2, \cdots, \boldsymbol{w}_m]AP \\
&= [\boldsymbol{w}'_1, \boldsymbol{w}'_2, \cdots, \boldsymbol{w}'_m]Q^{-1}AP
\end{aligned}$$

が成り立つ．よって，V の基底 $[\boldsymbol{v}'_1, \boldsymbol{v}'_2, \cdots, \boldsymbol{v}'_n]$ と W の基底 $[\boldsymbol{w}'_1, \boldsymbol{w}'_2, \cdots, \boldsymbol{w}'_m]$ に関する f の表現行列は

$$B = Q^{-1}AP$$

である．　□

これが線形写像の表現行列の変換公式である．公式の丸暗記はなかなか難しいので，導出方法を理解しておいた方がよいかもしれない．

例題 5.22. $f\colon \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ を線形写像とし，$\mathbb{R}^3$ の基底 $\left[\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right]$ と $\mathbb{R}^2$ の基底 $\left[\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}\right]$ に関する f の表現行列を $\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\4 & 5 & 6\end{pmatrix}$ とする．このとき，$\mathbb{R}^3$ の基底 $\left[\begin{pmatrix}2\\3\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\3\\3\end{pmatrix}\right]$ と $\mathbb{R}^2$ の基底 $\left[\begin{pmatrix}3\\5\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}\right]$ に関する f の表現行列を求めよ．

（解答） 解答を見やすくするため，以下のように記号を定める．

$$\boldsymbol{v}_1 = \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix},\ \boldsymbol{v}_2 = \begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix},\ \boldsymbol{v}_3 = \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix},\ X = \begin{pmatrix}\boldsymbol{v}_1 & \boldsymbol{v}_2 & \boldsymbol{v}_3\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{w}_1 = \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix},\ \boldsymbol{w}_2 = \begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix},\ Y = \begin{pmatrix}\boldsymbol{w}_1 & \boldsymbol{w}_2\end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{v}'_1 = \begin{pmatrix}2\\3\\2\end{pmatrix},\ \boldsymbol{v}'_2 = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},\ \boldsymbol{v}'_3 = \begin{pmatrix}1\\3\\3\end{pmatrix},\ X' = \begin{pmatrix}\boldsymbol{v}'_1 & \boldsymbol{v}'_2 & \boldsymbol{v}'_3\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{w}'_1 = \begin{pmatrix}3\\5\end{pmatrix},\ \boldsymbol{w}'_2 = \begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix},\ Y' = \begin{pmatrix}\boldsymbol{w}'_1 & \boldsymbol{w}'_2\end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\4 & 5 & 6\end{pmatrix}$$

とし，求める表現行列を B とおく．

このとき，$\mathbb{R}^3$ の基底 $[\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3]$ から $[\boldsymbol{v}'_1, \boldsymbol{v}'_2, \boldsymbol{v}'_3]$ への変換行列を P とすれば

$$[\boldsymbol{v}'_1,\, \boldsymbol{v}'_2,\, \boldsymbol{v}'_3] = [\boldsymbol{v}_1,\, \boldsymbol{v}_2,\, \boldsymbol{v}_3]P \qquad \therefore\ X' = XP$$

となる．ここで

$$(X\,|\,X') = \left(\begin{array}{ccc|ccc}1 & 0 & 0 & 2 & 1 & 1\\1 & 1 & 0 & 3 & 0 & 3\\0 & 1 & 1 & 2 & 0 & 3\end{array}\right) \xrightarrow[\text{第 1 列の掃き出し}]{\text{(1,1) 成分による}} \left(\begin{array}{ccc|ccc}1 & 0 & 0 & 2 & 1 & 1\\0 & 1 & 0 & 1 & -1 & 2\\0 & 1 & 1 & 2 & 0 & 3\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[\text{第 2 列の掃き出し}]{\text{(2,2) 成分による}} \left(\begin{array}{ccc|ccc}1 & 0 & 0 & 2 & 1 & 1\\0 & 1 & 0 & 1 & -1 & 2\\0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1\end{array}\right)$$

であるから

$$P = X^{-1}X' = \begin{pmatrix}2 & 1 & 1\\1 & -1 & 2\\1 & 1 & 1\end{pmatrix}$$

が得られる．次に，$\mathbb{R}^2$ の基底 $[\boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{w}_2]$ から $[\boldsymbol{w}'_1, \boldsymbol{w}'_2]$ への変換行列を Q とすれば

$$[\boldsymbol{w}'_1,\, \boldsymbol{w}'_2] = [\boldsymbol{w}_1,\, \boldsymbol{w}_2]Q \qquad \therefore\ Y' = YQ$$

より

$$Q^{-1} = Y'^{-1}Y = \begin{pmatrix}3 & 2\\5 & 3\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}1 & 1\\1 & 2\end{pmatrix} = -\begin{pmatrix}3 & -2\\-5 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 1\\1 & 2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1 & 1\\2 & -1\end{pmatrix}$$

となる．よって，定理 5.21 より求める表現行列は

$$B = Q^{-1}AP = \begin{pmatrix}-1 & 1\\2 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\4 & 5 & 6\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & 1 & 1\\1 & -1 & 2\\1 & 1 & 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}12 & 3 & 12\\-5 & -1 & -4\end{pmatrix}$$

である．

（解答終）

定理 5.21 において，特に $V = W$ の場合には次が得られる．

系 5.23. 線形変換 $f\colon V \longrightarrow V$ に対して

- $[\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \cdots, \boldsymbol{v}_n]$ から $[\boldsymbol{v}'_1, \boldsymbol{v}'_2, \cdots, \boldsymbol{v}'_n]$ への V の基底の変換行列を P
- $[\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \cdots, \boldsymbol{v}_n]$ に関する f の表現行列を A

とすれば，$[\boldsymbol{v}'_1, \boldsymbol{v}'_2, \cdots, \boldsymbol{v}'_n]$ に関する f の表現行列は $P^{-1}AP$ となる．

このように正則行列 P を用いて $P^{-1}AP$ と表せる行列は今後よく現れる．そこで，次のように用語を定義する．

定義 5.24.（共役な行列）
n 次正方行列 A と B に対して，n 次正則行列 P で

$$P^{-1}AP = B$$

をみたすものが存在するとき，A と B は**共役**であるという．

もし n 次正方行列 A と B が共役，つまりある n 次正則行列 P が存在して $B = P^{-1}AP$ であるならば，トレースと行列式について

$$\operatorname{tr} A = \operatorname{tr} B, \qquad \det A = \det B$$

が成り立つ．実際

$$\operatorname{tr} B = \operatorname{tr}(P^{-1}AP) = \operatorname{tr}(APP^{-1}) = \operatorname{tr} A$$

であり

$$\det B = \det(P^{-1}AP) = \frac{1}{\det P} \cdot \det A \cdot \det P = \det A$$

となる．このことから，線形変換 $f\colon V \longrightarrow V$ の表現行列は基底を取り替えると変化するが，どの基底を選んで計算しても『表現行列のトレース』や『表現行列の行列式』は同じことがわかる．他に第 10 章で『表現行列の固有値』が基底の選び方によらず同じであることを示す．

第10章　行列の対角化

正方行列 A に関する重要な概念である固有値・固有ベクトルとその応用について説明する．この章では特に断りがなければ，行列やベクトルの成分は複素数で考えることにする．そこで，複素 n 次元数ベクトル空間を $\mathbb{C}^n$ で，複素数を成分にもつ n 次正方行列全体のなす集合を $M_n(\mathbb{C})$ で表す．

1　固有値と固有ベクトル

1.1　固有値と固有ベクトルの定義

まず固有値と固有ベクトルの定義を述べる．

定義 1.1.（固有値・固有ベクトル）
$A \in M_n(\mathbb{C})$ と $\lambda \in \mathbb{C}$ に対して

$$A\boldsymbol{v} = \lambda\boldsymbol{v}$$

をみたす $\mathbf{0}$ でないベクトル $\boldsymbol{v} \in \mathbb{C}^n$ が存在するとき，λ を A の**固有値**，$\boldsymbol{v}$ を A の固有値 λ に対する**固有ベクトル**という．

例えば $A = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$，$\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ とおけば

$$A\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \end{pmatrix} = 2\boldsymbol{v}$$

が成り立つ．よって，2 は A の固有値で，$\boldsymbol{v}$ は固有値 2 に対する固有ベクトルである．このように，固有ベクトルとは $A\boldsymbol{v}$ と $\boldsymbol{v}$ が平行になるようなものだと考えればよい．

なお，零ベクトルは固有ベクトルではないことに注意すること．実際，$\boldsymbol{v} = \mathbf{0}$ だと固有値の条件式 $A\boldsymbol{v} = \lambda\boldsymbol{v}$ がどんな複素数 λ でも両辺 $\mathbf{0}$ で成り立ってしまうので意味がない．

正方行列の固有値と固有ベクトルの定義は上で述べたとおりだが，具体的に $A\boldsymbol{v} = \lambda\boldsymbol{v}$ となる λ と $\boldsymbol{v}$ の組を勘で探すのは難しい．そこで，これらの計算法を検討したい．

そこで，$\lambda \in \mathbb{C}$ が $A \in M_n(\mathbb{C})$ の固有値であるとする．このとき

$$A\boldsymbol{v} = \lambda\boldsymbol{v} \quad \Longleftrightarrow \quad (A - \lambda E_n)\boldsymbol{v} = \mathbf{0}$$

が成り立つことがわかる．ここで，右側の式は $(A - \lambda)\boldsymbol{v} = \mathbf{0}$ でないことに注意すること．n 次正方行列 A と複素数 λ の引き算は定義できないので，無理やり単位行列をくくり出したような形となっている．よって，λ に対する固有ベクトル $\boldsymbol{v}$ は斉次連立 1 次方程式

$$(A - \lambda E_n)\boldsymbol{x} = \mathbf{0} \quad \cdots \ (*)$$

の自明でない解 $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{v}$ である．逆に，λ が A の固有値であるためにはこの斉次連立 1 次方程式 $(*)$ が非自明な解をもたなければならない．繰り返しになるが，零ベクトルは固有ベクトルとはならないことに注意すること．

ゆえに，λ が A の固有値であるための必要十分条件は $A - \lambda E_n$ が正則でないことと言い換えられる．これは $\lambda E_n - A$ が正則でないことと同じことであり，行列式のアイデアを利用すれば，次の定理が成り立つことがわかる．

定理 1.2. （固有値・固有ベクトル）
$\lambda \in \mathbb{C}$ が $A \in M_n(\mathbb{C})$ の固有値であるための必要十分条件は

$$\det(\lambda E_n - A) = 0$$

が成り立つことである．このとき，斉次連立 1 次方程式 $(A - \lambda E_n)\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ は自明でない解をもち，それが λ に対する A の固有ベクトルである．

注意 1.3. 次のページからの例題にあるように，**A の成分がすべて実数だとしても，その固有値も実数であるとは限らない**．その理由は，実数を係数とする 2 次方程式や 3 次方程式が虚数解をもつこともあるからである．固有値が複素数であれば，対する固有ベクトルの成分も自然に複素数となる．

ただし，正方行列 A の成分がすべて実数で，さらに A の固有値がすべて実数ならば，斉次連立 1 次方程式

$$(A - \lambda E_n)\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$$

は実数の範囲で解をもつ．よって，固有ベクトルの成分はすべて実数とすることができる．そこで，このような場合には係数として複素数を持ち出さずに実数の範囲で考えることも多い．

定理 1.2 より，固有値を求めるには次で定義される固有方程式を解けばよいことがわかる．

定義 1.4. （固有多項式・固有方程式）
$A \in M_n(\mathbb{C})$ に対して，x に関する多項式

$$F_A(x) = \det(xE_n - A)$$

を A の**固有多項式**という．また，方程式 $F_A(x) = 0$ を A の**固有方程式**という．

ここまでの議論より，具体的な n 次正方行列 A の固有値を計算するには固有多項式を定義する行列式

$$F_A(x) = \det(xE_n - A)$$

を計算し，それを因数分解して固有方程式を解けばよい．
また，固有値 λ の固有ベクトルを求めるには，斉次連立 1 次方程式

$$(A - \lambda E_n)\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$$

を解けばよいから，係数行列 $A - \lambda E_n$ を簡約階段行列に行基本変形すればよい．

なお，文献によっては固有多項式を $\det(A - xE_n)$ で定義していることもある．ここでは，x の最高次数の係数を 1 にするため，上記の定義を採用しておく．

例題 1.5.　次の行列の固有値と固有ベクトルを求めよ．

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$$

（解答）　A の固有方程式は

$$F_A(x) = \begin{vmatrix} x-5 & 1 \\ -2 & x-2 \end{vmatrix} = x^2 - 7x + 12 = (x-3)(x-4) = 0$$

より，A の固有値は $\lambda = 3, 4$ である．

固有値 $\lambda = 3$ に対する固有ベクトルを求める．これは方程式 $(A - 3E_2)\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ の自明でない解であるから，係数行列を簡約階段行列に行基本変形すれば

$$A - 3E_2 = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{(1,1) 成分による第 1 列の掃き出し}]{\text{第 1 行を 1/2 倍}} \begin{pmatrix} 1 & -1/2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

より，解は $x_2 = 2t$ とおけば

$$\boldsymbol{x} = t\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \qquad (t \in \mathbb{R})$$

と表せる．よって，固有値 3 に対する固有ベクトルは $t\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ $(t \fallingdotseq 0)$ である．

固有値 $\lambda = 4$ に対する固有ベクトルを求める．これは方程式 $(A - 4E_2)\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ の自明でない解であるから，係数行列を簡約階段行列に行基本変形すれば

$$A - 4E_2 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 1 列の掃き出し}]{\text{(1,1) 成分による}} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

より，解は

$$\boldsymbol{x} = t\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad (t \in \mathbb{R})$$

と表せる．よって，固有値 4 に対する固有ベクトルは $t\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ $(t \fallingdotseq 0)$ である．

（解答終）

固有ベクトルを求めた後は，実際にそれを行列 A にかけることで検算できる．例えば

$$A\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & -1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \end{pmatrix} = 3\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

が成り立つから，$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ に A をかけたものと 3 倍したものは等しい．よって，確かに $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ は固有値 3 に対する固有ベクトルである．

なお，検算の際にはパラメータ t 倍を考える必要はない．なぜなら，$\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$，$\boldsymbol{w} = t\boldsymbol{v}$ とおけば，上で確認した事実より

$$A\boldsymbol{w} = A(t\boldsymbol{v}) = tA\boldsymbol{v} = t(3\boldsymbol{v}) = 3t\boldsymbol{v} = 3\boldsymbol{w}$$

となるので，$t(\fallingdotseq 0)$ 倍した $\boldsymbol{w}$ も常に固有ベクトルだからである．

例題 1.6.　次の行列の固有値と固有ベクトルを求めよ.

(1) $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$　　(2) $A = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ -9 & -5 \end{pmatrix}$

（解答）

(1)　A の固有方程式は

$$F_A(x) = \begin{vmatrix} x-1 & 1 \\ -1 & x-3 \end{vmatrix} = x^2 - 4x + 4 = (x-2)^2 = 0$$

より，A の固有値は $\lambda = 2, 2$ である.

固有値 $\lambda = 2$ に対する固有ベクトルを求める．これは方程式 $(A - 2E_2)\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$ の自明でない解であるから，係数行列を簡約階段行列に行基本変形すれば

$$A - 2E_2 = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{(1,1) 成分による第 1 列の掃き出し}]{\text{第 1 行を } (-1) \text{ 倍}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

より，解は

$$\boldsymbol{x} = t \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad (t \in \mathbb{R})$$

と表せる．よって，固有値 2 に対する固有ベクトルは $t \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ $(t \neq 0)$ である.

(2)　A の固有方程式は

$$F_A(x) = \begin{vmatrix} x-5 & -3 \\ 9 & x+5 \end{vmatrix} = x^2 + 2 = 0$$

より，A の固有値は $\lambda = \pm\sqrt{2}\,i$ である.

固有値 $\lambda = \sqrt{2}\,i$ に対する固有ベクトルを求める．これは方程式 $(A - \sqrt{2}\,iE_2)\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$ の自明でない解であるから，係数行列を簡約階段行列に行基本変形すれば

$$A - \sqrt{2}\,iE_2 = \begin{pmatrix} 5-\sqrt{2}\,i & 3 \\ -9 & -5-\sqrt{2}\,i \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{(1,1) 成分による第 1 列の掃き出し}]{\text{第 1 行を } 1/(5-\sqrt{2}i) \text{ 倍}} \begin{pmatrix} 1 & (5+\sqrt{2}\,i)/9 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

より，解は $x_2 = 9t$ とおけば

$$\boldsymbol{x} = t \begin{pmatrix} -5-\sqrt{2}\,i \\ 9 \end{pmatrix} \qquad (t \in \mathbb{C})$$

と表せる．よって，固有値 $\sqrt{2}\,i$ に対する固有ベクトルは $t \begin{pmatrix} -5-\sqrt{2}\,i \\ 9 \end{pmatrix}$ $(t \neq 0)$ である.

固有値 $\lambda = -\sqrt{2}\,i$ に対する固有ベクトルを求める．これは方程式 $(A + \sqrt{2}\,iE_2)\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$ の自明でない解であるから，係数行列を簡約階段行列に行基本変形すれば

$$A + \sqrt{2}\,iE_2 = \begin{pmatrix} 5+\sqrt{2}\,i & 3 \\ -9 & -5+\sqrt{2}\,i \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{(1,1) 成分による第 1 列の掃き出し}]{\text{第 1 行を } 1/(5+\sqrt{2}i) \text{ 倍}} \begin{pmatrix} 1 & (5-\sqrt{2}\,i)/9 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

より，解は $x_2 = 9t$ とおけば

$$\boldsymbol{x} = t \begin{pmatrix} -5+\sqrt{2}\,i \\ 9 \end{pmatrix} \qquad (t \in \mathbb{C})$$

と表せる．よって，固有値 $-\sqrt{2}\,i$ に対する固有ベクトルは $t \begin{pmatrix} -5+\sqrt{2}\,i \\ 9 \end{pmatrix}$ $(t \neq 0)$ である.

（解答終）

例題 1.7.　次の行列の固有値と固有ベクトルを求めよ．

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 \\ -3 & -5 & -3 \\ 3 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

（解答）　A の固有方程式は，サラスの公式を用いて

$$\begin{aligned} F_A(x) = \begin{vmatrix} x-1 & -3 & -3 \\ 3 & x+5 & 3 \\ -3 & -3 & x-1 \end{vmatrix} &= (x-1)^2(x+5) + 27 + 27 - 9(x+5) + 9(x-1) + 9(x-1) \\ &= x^3 + 3x^2 - 4 \\ &= (x-1)(x+2)^2 = 0 \end{aligned}$$

より，A の固有値は $\lambda = 1, -2, -2$ である．

固有値 $\lambda = 1$ に対する固有ベクトルを求める．これは方程式 $(A - E_3)\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$ の自明でない解であるから，係数行列を簡約階段行列に行基本変形すれば

$$\begin{aligned} A - E_3 = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 3 \\ -3 & -6 & -3 \\ 3 & 3 & 0 \end{pmatrix} &\xrightarrow[\text{第 3 行を 1/3 倍}]{\text{第 1 行を 1/3 倍}} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -3 & -6 & -3 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{行の入れ替え}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ -3 & -6 & -3 \end{pmatrix} \\ &\xrightarrow[\text{第 1 列の掃き出し}]{\text{(1,1) 成分による}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & -3 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 2 列の掃き出し}]{\text{(2,2) 成分による}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

より，解は

$$\boldsymbol{x} = t \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad (t \in \mathbb{R})$$

と表せる．よって，固有値 1 に対する固有ベクトルは $t \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ $(t \neq 0)$ である．

固有値 $\lambda = -2$ に対する固有ベクトルを求める．これは方程式 $(A + 2E_3)\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$ の自明でない解であるから，係数行列を簡約階段行列に行基本変形すれば

$$A + 2E_3 = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 3 \\ -3 & -3 & -3 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{(1,1) 成分による第 1 列の掃き出し}]{\text{第 1 行を 1/3 倍してから}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

より，解は

$$\boldsymbol{x} = s \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad (s, t \in \mathbb{R})$$

と表せる．よって，固有値 -2 に対する固有ベクトルは $s \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\big((s, t) \neq (0, 0)\big)$ である．

（解答終）

固有多項式については，次の性質が成り立つことが知られている．

定理 1.8. $A \in M_n(\mathbb{C})$ に対して，固有多項式 $F_A(x)$ は n 次多項式である．さらに

$$F_A(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 \qquad (a_j \in \mathbb{C})$$

とおけば

$$a_n = 1, \qquad a_{n-1} = -\operatorname{tr} A, \qquad a_0 = (-1)^n \det A$$

が成り立つ．

証明. 固有多項式は

$$F_A(x) = \det(xE_n - A) = \begin{vmatrix} x - a_{11} & -a_{12} & \cdots & -a_{1n} \\ -a_{21} & x - a_{22} & \cdots & -a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -a_{n1} & -a_{n2} & \cdots & x - a_{nn} \end{vmatrix}$$

である．ここで，第 7 章定理 3.10（行列式の形）より，x の次数が最も大きくなるのは対角成分の積となる項

$$(x - a_{11})(x - a_{22}) \cdots (x - a_{nn})$$

を展開したときに現れる x^n のみである．よって，固有多項式は n 次式で，x^n の係数は 1 である．

次に，x^{n-1} が現れるのも上記の項を展開した場合のみである．よって，x^{n-1} の係数は

$$-a_{11} - a_{22} - \cdots - a_{nn} = -\operatorname{tr} A$$

となる．

最後に，固有多項式の定数項は $x = 0$ のときの値だから

$$F_A(0) = \det(-A) = (-1)^n \det A$$

が成り立つ． □

定理 1.8 より，固有方程式 $F_A(x) = 0$ は n 次方程式となるから n 個の解をもつ．しかし，n 次方程式に重解があるかもしれないので，次のように用語を定める．

定義 1.9.（固有値の代数的重複度）

$A \in M_n(\mathbb{C})$ の固有方程式 $F_A(x) = 0$ は n 次方程式となるので，重複を許して A の固有値は n 個あることがわかる．ここで，重解がある場合も考えると

$$F_A(x) = (x - \mu_1)^{l_1}(x - \mu_2)^{l_2} \cdots (x - \mu_m)^{l_m}$$

と表せる．ただし，$\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_m$ はすべて異なる複素数で，l_j は自然数であり $l_1 + l_2 + \cdots + l_m = n$ である．このとき，l_j を固有値 μ_j の**重複度**または多重度という．

例えば固有方程式で 2 重解であればその固有値の重複度は 2 であり，3 重解であればその固有値の重複度は 3 となる．この重複度は方程式の重解の度合いを表すから，**代数的重複度**とも呼ばれる．

以降では原則として $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ は重解を含めた固有値を，$\mu_1, \ldots, \mu_m$ は相異なる固有値を表すことにする．

定理 1.10. （固有値の和と積）
$\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ を $A \in M_n(\mathbb{C})$ の（重複も含めた）n 個の固有値とすれば

$$\operatorname{tr} A = \lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_n, \qquad \det A = \lambda_1 \lambda_2 \cdots \lambda_n$$

が成り立つ．

証明． 固有方程式 $F_A(x) = 0$ の解が $x = \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ であるから，固有多項式は

$$F_A(x) = (x - \lambda_1)(x - \lambda_2) \cdots (x - \lambda_n)$$

と因数分解できる．よって，これを展開したときの x^{n-1} の係数は $-(\lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_n)$ であり，定数項は $(-1)^n \lambda_1 \lambda_2 \cdots \lambda_n$ である．ゆえに，定理 1.8 の公式

$$F_A(x) = x^n - (\operatorname{tr} A) x^{n-1} + \cdots + (-1)^n \det A$$

と係数比較して，求める等式が得られる． □

定理 1.11. （共役な行列の固有多項式の不変性）
A, B が共役な正方行列ならば，$F_A(x) = F_B(x)$ である．特に，共役な行列の固有値はすべて一致する．

証明． A と B が共役な行列なので，ある正則行列 P で $B = P^{-1}AP$ となるものが存在する．よって

$$xE_n - B = xE_n - P^{-1}AP = P^{-1}(xE_n - A)P$$

と変形すれば

$$F_B(x) = \det(P^{-1}(xE_n - A)P) = \frac{1}{\det P} \det(xE_n - A) \det P = \det(xE_n - A) = F_A(x)$$

□

固有ベクトルについては，次の重要な性質が成り立つ．

定理 1.12. （異なる固有値に対する固有ベクトルの 1 次独立性）
$\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_m \in \mathbb{C}$ を $A \in M_n(\mathbb{C})$ の相異なる固有値，$\boldsymbol{v}_j \in \mathbb{C}^n$ を μ_j に対する A の固有ベクトルとする．このとき，$\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_m$ は 1 次独立である．

証明． 固有値の個数 m に関する数学的帰納法で証明する．
$m = 1$ のときは固有ベクトルは零ベクトルでないから 1 次独立である．
$m = k - 1$ のときに定理の主張が成り立つと仮定する．$m = k$ のときに $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_k$ が 1 次独立であることを示すため，$c_j \in \mathbb{C}$ として

$$c_1 \boldsymbol{v}_1 + c_2 \boldsymbol{v}_2 + \cdots + c_k \boldsymbol{v}_k = \boldsymbol{0} \quad \cdots \ (*)$$

とおく．$(*)$ の両辺に左から $A - \mu_k E_n$ をかけると，$\boldsymbol{v}_j$ は μ_j に関する固有ベクトルだから

$$(A - \mu_k E_n)\boldsymbol{v}_j = A\boldsymbol{v}_j - \mu_k \boldsymbol{v}_j = (\mu_j - \mu_k)\boldsymbol{v}_j$$

なので

$$c_1(\mu_1 - \mu_k)\boldsymbol{v}_1 + c_2(\mu_2 - \mu_k)\boldsymbol{v}_2 + \cdots + c_{k-1}(\mu_{k-1} - \mu_k)\boldsymbol{v}_{k-1} = \boldsymbol{0}$$

が成り立つ．ここで，帰納法の仮定より $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_{k-1}$ は 1 次独立だから

$$c_j(\mu_j - \mu_k) = 0 \qquad (j = 1, 2, \ldots, k-1)$$

となるが，$\mu_j \neq \mu_k$ であるから $c_j = 0 \ (j = 1, 2, \ldots, k-1)$ が成り立つ．これを $(*)$ に代入すれば $c_k = 0$ も得られるから，$\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_k$ は 1 次独立である．ゆえに，$m = k$ のときにも成り立つから，帰納法により定理の主張は成り立つ． □

1.2 固有空間

正方行列 A の固有値に対して，固有空間を以下で定義する．

定義 1.13. （固有空間）

$A \in M_n(\mathbb{C})$ とし，$\lambda \in \mathbb{C}$ を A の固有値とする．このとき

$$V(\lambda) = \{\, \boldsymbol{v} \in \mathbb{C}^n \mid A\boldsymbol{v} = \lambda \boldsymbol{v} \,\}$$

とおき，$V(\lambda)$ を A の固有値 λ の**固有空間**という．

すなわち，$V(\lambda)$ とは固有値 λ に対する固有ベクトル全体の集合に $\mathbf{0}$ を加えたものである．ここで，線形変換 $T_{A-\lambda E_n} \colon \mathbb{C}^n \longrightarrow \mathbb{C}^n$ に対して

$$V(\lambda) = \operatorname{Ker} T_{A-\lambda E_n}$$

が成り立つから，$V(\lambda)$ は $\mathbb{C}^n$ の部分空間となる．

注意 1.14. 　正方行列 A の成分がすべて実数で，A の固有値もすべて実数ならば，固有空間 $V(\lambda)$ は実ベクトル空間 $\mathbb{R}^n$ の部分空間でもある．そこで，この場合には複素数を持ち出さずに $\mathbb{R}^n$ で考えるのが普通である．繰り返しになるが，正方行列 A の成分がすべて実数でも固有値は虚数となりうるので注意すること．

実際のところ，実 n 次元数ベクトル空間 $\mathbb{R}^n$ は係数に複素数も許せば，そのまま自然に複素 n 次元数ベクトル空間 $\mathbb{C}^n$ となるので，具体的な計算においてはそれほど気にする必要はない．

定理 1.12 より異なる固有値に対する固有ベクトルの組は 1 次独立であるから，次が成り立つ．

定理 1.15. （固有空間の直和性）

$\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_m \in \mathbb{C}$ を $A \in M_n(\mathbb{C})$ の相異なる固有値とする．このとき

$$V(\mu_1) + V(\mu_2) + \cdots + V(\mu_m) = V(\mu_1) \oplus V(\mu_2) \oplus \cdots \oplus V(\mu_m)$$

が成り立つ．

固有空間の次元については次が成り立つ．

定理 1.16. μ を $A \in M_n(\mathbb{C})$ の固有値とし，l を μ の重複度とする．このとき

$$1 \leqq \dim V(\mu) \leqq l$$

が成り立つ．つまり，固有空間 $V(\mu)$ の次元は μ の重複度をこえることはない．

証明. $\dim V(\mu) = r$ とおく．$V(\mu) \neq \{\mathbf{0}\}$ より $r \geqq 1$ である．

$\boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{p}_2, \ldots, \boldsymbol{p}_r$ を $V(\mu)$ の基底とし，これを延長して $\boldsymbol{p}_1, \ldots, \boldsymbol{p}_r, \boldsymbol{p}_{r+1}, \ldots, \boldsymbol{p}_n$ が $\mathbb{C}^n$ の基底となるようにする．このとき，$P = \begin{pmatrix} \boldsymbol{p}_1 & \boldsymbol{p}_2 & \cdots & \boldsymbol{p}_n \end{pmatrix}$ とおくと P は正則行列で

$$A\boldsymbol{p}_j = \mu\boldsymbol{p}_j \qquad (j = 1, 2, \ldots, r)$$

なので

$$\begin{aligned}
AP &= \begin{pmatrix} A\boldsymbol{p}_1 & \cdots & A\boldsymbol{p}_r & A\boldsymbol{p}_{r+1} & \cdots & A\boldsymbol{p}_n \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \mu\boldsymbol{p}_1 & \cdots & \mu\boldsymbol{p}_r & A\boldsymbol{p}_{r+1} & \cdots & A\boldsymbol{p}_n \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \boldsymbol{p}_1 & \cdots & \boldsymbol{p}_r & \boldsymbol{p}_{r+1} & \cdots & \boldsymbol{p}_n \end{pmatrix}
\begin{pmatrix}
\mu & 0 & \cdots & 0 & * & \cdots & * \\
0 & \mu & \cdots & 0 & * & \cdots & * \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
0 & 0 & \cdots & \mu & * & \cdots & * \\
0 & 0 & \cdots & 0 & * & \cdots & * \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
0 & 0 & \cdots & 0 & * & \cdots & *
\end{pmatrix}
= P \begin{pmatrix} \mu E_r & * \\ O & \widetilde{A} \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

より

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \mu E_r & * \\ O & \widetilde{A} \end{pmatrix}$$

と表せる．ここで，$\widetilde{A} \in M_{n-r}(\mathbb{C})$ であり，関係ない成分は $*$ で表した．

よって，A の固有多項式 $F_A(x)$ は定理 1.11 より $P^{-1}AP$ の固有多項式 $F_{P^{-1}AP}(x)$ と一致するから，ブロック分けされた行列式の計算法より

$$\begin{aligned}
F_A(x) = F_{P^{-1}AP}(x) &= \begin{vmatrix} (x-\mu)E_r & -* \\ O & xE_{n-r} - \widetilde{A} \end{vmatrix} \\
&= \left| (x-\mu)E_r \right| \cdot \left| xE_{n-r} - \widetilde{A} \right| = (x-\mu)^r F_{\widetilde{A}}(x)
\end{aligned}$$

となる．ここで，$x = \mu$ が方程式 $F_{\widetilde{A}}(x) = 0$ の解となる可能性も考慮すれば，μ は方程式 $F_A(x) = 0$ の l 重解なので，$r \leqq l$ が成り立つ． □

固有値 μ に対して，固有空間 $V(\mu)$ の次元 $\dim V(\mu)$ は**幾何学的重複度**と呼ばれることもある．この定理より，行列の固有値について

（幾何学的重複度）$\leqq$（代数的重複度）

が成り立つことがわかる．この 2 つの重複度が一致するかどうかは，行列の対角化の項目で重要となる．

例題 1.17.　次の行列の固有値および固有空間の次元と基底を求めよ．

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & -1 & -3 \end{pmatrix}$$

（解答）　A の固有方程式は

$$F_A(x) = \begin{vmatrix} x+2 & -2 & -2 \\ 0 & x-2 & -4 \\ 0 & 1 & x+3 \end{vmatrix} = (x+2)\begin{vmatrix} x-2 & -4 \\ 1 & x+3 \end{vmatrix} = (x+2)(x^2+x-2) = (x-1)(x+2)^2 = 0$$

より，A の固有値は $\lambda = 1, -2, -2$ である．

固有値 $\lambda = 1$ に対する固有空間 $V(1)$ を求める．これは方程式 $(A - E_3)\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ の解空間であり

$$A - E_3 = \begin{pmatrix} -3 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & -1 & -4 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 2 列の掃き出し}]{\text{(2,2) 成分による}} \begin{pmatrix} -3 & 0 & -6 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{第 1 行を } (-1/3) \text{ 倍}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

より，解は

$$\boldsymbol{x} = t\begin{pmatrix} -2 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad (t \in \mathbb{R})$$

と表せる．よって，$V(1)$ の基底として $\begin{pmatrix} -2 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix}$ がとれ，$\dim V(1) = 1$ である．

固有値 $\lambda = -2$ に対する固有空間 $V(-2)$ を求める．これは方程式 $(A + 2E_3)\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ の解空間であり

$$A + 2E_3 = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 0 & 4 & 4 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{(1,2) 成分による第 2 列の掃き出し}]{\text{第 1 行を 1/2 倍してから}} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

より，解は $x_1 = s,\ x_3 = t$ とおけば

$$\boldsymbol{x} = s\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad (s, t \in \mathbb{R})$$

と表せる．よって，$V(-2)$ の基底として $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ がとれ，$\dim V(-2) = 2$ である．

（解答終）

固有空間 $V(\lambda)$ の次元は必ず 1 以上であり，$\dim V(\lambda)$ は λ の（代数的）重複度以下である．計算結果がこれをみたさない場合には計算ミスがあるはずなので，この条件を検算で確認すること．また，固有空間 $V(\lambda)$ の基底を構成するベクトル $\boldsymbol{v}$ についても，暗算で $A\boldsymbol{v} = \lambda\boldsymbol{v}$ となっているかを確認する癖をつけること．特に間違えやすいのは簡約階段行列のどこかの列がすべて 0 となった場合であるから，この部分は非常に注意すること．

例題 1.18. 行列 $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -4 \\ -3 & 2 & 6 \\ 2 & 0 & -3 \end{pmatrix}$ の固有値および固有空間の次元と基底を求めよ．

（解答） A の固有方程式は

$$F_A(x) = \begin{vmatrix} x-3 & 0 & 4 \\ 3 & x-2 & -6 \\ -2 & 0 & x+3 \end{vmatrix} = (x-2)\begin{vmatrix} x-3 & 4 \\ -2 & x+3 \end{vmatrix} = (x-2)(x^2-1) = 0$$

より，A の固有値は $\lambda = 1, 2, -1$ である．

固有値 $\lambda = 1$ に対する固有空間 $V(1)$ を求める．これは方程式 $(A - E_3)\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ の解空間であり

$$A - E_3 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -4 \\ -3 & 1 & 6 \\ 2 & 0 & -4 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{(1,1) 成分による第 1 列の掃き出し}]{\text{第 1 行を 1/2 倍して}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

より，解は

$$\boldsymbol{x} = t\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad (t \in \mathbb{R})$$

と表せる．よって，$V(1)$ の基底として $\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ がとれ，$\dim V(1) = 1$ である．

固有値 $\lambda = 2$ に対する固有空間 $V(2)$ を求める．これは方程式 $(A - 2E_3)\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ の解空間であり

$$A - 2E_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -4 \\ -3 & 0 & 6 \\ 2 & 0 & -5 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 1 列の掃き出し}]{\text{(1,1) 成分による}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & -6 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{(2,3) 成分による第 3 列の掃き出し}]{\text{第 2 行を } (-1/6) \text{ 倍して}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

より，解は

$$\boldsymbol{x} = t\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad (t \in \mathbb{R})$$

と表せる．よって，$V(2)$ の基底として $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ がとれ，$\dim V(2) = 1$ である．

固有値 $\lambda = -1$ に対する固有空間 $V(-1)$ を求める．これは方程式 $(A + E_3)\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ の解空間であり

$$A + E_3 = \begin{pmatrix} 4 & 0 & -4 \\ -3 & 3 & 6 \\ 2 & 0 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{(1,1) 成分による第 1 列の掃き出し}]{\text{第 1 行を 1/4 倍して}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{第 2 行を 1/3 倍}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

より，解は

$$\boldsymbol{x} = t\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad (t \in \mathbb{R})$$

と表せる．よって，$V(-1)$ の基底として $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ がとれ，$\dim V(-1) = 1$ である．

（解答終）

例題 1.19. 行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 6 \\ -1 & 3 & 6 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$ の固有値および固有空間の次元と基底を求めよ．

（解答） A の固有方程式は

$$F_A(x) = \begin{vmatrix} x-1 & -1 & -6 \\ 1 & x-3 & -6 \\ -1 & 1 & x+1 \end{vmatrix} = x^3 - 3x^2 + 4 = (x+1)(x-2)^2 = 0$$

より，A の固有値は $\lambda = 2, 2, -1$ である．

固有値 $\lambda = 2$ に対する固有空間 $V(2)$ を求める．これは方程式 $(A - 2E_3)\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ の解空間であり

$$A - 2E_3 = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 6 \\ -1 & 1 & 6 \\ 1 & -1 & -3 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 1 列の掃き出し}]{\text{(1,1) 成分による}} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[\text{第 3 行を 1/3 倍して第 2 行と入れ替え}]{\text{第 1 行を } (-1) \text{ 倍}} \begin{pmatrix} 1 & -1 & -6 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 3 列の掃き出し}]{\text{(2,3) 成分による}} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

より，解は

$$\boldsymbol{x} = t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad (t \in \mathbb{R})$$

と表せる．よって，$V(2)$ の基底として $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ がとれ，$\dim V(2) = 1$ である．

固有値 $\lambda = -1$ に対する固有空間 $V(-1)$ を求める．これは方程式 $(A + E_3)\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ の解空間であり

$$A + E_3 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 6 \\ -1 & 4 & 6 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 1 列の掃き出し}]{\text{(3,1) 成分による}} \begin{pmatrix} 0 & 3 & 6 \\ 0 & 3 & 6 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[\text{第 2 行を 1/3 倍}]{\text{第 1 行と第 3 行を入れ替え}} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 6 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 2 列の掃き出し}]{\text{(2,2) 成分による}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

より，解は

$$\boldsymbol{x} = t \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad (t \in \mathbb{R})$$

と表せる．よって，$V(-1)$ の基底として $\begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ がとれ，$\dim V(-1) = 1$ である．

（解答終）

この例題のように，固有値の（代数的）重複度と固有空間の次元が一致しないことはある．ただし，重複度が 1 の固有値に対しては，その固有空間の次元は必ず 1 となる．定理 1.16 を見返してみること．

1.3 線形変換の固有値・固有ベクトル

V を $\mathbb{K}$ 上のベクトル空間とし，f を V 上の線形変換とする．このとき，線形変換 f についても，その固有値と固有ベクトルを定義できる．

定義 1.20. （線形変換の固有値・固有ベクトル）
$\lambda \in \mathbb{K}$ が f の**固有値**であるとは

$$f(\boldsymbol{v}) = \lambda \boldsymbol{v}$$

となる零でないベクトル $\boldsymbol{v} \in V$ が存在することである．このとき，$\boldsymbol{v}$ を λ に対する f の**固有ベクトル**という．

$\mathbb{K} = \mathbb{R}$ の場合には，行列の場合とは異なり f の固有値が存在するとは限らない．これは正方行列の成分がすべて実数であるとしても，その行列の固有値が実数になるとは限らないためである．

線形変換 $f\colon V \longrightarrow V$ の固有値を定義から直接求めるのは一般に困難である．そこで，V の基底を 1 組決めて，f の表現行列 A を考え，f の固有値と A の固有値の関係を考察してみる．

まず V を $\mathbb{R}$ 上の n 次元ベクトル空間とし，f を V 上の線形変換とする．このとき，$[\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_n]$ を V の基底とし，この基底に関する f の表現行列を A とおくと，線形変換 f の固有値と n 次正方行列 A の実数の固有値はすべて一致する．さらに，f の固有値 λ に対する固有ベクトルについて，次が成り立つ．

$$\boldsymbol{v} = \sum_{i=1}^{n} c_i \boldsymbol{v}_i \in V,\ f(\boldsymbol{v}) = \lambda \boldsymbol{v} \quad \Longleftrightarrow \quad \vec{c} = \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n,\ A\vec{c} = \lambda \vec{c}$$

つまり，$\boldsymbol{v} \in V$ が f の固有値 λ に対する固有ベクトルであることと，$\boldsymbol{v}$ の基底 $[\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_n]$ に関する係数を並べた数ベクトル $\vec{c} \in \mathbb{R}^n$ が A の固有値 λ に対する固有ベクトルであることが同値となる．

証明. 上のように記号を設定すれば

$$\boldsymbol{v} = [\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_n]\vec{c}$$

であり，第 9 章で学習した表現行列の意味から

$$f(\boldsymbol{v}) = [\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_n]A\vec{c}$$

が成り立つ．よって

$$\begin{aligned} f(\boldsymbol{v}) = \lambda \boldsymbol{v} \quad &\Longleftrightarrow \quad \lambda \boldsymbol{v} = [\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_n]A\vec{c} \\ &\Longleftrightarrow \quad [\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_n]\lambda\vec{c} = [\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_n]A\vec{c} \\ &\Longleftrightarrow \quad A\vec{c} = \lambda \vec{c} \end{aligned}$$

が成り立つ． □

特に V が $\mathbb{C}$ 上の有限次元ベクトル空間ならば，線形変換 f の固有値とその表現行列 A の固有値はすべて一致する．

簡単にまとめると，複素ベクトル空間については線形変換の固有値とその表現行列の固有値は**基底の取り方によらず**一致する．線形変換の固有ベクトルについては，核と像の基底の計算をしたときと同様に表現行列の固有ベクトルから基底を通して構成できる．実ベクトル空間については実固有値のみが一致するが，このことはそれほど気にしなくてもよい．

例題 1.21. 2変数 x と y についての2次斉次実多項式全体のなす実ベクトル空間を V とする．

$$V = \{ax^2 + bxy + cy^2 \mid a, b, c \in \mathbb{R}\}$$

また，線形変換 $D\colon V \longrightarrow V$ を

$$D(u) = y\,\frac{\partial u}{\partial x} + x\,\frac{\partial u}{\partial y} \qquad \bigl(u = u(x,y) \in V\bigr)$$

で定める．このとき，D の固有値，固有空間の基底を求めよ．

（解答） V の基底 $[x^2, xy, y^2]$ に関する f の表現行列 A を求める．そのために基底を D で写すと

$$D(x^2) = 2xy, \qquad D(xy) = x^2 + y^2, \qquad D(y^2) = 2xy$$

であるから

$$[D(x^2),\, D(xy),\, D(y^2)] = [x^2,\, xy,\, y^2]\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \therefore\ A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

となる．A の固有方程式は

$$F_A(x) = \begin{vmatrix} x & -1 & 0 \\ -2 & x & -2 \\ 0 & -1 & x \end{vmatrix} = x^3 - 4x = x(x-2)(x+2) = 0$$

より，A の固有値は $\lambda = 0, 2, -2$ である．よって，f の固有値も $0, 2, -2$ の3個である．

A の固有値 $\lambda = 0$ に対する固有空間 $V(0)$ を求める．これは方程式 $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ の解空間であり

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{行基本変形}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

より，$V(0)$ の基底として ${}^t(1, 0, -1)$ がとれる．よって，D の固有空間 $V_D(0)$ の基底は $x^2 - y^2$ である．

A の固有値 $\lambda = 2$ に対する固有空間 $V(2)$ を求める．これは方程式 $(A - 2E_3)\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ の解空間であり

$$A - 2E_3 = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{行基本変形}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

より，$V(2)$ の基底として ${}^t(1, 2, 1)$ がとれる．よって，D の固有空間 $V_D(2)$ の基底は $x^2 + 2xy + y^2$ である．

A の固有値 $\lambda = -2$ に対する固有空間 $V(-2)$ を求める．これは方程式 $(A + 2E_3)\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ の解空間であり

$$A + 2E_3 = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{行基本変形}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

より，$V(-2)$ の基底として ${}^t(1, -2, 1)$ がとれる．よって，D の固有空間 $V_D(-2)$ の基底は $x^2 - 2xy + y^2$ である．

（解答終）

2　行列の対角化

2.1　対角化の定義

$A \in M_n(\mathbb{C})$ とする．このとき，ある正則行列 P に対して $P^{-1}AP$ が対角行列となるとき，このような変換行列 P と対角行列 $P^{-1}AP$ を求めることを A **を対角化する**という．

すでに第 2 章で 2 次正方行列の場合を説明したが，再度復習しておくことにする．

例 2.1.　$A = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ とする．

(i)　$P = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ とおけば，$P^{-1} = \dfrac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ なので

$$P^{-1}AP = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 15 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$$

(ii)　$P = \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ とおけば，$P^{-1} = \dfrac{1}{18}\begin{pmatrix} 3 & 3 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$ なので

$$P^{-1}AP = \frac{1}{18}\begin{pmatrix} 3 & 3 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 & -3 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} = \frac{1}{18}\begin{pmatrix} 90 & 0 \\ 0 & 36 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

このように，A を対角化する変換行列 P の選び方は 1 通りではない．また，対角化の結果の対角行列も何通りかある．そのため，変換行列 P と対角行列 $P^{-1}AP$ をセットで答えなければ，行列 A を対角化したとはいえないので注意すること．

例 2.2.　$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ とする．このとき，正則行列 $P = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ に対して

$$P^{-1}AP = \frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} cd & d^2 \\ -c^2 & -cd \end{pmatrix}$$

となる．よって，$P^{-1}AP$ が対角行列になると仮定すると，$(1,2)$ 成分と $(2,1)$ 成分は 0 だから

$$d^2 = -c^2 = 0 \qquad \therefore\ c = d = 0$$

となる．しかし，このとき

$$\det P = ad - bc = 0$$

となってしまい，P が正則であることに矛盾する．ゆえに，どのような正則行列 P を選んでも，$P^{-1}AP$ が対角行列となることはない．

この例からわかることは，**すべての行列が対角化できるわけではない**ということである．つまり，行列の対角化を考える際には

- 対角化が出来るかどうかの判定法
- 対角化可能ならば，変換行列 P の求め方

を確立しなければ，さまざまな問題へ応用をするときに使いにくい．そこで，次節ではこの 2 点について解説する．

2.2　対角化可能であるための必要十分条件

ここでは $A \in M_n(\mathbb{C})$ が与えられたときに，それが対角化可能であるための必要十分条件および対角化可能な場合の変換行列 P の求め方について説明する．

もし A が対角化可能であるとすると，ある正則行列 P が存在して

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix}$$

とできる．ここで，$P = \begin{pmatrix} \boldsymbol{p}_1 & \boldsymbol{p}_2 & \cdots & \boldsymbol{p}_n \end{pmatrix}$ と列ベクトル分解すると，P は正則だから $\boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{p}_2, \ldots, \boldsymbol{p}_n$ は $\mathbb{C}^n$ の基底であり

$$\begin{pmatrix} A\boldsymbol{p}_1 & A\boldsymbol{p}_2 & \cdots & A\boldsymbol{p}_n \end{pmatrix} = AP = P \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1\boldsymbol{p}_1 & \lambda_2\boldsymbol{p}_2 & \cdots & \lambda_n\boldsymbol{p}_n \end{pmatrix}$$

より

$$A\boldsymbol{p}_j = \lambda_j \boldsymbol{p}_j \qquad (j = 1, 2, \ldots, n)$$

が成り立つ．よって，**対角行列の対角成分** $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ **は** A **の固有値**であり，$\boldsymbol{p}_j$ **は** λ_j **に対する** A **の固有ベクトル**でなければならない．さらに，$\boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{p}_2, \ldots, \boldsymbol{p}_n$ は $\mathbb{C}^n$ の基底になっている．

逆に，A の（重複をこめた）n 個の固有値を $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ とし，λ_j に対する固有ベクトル $\boldsymbol{p}_j$ で $\boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{p}_2, \ldots, \boldsymbol{p}_n$ が 1 次独立となるようなものがとれるとする．このとき，$P = \begin{pmatrix} \boldsymbol{p}_1 & \boldsymbol{p}_2 & \cdots & \boldsymbol{p}_n \end{pmatrix}$ とおけば P は正則行列で

$$AP = \begin{pmatrix} A\boldsymbol{p}_1 & A\boldsymbol{p}_2 & \cdots & A\boldsymbol{p}_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1\boldsymbol{p}_1 & \lambda_2\boldsymbol{p}_2 & \cdots & \lambda_n\boldsymbol{p}_n \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix}$$

が成り立つ．ゆえに，$P^{-1}AP$ は対角行列となるから，A は対角化可能である．

以上のことから，次の定理が成り立つことがわかる．

定理 2.3.（対角化可能であるための必要十分条件 1）
$A \in M_n(\mathbb{C})$ が対角化可能であることの必要十分条件は，A の固有ベクトルからなる $\mathbb{C}^n$ の基底が存在することである．このとき，A の（重複をこめた）n 個の固有値を $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ とし，λ_j に対する A の固有ベクトル $\boldsymbol{p}_j$ を $\boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{p}_2, \ldots, \boldsymbol{p}_n$ が $\mathbb{C}^n$ の基底となるようにとると，$P = \begin{pmatrix} \boldsymbol{p}_1 & \boldsymbol{p}_2 & \cdots & \boldsymbol{p}_n \end{pmatrix}$ とおけば P は正則行列で

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix}$$

と A を対角化できる．

この定理は非常に重要な定理である．この定理の主張は対角化可能であるための判定条件を与えるだけではなく，その対角化の方法も述べていることに注意すること．特に，この定理から具体的な行列 A を対角化する際には，その変換行列 P を構成すれば，$P^{-1}AP$ **を直接計算する必要がない**ことを説明している．これを理解できるまで第 10 章のここまでの内容を繰り返し読んでおくこと．

定理 2.3 の条件を使いやすい形に直してみる．

$A \in M_n(\mathbb{C})$ の相異なる固有値を $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_m$ とし，その重複度をそれぞれ $l_1, l_2, \dots, l_m$ とする．このとき，l_j は自然数で $l_1 + l_2 + \cdots + l_m = n$ である．

固有空間の和空間は定理 1.15 より直和となるので，常に

$$V(\mu_1) \oplus V(\mu_2) \oplus \cdots \oplus V(\mu_m) \subset \mathbb{C}^n$$

が成り立つ．よって，固有ベクトルからなる $\mathbb{C}^n$ の基底が存在することと

$$V(\mu_1) \oplus V(\mu_2) \oplus \cdots \oplus V(\mu_m) = \mathbb{C}^n$$

が成り立つこと，すなわち

$$\dim\bigl(V(\mu_1) \oplus V(\mu_2) \oplus \cdots \oplus V(\mu_m)\bigr) = n$$

であることは同値である．

さらに，定理 1.16 より

$$\begin{aligned}\dim\bigl(V(\mu_1) \oplus V(\mu_2) \oplus \cdots \oplus V(\mu_m)\bigr) &= \dim V(\mu_1) + \dim V(\mu_2) + \cdots + \dim V(\mu_m) \\ &\leqq l_1 + l_2 + \cdots + l_m = n\end{aligned}$$

が成り立つから，等号成立条件より

$$\dim\bigl(V(\mu_1) \oplus V(\mu_2) \oplus \cdots \oplus V(\mu_m)\bigr) = n \quad \Longleftrightarrow \quad \dim V(\mu_j) = l_j \quad (j = 1, 2, \dots, m)$$

も成り立つ．

また，第 9 章定理 3.10 より，方程式 $(A - \mu_j E_n)\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$ の解空間の次元とその係数行列 $A - \mu_j E_n$ の階数には

$$\dim V(\mu_j) = n - \operatorname{rank}(A - \mu_j E_n)$$

が成り立つことより

$$\dim V(\mu_j) = l_j \quad \Longleftrightarrow \quad n - \operatorname{rank}(A - \mu_j E_n) = l_j$$

である．

以上をまとめると，次のようになる．

定理 2.4. （対角化可能であるための必要十分条件 2）
$A \in M_n(\mathbb{C})$ の相異なる固有値を $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_m$ とし，その重複度をそれぞれ $l_1, l_2, \dots, l_m$ とする．このとき，次の条件はすべて同値である．

(1) A は対角化可能である．

(2) A の固有ベクトルからなる $\mathbb{C}^n$ の基底が存在する．

(3) $\mathbb{C}^n = V(\mu_1) \oplus V(\mu_2) \oplus \cdots \oplus V(\mu_m)$

(4) $\dim V(\mu_j) = l_j \quad (j = 1, 2, \dots, m)$

(5) $n - \operatorname{rank}(A - \mu_j E_n) = l_j \quad (j = 1, 2, \dots, m)$

対角化が可能である十分条件のうち判定が容易なものの 1 つは，次の条件である．

定理 2.5. **（対角化可能であるための十分条件）**
$A \in M_n(\mathbb{C})$ の固有値がすべて異なるならば，A は対角化可能である．

証明. 重複度が 1 の固有値 λ に関する固有空間 $V(\lambda)$ については，定理 1.16 より $\dim V(\lambda) = 1$ である．よって，定理 2.4(4) の条件をみたすので，A は対角化可能である． □

つまり，対角化可能かどうか判定する際には，固有方程式の重解である固有値に関する固有空間の次元を求め，それが固有値の多重度と一致するかを調べればよい．

なお，行列 A の成分がすべて実数で，その固有値もすべて実数の場合には，複素数を持ち出さずに定理を述べることもできる．

定理 2.6. **（対角化可能であるための必要十分条件 1：実数版）**
$A \in M_n(\mathbb{R})$ が実数の範囲で対角化可能であることの必要十分条件は，A の固有ベクトルからなる $\mathbb{R}^n$ の基底が存在することである．このとき，A の（重複をこめた）n 個の固有値を $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ とおけばこれらはすべて実数で，λ_j に対する A の固有ベクトル $\boldsymbol{p}_j$ を $\boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{p}_2, \ldots, \boldsymbol{p}_n$ が $\mathbb{R}^n$ の基底となるようにとると，$P = \begin{pmatrix} \boldsymbol{p}_1 & \boldsymbol{p}_2 & \cdots & \boldsymbol{p}_n \end{pmatrix}$ とおけば P は正則行列で

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix}$$

と A を対角化できる．

定理 2.7. **（対角化可能であるための必要十分条件 2：実数版）**
$A \in M_n(\mathbb{R})$ の相異なる固有値を $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_m$ とし，その重複度をそれぞれ $l_1, l_2, \ldots, l_m$ とする．このとき，固有値 $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_m$ がすべて実数ならば，各固有空間 $V(\mu)$ は $\mathbb{R}^n$ の部分空間とみなせるので，次の条件はすべて同値である．

(1) A は対角化可能である．

(2) A の固有ベクトルからなる $\mathbb{R}^n$ の基底が存在する．

(3) $\mathbb{R}^n = V(\mu_1) \oplus V(\mu_2) \oplus \cdots \oplus V(\mu_m)$

(4) $\dim V(\mu_j) = l_j \quad (j = 1, 2, \ldots, m)$

(5) $n - \operatorname{rank}(A - \mu_j E_n) = l_j \quad (j = 1, 2, \ldots, m)$

2.3　対角化の計算例

例題 2.8.　行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$ が対角化可能か判定し，可能ならば対角化せよ．

（解答）　A の固有方程式は

$$F_A(x) = \begin{vmatrix} x-1 & -2 \\ 1 & x-4 \end{vmatrix} = x^2 - 5x + 6 = (x-2)(x-3) = 0$$

より，A の固有値は $\lambda = 2, 3$ である．よって，固有値がすべて異なるから A は対角化可能である．

固有値 $\lambda = 2$ に対する固有空間 $V(2)$ を求める．これは方程式 $(A - 2E_2)\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ の解空間であり

$$A - 2E_2 = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 1 行を } (-1) \text{ 倍}]{(1,1) \text{ 成分による第 1 列の掃き出し}} \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

より，解は

$$\boldsymbol{x} = t \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad (t \in \mathbb{R})$$

と表せる．よって，$V(2)$ の基底として $\boldsymbol{p}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ がとれる．

固有値 $\lambda = 3$ に対する固有空間 $V(3)$ を求める．これは方程式 $(A - 3E_2)\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ の解空間であり

$$A - 3E_2 = \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 1 行を } (-1/2) \text{ 倍}]{(1,1) \text{ 成分による第 1 列の掃き出し}} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

より，解は

$$\boldsymbol{x} = t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad (t \in \mathbb{R})$$

と表せる．よって，$V(3)$ の基底として $\boldsymbol{p}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ がとれる．

ゆえに

$$P = \begin{pmatrix} \boldsymbol{p}_1 & \boldsymbol{p}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \qquad P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

（解答終）

この例題で最後に $P = \begin{pmatrix} \boldsymbol{p}_2 & \boldsymbol{p}_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ とおいた場合には

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

となる．この P と $P^{-1}AP$ の組でも正解である．自習する際には**解答が一通りではないことに注意しなければならない**．単に答えと見比べて違うから誤りと判断しないこと．固有ベクトルを並べた順番と，対角行列の対角成分の順番が対応していることを必ず確認すること．

前節で説明したように，対角化を実行する際には変換行列 P の逆行列 P^{-1} を求める必要はない．不要な計算に時間をかけないように注意すること．2 次正方行列なら逆行列の計算はまだ簡単だが，3 次以上になると大変である．

例題 2.9. 行列 $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ が対角化可能か判定し，可能ならば対角化せよ．

（解答） A の固有方程式は

$$F_A(x) = \begin{vmatrix} x & -1 \\ 1 & x \end{vmatrix} = x^2 + 1 = (x-i)(x+i) = 0$$

より，A の固有値は $\lambda = i, -i$ である．よって，固有値がすべて異なるから A は対角化可能である．

固有値 $\lambda = i$ に対する固有空間 $V(i)$ を求める．これは方程式 $(A - iE_2)\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ の解空間であり

$$A - iE_2 = \begin{pmatrix} -i & 1 \\ -1 & -i \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 1 行を } i \text{ 倍}]{\text{(1,1) 成分による第 1 列の掃き出し}} \begin{pmatrix} 1 & i \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

より，解は

$$\boldsymbol{x} = t \begin{pmatrix} -i \\ 1 \end{pmatrix} \qquad (t \in \mathbb{C})$$

と表せる．よって，$V(i)$ の基底として $\boldsymbol{p}_1 = \begin{pmatrix} -i \\ 1 \end{pmatrix}$ がとれる．

固有値 $\lambda = -i$ に対する固有空間 $V(-i)$ を求める．これは方程式 $(A + iE_2)\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ の解空間であり

$$A + iE_2 = \begin{pmatrix} i & 1 \\ -1 & i \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 1 行を } (-i) \text{ 倍}]{\text{(1,1) 成分による第 1 列の掃き出し}} \begin{pmatrix} 1 & -i \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

より，解は

$$\boldsymbol{x} = t \begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix} \qquad (t \in \mathbb{C})$$

と表せる．よって，$V(-i)$ の基底として $\boldsymbol{p}_2 = \begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix}$ がとれる．

ゆえに

$$P = \begin{pmatrix} \boldsymbol{p}_1 & \boldsymbol{p}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -i & i \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \qquad P^{-1}AP = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}$$

（解答終）

このように正方行列の成分がすべて実数であるとしても，固有値が虚数になる場合には固有ベクトルおよび対角行列の成分には虚数が現れる．固有値が実数の場合よりも計算ミスをしやすいので注意すること．また，成分に複素数が現れるため固有空間は $\mathbb{C}^2$ の部分空間と考えなければならず，スカラーはすべて複素数にしなければならないことにも気を付けること．

例題 2.10. $A = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ とおく．

(1) A を対角化せよ．

(2) $X^2 = A$ となる行列 X を 1 つ求めよ．

（解答）

(1) A の固有方程式は

$$F_A(x) = \begin{vmatrix} x-4 & 1 \\ -2 & x-1 \end{vmatrix} = x^2 - 5x + 6 = (x-2)(x-3) = 0$$

より，A の固有値は $\lambda = 2, 3$ である．よって，固有値がすべて異なるから A は対角化可能である．

固有値 $\lambda = 2$ に対する固有空間 $V(2)$ を求める．これは方程式 $(A - 2E_2)\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$ の解空間であり

$$A - 2E_2 = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{行基本変形}} \begin{pmatrix} 1 & -1/2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

より，$V(2)$ の基底として $\boldsymbol{p}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ がとれる．

固有値 $\lambda = 3$ に対する固有空間 $V(3)$ を求める．これは方程式 $(A - 3E_2)\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$ の解空間であり

$$A - 3E_2 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{行基本変形}} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

より，$V(3)$ の基底として $\boldsymbol{p}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ がとれる．

ゆえに

$$P = \begin{pmatrix} \boldsymbol{p}_1 & \boldsymbol{p}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \qquad P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

と対角化できる．

(2) (1) の結果より

$$A = P \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} P^{-1}$$

である．そこで

$$X = P \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 0 \\ 0 & \sqrt{3} \end{pmatrix} P^{-1}$$

とおけば，$X^2 = A$ となる．ここで

$$P^{-1} = \frac{1}{-1} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$$

なので

$$X = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 0 \\ 0 & \sqrt{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\sqrt{3} - \sqrt{2} & \sqrt{2} - \sqrt{3} \\ 2\sqrt{3} - 2\sqrt{2} & 2\sqrt{2} - \sqrt{3} \end{pmatrix}$$

（解答終）

例題 2.11.　行列 $A=\begin{pmatrix}6&-3&-7\\-1&2&1\\5&-3&-6\end{pmatrix}$ が対角化可能か判定し，可能ならば対角化せよ．

（解答）　A の固有方程式は

$$F_A(x)=\begin{vmatrix}x-6&3&7\\1&x-2&-1\\-5&3&x+6\end{vmatrix}=x^3-2x^2-x+2=(x-1)(x-2)(x+1)=0$$

より，A の固有値は $\lambda=1,2,-1$ であり，固有値がすべて異なるから対角化可能である．

固有値 $\lambda=1$ に対する固有空間 $V(1)$ を求める．これは方程式 $(A-E_3)\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ の解空間であり

$$A-E_3=\begin{pmatrix}5&-3&-7\\-1&1&1\\5&-3&-7\end{pmatrix}\xrightarrow[\text{(2,1) 成分による第 1 列の掃き出し}]{\text{第 3 行に第 1 行の }(-1)\text{ 倍を加えて}}\begin{pmatrix}0&2&-2\\-1&1&1\\0&0&0\end{pmatrix}\xrightarrow{\text{行基本変形}}\begin{pmatrix}1&0&-2\\0&1&-1\\0&0&0\end{pmatrix}$$

より，$V(1)$ の基底として $\boldsymbol{p}_1=\begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix}$ がとれる．

固有値 $\lambda=2$ に対する固有空間 $V(2)$ を求める．これは方程式 $(A-2E_3)\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ の解空間であり

$$A-2E_3=\begin{pmatrix}4&-3&-7\\-1&0&1\\5&-3&-8\end{pmatrix}\xrightarrow[\text{第 1 列の掃き出し}]{\text{(2,1) 成分による}}\begin{pmatrix}0&-3&-3\\-1&0&1\\0&-3&-3\end{pmatrix}\xrightarrow{\text{行基本変形}}\begin{pmatrix}1&0&-1\\0&1&1\\0&0&0\end{pmatrix}$$

より，$V(2)$ の基底として $\boldsymbol{p}_2=\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}$ がとれる．

固有値 $\lambda=-1$ に対する固有空間 $V(-1)$ を求める．これは方程式 $(A+E_3)\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ の解空間であり

$$A+E_3=\begin{pmatrix}7&-3&-7\\-1&3&1\\5&-3&-5\end{pmatrix}\xrightarrow[\text{第 1 列の掃き出し}]{\text{(2,1) 成分による}}\begin{pmatrix}0&18&0\\-1&3&1\\0&12&0\end{pmatrix}\xrightarrow{\text{行基本変形}}\begin{pmatrix}1&0&-1\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix}$$

より，$V(-1)$ の基底として $\boldsymbol{p}_3=\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$ がとれる．

ゆえに

$$P=\begin{pmatrix}\boldsymbol{p}_1&\boldsymbol{p}_2&\boldsymbol{p}_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&1&1\\1&-1&0\\1&1&1\end{pmatrix},\qquad P^{-1}AP=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&2&0\\0&0&-1\end{pmatrix}$$

（解答終）

重複度 1 の固有値（つまり固有方程式で重解でない固有値）に対しては，その固有空間の次元は必ず 1 である．つまり，固有ベクトルを 1 つ求めれば，それが固有空間の基底となる．そのため，慣れてくれば上の解答のように解のパラメータ表示を省略しても差支えない．また，固有ベクトルを求める際の基本変形も手早くできるようにしておくこと．ある程度簡単な形までくれば，後はまとめて基本変形しても構わない．ただし，求めた固有ベクトルを実際に A にかけて検算する習慣はつけておくこと．

例題 2.12.　行列 $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -2 & 2 & 1 \\ 4 & -2 & -1 \end{pmatrix}$ が対角化可能か判定し，可能ならば対角化せよ．

（解答）　A の固有方程式は

$$F_A(x) = \begin{vmatrix} x-3 & 1 & 1 \\ 2 & x-2 & -1 \\ -4 & 2 & x+1 \end{vmatrix} = x^3 - 4x^2 + 5x - 2 = (x-2)(x-1)^2 = 0$$

より，A の固有値は $\lambda = 1, 1, 2$ である．

固有値 $\lambda = 1$ に対する固有空間 $V(1)$ を求める．これは方程式 $(A - E_3)\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ の解空間であり

$$A - E_3 = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -2 & 1 & 1 \\ 4 & -2 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 1 行を 1/2 倍}]{\text{(1,1) 成分による第 1 列の掃き出し}} \begin{pmatrix} 1 & -1/2 & -1/2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

より，解は $x_2 = 2s,\ x_3 = 2t$ とおけば

$$\boldsymbol{x} = s\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \qquad (s, t \in \mathbb{R})$$

と表せる．よって，$V(1)$ の基底として $\boldsymbol{p}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$，$\boldsymbol{p}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ がとれ，$\dim V(1) = 2$ である．

固有値 $\lambda = 2$ に対する固有空間 $V(2)$ を求める．これは方程式 $(A - 2E_3)\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ の解空間であり

$$A - 2E_3 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -2 & 0 & 1 \\ 4 & -2 & -3 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 1 列の掃き出し}]{\text{(1,1) 成分による}} \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & -2 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{行基本変形}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1/2 \\ 0 & 1 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

より，$V(2)$ の基底として $\boldsymbol{p}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ がとれ，$\dim V(2) = 1$ である．

ゆえに，固有値の重複度と固有空間の次元がすべて一致するから A は対角化可能で

$$P = \begin{pmatrix} \boldsymbol{p}_1 & \boldsymbol{p}_2 & \boldsymbol{p}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}, \qquad P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

（解答終）

重複度が 2 以上の固有値があれば，まずその固有空間の次元から調べる方が効率がよい．後の例題の解答も参考にしてその理由を考えてみよ．また，固有ベクトルの成分は整数としておいた方がよいことも多い．

なお，固有方程式の計算はいろいろ工夫できることもある．この例題では各行の成分の和が一定であることに着目したり，サラスの公式で面倒な項をすぐに展開せずに

$$F_A(x) = (x-3)(x-2)(x+1) + 4 + 4 + 4(x-2) - 2(x+1) + 2(x-3) = (x-3)(x-2)(x+1) + 4(x-2)$$

と後ろの項のみ計算すれば因数が現れる．しかし，いつも上手くいくわけではないので，試行錯誤する前にサラスの公式ですべて展開して整理された 3 次方程式を作る方が速いことも少なくない．

例題 2.13. 行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & 4 & 1 \\ 2 & -4 & 0 \end{pmatrix}$ が対角化可能か判定し，可能ならば対角化せよ．

（解答） A の固有方程式は

$$F_A(x) = \begin{vmatrix} x-1 & -2 & -1 \\ 1 & x-4 & -1 \\ -2 & 4 & x \end{vmatrix} = x^3 - 5x^2 + 8x - 4 = (x-1)(x-2)^2 = 0$$

より，A の固有値は $\lambda = 1, 2, 2$ である．

固有値 $\lambda = 2$ に対する固有空間 $V(2)$ を求める．これは方程式 $(A - 2E_3)\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ の解空間であり

$$A - 2E_3 = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 2 & -4 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{(1,1) 成分による第 1 列の掃き出し}]{\text{第 1 行を } (-1) \text{ 倍してから}} \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

より，解は

$$\boldsymbol{x} = s \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad (s, t \in \mathbb{R})$$

と表せる．よって，$V(2)$ の基底として $\boldsymbol{p}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$，$\boldsymbol{p}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ がとれ，$\dim V(2) = 2$ である．

固有値 $\lambda = 1$ に対する固有空間 $V(1)$ を求める．これは方程式 $(A - E_3)\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ の解空間であり

$$A - E_3 = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ -1 & 3 & 1 \\ 2 & -4 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 1 列の掃き出し}]{\text{(2,1) 成分による}} \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ -1 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{行基本変形}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

より，$V(1)$ の基底として $\boldsymbol{p}_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ がとれ，$\dim V(1) = 1$ である．

ゆえに，固有値の重複度と固有空間の次元がすべて一致するから A は対角化可能で

$$P = \begin{pmatrix} \boldsymbol{p}_1 & \boldsymbol{p}_2 & \boldsymbol{p}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \qquad P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

（解答終）

繰り返しの注意になるが，最後に

$$P = \begin{pmatrix} \boldsymbol{p}_3 & \boldsymbol{p}_1 & \boldsymbol{p}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

としても正解である．ただし，$P = \begin{pmatrix} \boldsymbol{p}_1 & \boldsymbol{p}_3 & \boldsymbol{p}_2 \end{pmatrix}$ のようにおくことは応用上あまり適切ではないことがある．同じ固有値に対する固有ベクトルは隣りどうしにまとめておく方がよい．

例題 2.14. 行列 $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ が対角化可能かどうか判定し，可能ならば対角化せよ．

（解答） A の固有方程式は

$$F_A(x) = \begin{vmatrix} x+1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & x-1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x-1 & 0 \\ -4 & 0 & 0 & x+1 \end{vmatrix} = (x-1)^2 \begin{vmatrix} x+1 & -1 \\ -4 & x+1 \end{vmatrix} = (x-1)^3(x+3) = 0$$

より，A の固有値は $\lambda = 1, 1, 1, -3$ である．

固有値 $\lambda = 1$ に対する固有空間 $V(1)$ は $(A - E_4)\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ の解空間であり

$$A - E_4 = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 1 行を } (-1/2) \text{ 倍}]{\text{(1,1) 成分による第 1 列の掃き出し}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

より，解は

$$\boldsymbol{x} = s \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + u \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \qquad (s, t, u \in \mathbb{R})$$

と表せる．よって，$V(1)$ の基底として $\boldsymbol{p}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$，$\boldsymbol{p}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$，$\boldsymbol{p}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ がとれ，$\dim V(1) = 3$ である．

固有値 $\lambda = -3$ に対する固有空間 $V(-3)$ は $(A + 3E_4)\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ の解空間であり

$$A + 3E_4 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 1 行を 1/2 倍，第 2,3 行を 1/4 倍}]{\text{(1,1) 成分による第 1 列の掃き出し}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

より，解は

$$\boldsymbol{x} = t \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \qquad (t \in \mathbb{R})$$

と表せる．よって，$V(-3)$ の基底として $\boldsymbol{p}_4 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ がとれ，$\dim V(-3) = 1$ である．

ゆえに，固有値の重複度と固有空間の次元がすべて一致するから A は対角化可能で

$$P = \begin{pmatrix} \boldsymbol{p}_1 & \boldsymbol{p}_2 & \boldsymbol{p}_3 & \boldsymbol{p}_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}, \qquad P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

（解答終）

例題 2.15. 行列 $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 2 & 3 & -1 \\ 2 & -1 & 3 \end{pmatrix}$ が対角化可能か判定し，可能ならば対角化せよ．

（解答） A の固有方程式は

$$F_A(x) = \begin{vmatrix} x-3 & -2 & 1 \\ -2 & x-3 & 1 \\ -2 & 1 & x-3 \end{vmatrix} = x^3 - 9x^2 + 24x - 16 = (x-1)(x-4)^2 = 0$$

より，A の固有値は $\lambda = 1, 4, 4$ である．

固有値 $\lambda = 4$ に対する固有空間 $V(4)$ を求める．これは方程式 $(A - 4E_3)\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$ の解空間であり

$$A - 4E_3 = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & -1 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{(1,1) 成分による第 1 列の掃き出し}]{\text{第 3 行に第 2 行の } (-1) \text{ 倍を加える}} \begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 0 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{行基本変形}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

より

$$\dim V(4) = 3 - \operatorname{rank}(A - 4E_3) = 3 - 2 = 1$$

である．よって，固有値 4 の重複度 2 と $\dim V(4) = 1$ が異なるから，A は対角化可能でない．

（解答終）

具体的に方程式の解を求めて『$V(4)$ の基底として $\boldsymbol{p}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ がとれ，$\dim V(4) = 1$ である』としても，当然構わない．対角化できなくても固有ベクトル自体が有用な場合もあるので，固有空間の基底を計算する癖をつけておくのは悪いことではなく，具体的な計算問題においては検算に使うことができる．

例題 2.16. 行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ が対角化可能か判定し，可能ならば対角化せよ．

（解答） A の固有方程式は

$$F_A(x) = \begin{vmatrix} x-1 & 0 & -1 \\ -1 & x-1 & -2 \\ 1 & -2 & x-1 \end{vmatrix} = x^3 - 3x^2 = x^2(x-3) = 0$$

より，A の固有値は $\lambda = 0, 0, 3$ である．

固有値 $\lambda = 0$ に対する固有空間 $V(0)$ を求める．これは方程式 $A\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$ の解空間であり

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 1 列の掃き出し}]{\text{(1,1) 成分による}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 2 列の掃き出し}]{\text{(2,2) 成分による}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

より

$$\dim V(0) = 3 - \operatorname{rank} A = 3 - 2 = 1$$

である．よって，固有値 0 の重複度 2 と $\dim V(0) = 1$ が異なるから，A は対角化可能でない．

（解答終）

例題 2.17. 行列 $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ -4 & 6 & 2 \\ 4 & -4 & 0 \end{pmatrix}$ が対角化可能か判定し，可能ならば対角化せよ．

（解答） A の固有方程式は

$$F_A(x) = \begin{vmatrix} x & -2 & -1 \\ 4 & x-6 & -2 \\ -4 & 4 & x \end{vmatrix} = x^3 - 6x^2 + 12x - 8 = (x-2)^3 = 0$$

より，A の固有値は $\lambda = 2, 2, 2$ である．

固有値 $\lambda = 2$ に対する固有空間 $V(2)$ を求める．これは方程式 $(A - 2E_3)\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$ の解空間であり

$$A - 2E_3 = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 1 \\ -4 & 4 & 2 \\ 4 & -4 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 1 行を } (-1/2) \text{ 倍}]{(1,1) \text{ 成分による第 1 列の掃き出し}} \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1/2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

より

$$\dim V(2) = 3 - \operatorname{rank}(A - 2E_3) = 3 - 1 = 2$$

である．よって，固有値 2 の重複度 3 と $\dim V(2) = 2$ が異なるから，A は対角化可能でない．

（解答終）

例題 2.18. 行列 $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -3 & 3 \\ 1 & 2 & -3 & 1 \\ -1 & 0 & 3 & -2 \\ -3 & 0 & 5 & -4 \end{pmatrix}$ が対角化可能か判定し，可能ならば対角化せよ．

（解答） A の固有方程式は余因子展開を用いて計算すれば

$$\begin{aligned} F_A(x) &= \begin{vmatrix} x-3 & 0 & 3 & -3 \\ -1 & x-2 & 3 & -1 \\ 1 & 0 & x-3 & 2 \\ 3 & 0 & -5 & x+4 \end{vmatrix} \\ &= (x-2) \begin{vmatrix} x-3 & 3 & -3 \\ 1 & x-3 & 2 \\ 3 & -5 & x+4 \end{vmatrix} = (x-2)(x^3 - 2x^2 + x) = x(x-2)(x-1)^2 = 0 \end{aligned}$$

より，A の固有値は $\lambda = 0, 1, 1, 2$ である．

固有値 $\lambda = 1$ に対する固有空間 $V(1)$ を求める．これは方程式 $(A - E_4)\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$ の解空間であり

$$A - E_4 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -3 & 3 \\ 1 & 1 & -3 & 1 \\ -1 & 0 & 2 & -2 \\ -3 & 0 & 5 & -5 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 1 列の掃き出し}]{(3,1) \text{ 成分による}} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{行基本変形}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

より

$$\dim V(1) = 4 - \operatorname{rank}(A - E_4) = 4 - 3 = 1$$

である．よって，固有値 1 の重複度 2 と $\dim V(1) = 1$ が異なるから，A は対角化可能でない．

（解答終）

例題 2.19.　次の行列が対角化可能か判定し，可能ならば対角化せよ．

(1) $A=\begin{pmatrix}3&-6&-4\\1&-2&-2\\-1&3&3\end{pmatrix}$　　(2) $A=\begin{pmatrix}4&3&1\\-5&-4&-1\\2&2&1\end{pmatrix}$　　(3) $A=\begin{pmatrix}1&2&2\\1&2&-1\\3&-3&0\end{pmatrix}$

（解答）

(1)　A の固有方程式は

$$F_A(x)=\begin{vmatrix}x-3&6&4\\-1&x+2&2\\1&-3&x-3\end{vmatrix}=x^3-4x^2+5x-2=(x-2)(x-1)^2=0$$

より，A の固有値は $\lambda=1,1,2$ である．

固有値 $\lambda=1$ に対する固有空間 $V(1)$ を求める．これは方程式 $(A-E_3)\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ の解空間であり

$$A-E_3=\begin{pmatrix}2&-6&-4\\1&-3&-2\\-1&3&2\end{pmatrix}\xrightarrow[\text{(1,1) 成分による第 1 列の掃き出し}]{\text{第 1 行を 1/2 倍してから}}\begin{pmatrix}1&-3&-2\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$$

より，解は

$$\boldsymbol{x}=s\begin{pmatrix}3\\1\\0\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix}\qquad(s,t\in\mathbb{R})$$

と表せる．よって，$V(1)$ の基底として $\boldsymbol{p}_1=\begin{pmatrix}3\\1\\0\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{p}_2=\begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix}$ がとれ，$\dim V(1)=2$ である．

固有値 $\lambda=2$ に対する固有空間 $V(2)$ を求める．これは方程式 $(A-2E_3)\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ の解空間であり

$$A-2E_3=\begin{pmatrix}1&-6&-4\\1&-4&-2\\-1&3&1\end{pmatrix}\xrightarrow[\text{第 1 列の掃き出し}]{\text{(1,1) 成分による}}\begin{pmatrix}1&-6&-4\\0&2&2\\0&-3&-3\end{pmatrix}\xrightarrow{\text{行基本変形}}\begin{pmatrix}1&0&2\\0&1&1\\0&0&0\end{pmatrix}$$

より，$V(2)$ の基底として $\boldsymbol{p}_3=\begin{pmatrix}-2\\-1\\1\end{pmatrix}$ がとれ，$\dim V(2)=1$ である．

ゆえに，固有値の重複度と固有空間の次元がすべて一致するから A は対角化可能で

$$P=\begin{pmatrix}\boldsymbol{p}_1&\boldsymbol{p}_2&\boldsymbol{p}_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3&2&-2\\1&0&-1\\0&1&1\end{pmatrix},\qquad P^{-1}AP=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&2\end{pmatrix}$$

(2)　A の固有方程式は

$$F_A(x)=\begin{vmatrix}x-4&-3&-1\\5&x+4&1\\-2&-2&x-1\end{vmatrix}=x^3-x^2-x+1=(x+1)(x-1)^2=0$$

より，A の固有値は $\lambda=1,1,-1$ である．

固有値 $\lambda = 1$ に対する固有空間 $V(1)$ を求める．これは方程式 $(A - E_3)\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ の解空間であり

$$A - E_3 = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 1 \\ -5 & -5 & -1 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 1 列の掃き出し}]{\text{(3,1) 成分による}} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{行基本変形}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

より

$$\dim V(1) = 3 - \mathrm{rank}(A - E_3) = 3 - 2 = 1$$

である．よって，固有値 1 の重複度 2 と $\dim V(1) = 1$ が異なるから，A は対角化可能でない．

(3)　A の固有方程式は

$$F_A(x) = \begin{vmatrix} x-1 & -2 & -2 \\ -1 & x-2 & 1 \\ -3 & 3 & x \end{vmatrix} = x^3 - 3x^2 - 9x + 27 = (x+3)(x-3)^2 = 0$$

より，A の固有値は $\lambda = 3, 3, -3$ である．

固有値 $\lambda = 3$ に対する固有空間 $V(3)$ を求める．これは方程式 $(A - 3E_3)\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ の解空間であり

$$A - 3E_3 = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 2 \\ 1 & -1 & -1 \\ 3 & -3 & -3 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{(1,1) 成分による第 1 列の掃き出し}]{\text{第 1 行を } (-1/2) \text{ 倍してから}} \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

より，解は

$$\boldsymbol{x} = s\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad (s, t \in \mathbb{R})$$

と表せる．よって，$V(3)$ の基底として $\boldsymbol{p}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$，$\boldsymbol{p}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ がとれ，$\dim V(3) = 2$ である．

固有値 $\lambda = -3$ に対する固有空間 $V(-3)$ を求める．これは方程式 $(A + 3E_3)\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ の解空間であり

$$A + 3E_3 = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 2 \\ 1 & 5 & -1 \\ 3 & -3 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 1 列の掃き出し}]{\text{(2,1) 成分による}} \begin{pmatrix} 0 & -18 & 6 \\ 1 & 5 & -1 \\ 0 & -18 & 6 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{行基本変形}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2/3 \\ 0 & 1 & -1/3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

より，$V(-3)$ の基底として $\boldsymbol{p}_3 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ がとれ，$\dim V(-3) = 1$ である．

ゆえに，固有値の重複度と固有空間の次元がすべて一致するから A は対角化可能で

$$P = \begin{pmatrix} \boldsymbol{p}_1 & \boldsymbol{p}_2 & \boldsymbol{p}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \qquad P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

（解答終）

（手計算可能な数値設定のもとで）具体的な行列に対する対角化可能性の判定と，可能な場合の対角化は実行できるようにしておくこと．これができなければ，線形代数学を履修したと普通は認められません．

練習問題 2.1.　次の行列が対角化可能かどうか判定し，可能ならば対角化せよ．

(1) $\begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 & -4 \\ 2 & 3 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 2 & -1 \\ 2 & 2 & 2 & -1 \end{pmatrix}$　(2) $\begin{pmatrix} -3 & -2 & -2 & 1 \\ 2 & 3 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & 2 & -1 \\ -4 & -2 & -2 & 2 \end{pmatrix}$　(3) $\begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 & -2 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

(4) $\begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 & -2 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$　(5) $\begin{pmatrix} -1 & -1 & -6 & 3 \\ 1 & -2 & -3 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & -5 & 3 \end{pmatrix}$　(6) $\begin{pmatrix} 4 & -5 & 5 & -6 \\ 5 & -1 & -1 & -4 \\ 6 & -4 & 2 & -5 \\ 1 & -5 & 5 & -3 \end{pmatrix}$

（Hint：6 問とも複雑な余因子展開を用いずに解ける．どこかの行または列を基本変形で 1 つの成分を除いて 0 にし，3 次行列式に帰着させる計算法が適している．3 次行列式 2 個以上の和で書いてしまうと計算は大変になることもある.）

（解答）　与えられた行列を A とおく．固有多項式 $F_A(x)$ と対角化可能性のみ述べるので，後は自分で検算すること．

(1) $F_A(x) = (x-2)(x-3)(x-1)^2$，$\dim V(1) = 2$ より A は対角化可能

(2) $F_A(x) = x(x-2)(x-1)^2$，$\dim V(1) = 2$ より A は対角化可能

(3) $F_A(x) = (x-2)(x-1)^3$，$\dim V(1) = 2$ より A は対角化不可能

(4) $F_A(x) = (x-1)^2(x-2)^2$，$\dim V(1) = 2, \dim V(2) = 2$ より A は対角化可能

(5) $F_A(x) = x^2(x+1)(x-1)$，$\dim V(0) = 1$ より A は対角化不可能

(6) $F_A(x) = (x+2)^2(x-3)^2$，$\dim V(-2) = 1, \dim V(3) = 1$ より A は対角化不可能

例題 2.20. a を実数とする．行列 $A=\begin{pmatrix} a & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -a \end{pmatrix}$ が対角化可能であるための a の条件を求めよ．

（解答） A の固有方程式は

$$F_A(x)=\begin{vmatrix} x-a & 0 & -1 \\ 0 & x-1 & -1 \\ 0 & 0 & x+a \end{vmatrix}=(x-a)(x-1)(x+a)=0$$

より，A の固有値は $\lambda=1,a,-a$ である．

(i) $a \fallingdotseq 0,\pm 1$ のとき

固有値 $\lambda=1,a,-a$ がすべて異なるから，A は対角化可能である．

(ii) $a=0$ のとき

固有値は $\lambda=0,0,1$ であるから，重解の固有値 $\lambda=0$ に対する固有空間 $V(0)$ の次元を求める．$V(0)$ は方程式 $A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ の解空間であり

$$A=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{行基本変形}} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

より，$\dim V(0)=3-\operatorname{rank}A=3-2=1$ である．これは固有値 0 の重複度 2 と異なるから，A は対角化可能でない．

(iii) $a=1$ のとき

固有値は $\lambda=1,1,-1$ であるから，重解の固有値 $\lambda=1$ に対する固有空間 $V(1)$ の次元を求める．$V(1)$ は方程式 $(A-E_3)\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ の解空間であり

$$A-E_3=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{行基本変形}} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

より，$\dim V(1)=3-\operatorname{rank}(A-E_3)=3-1=2$ である．これは固有値 1 の重複度 2 と一致するから，A は対角化可能である．

(iv) $a=-1$ のとき

固有値は $\lambda=1,1,-1$ であるから，重解の固有値 $\lambda=1$ に対する固有空間 $V(1)$ の次元を求める．$V(1)$ は方程式 $(A-E_3)\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ の解空間であり

$$A-E_3=\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{行基本変形}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

より，$\dim V(1)=3-\operatorname{rank}(A-E_3)=3-2=1$ である．これは固有値 1 の重複度 2 と異なるから，A は対角化可能でない．

したがって，A が対角化可能であるのは $a \fallingdotseq 0,-1$ のときである．

（解答終）

例題 2.21. $A \in M_n(\mathbb{C})$ は $A^2 = A$ をみたすとする．

(1) A の固有値は 0 または 1 であることを示せ．

(2) A は対角化可能であることを示せ．

(3) $\operatorname{rank} A = \operatorname{tr} A$ であることを示せ．

（解答）

(1) A の固有値を $\lambda \in \mathbb{C}$ とし，λ に対する固有ベクトルを $\boldsymbol{u} \in \mathbb{C}^n$ とする．このとき，$A\boldsymbol{u} = \lambda \boldsymbol{u}$ であるから

$$A^2\boldsymbol{u} = A(A\boldsymbol{u}) = A(\lambda\boldsymbol{u}) = \lambda A\boldsymbol{u} = \lambda^2\boldsymbol{u}$$

となる．よって，仮定より $A^2 - A = O$ であるから

$$(A^2 - A)\boldsymbol{u} = (\lambda^2 - \lambda)\boldsymbol{u} = \boldsymbol{0}$$

となる．$\boldsymbol{u} \neq \boldsymbol{0}$ より，$\lambda^2 = \lambda$ であるから，$\lambda = 0, 1$ が成り立つ．

(2) A が対角化可能であることを示すには，(1) より

$$\mathbb{C}^n = V(0) \oplus V(1)$$

であることを示せばよい．

ここで，異なる固有値の固有空間に関して $V(0) \cap V(1) = \{\boldsymbol{0}\}$ は明らかに成り立つ．また，任意の $\boldsymbol{x} \in \mathbb{C}^n$ に対して

$$\boldsymbol{x} = (\boldsymbol{x} - A\boldsymbol{x}) + A\boldsymbol{x}$$

と表すと

$$\begin{aligned} A(\boldsymbol{x} - A\boldsymbol{x}) &= A\boldsymbol{x} - A^2\boldsymbol{x} = A\boldsymbol{x} - A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0} & \qquad \therefore\ \boldsymbol{x} - A\boldsymbol{x} \in V(0) \\ A(A\boldsymbol{x}) &= A^2\boldsymbol{x} = A\boldsymbol{x} & \qquad \therefore\ A\boldsymbol{x} \in V(1) \end{aligned}$$

より，$\boldsymbol{x} = (\boldsymbol{x} - A\boldsymbol{x}) + A\boldsymbol{x} \in V(0) + V(1)$ が成り立つ．よって，$\mathbb{C}^n = V(0) + V(1)$ となる．

以上より，$\mathbb{C}^n = V(0) \oplus V(1)$ が成り立つから，A は対角化可能である．

(3) A の固有値 1 の重複度を l とする．このとき，(2) より A は対角化可能だから，ある正則行列 P に対して

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

とできる．ここで，対角成分に 1 は l 個並んでいる．よって

$$\operatorname{rank}(P^{-1}AP) = l, \qquad \operatorname{tr}(P^{-1}AP) = l$$

である．ゆえに，共役な行列に対して階数およびトレースはともに等しくなる，つまり

$$\operatorname{rank}(P^{-1}AP) = \operatorname{rank} A, \qquad \operatorname{tr}(P^{-1}AP) = \operatorname{tr} A$$

となることから，$\operatorname{rank} A = l = \operatorname{tr} A$ が成り立つ．

（解答終）

2.4　行列の n 乗

m 次正方行列 A が対角化可能な場合には，対角化を利用して A の n 乗 A^n が計算できる．特に 2 次正方行列の場合については第 2 章でも扱ったが，対角化の概念を使って再度まとめて説明する．通常は行列の n 乗を考えることが多いので，ここでは行列のサイズを m 次としていることに注意すること．

まず行列の n 乗と対角化の関係性を説明する．もし m 次正方行列 A が正則行列 P を用いて

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_m \end{pmatrix} = D$$

と対角化できているとする．ここで，右辺の対角行列を D とおいた．この両辺を n 乗すれば，当然

$$(P^{-1}AP)^n = D^n$$

となるので，左辺と右辺をそれぞれ計算してみる．

例えば $n = 3$ として実際に計算すれば，左辺は

$$\begin{aligned} (P^{-1}AP)^3 &= (P^{-1}AP)(P^{-1}AP)(P^{-1}AP) \\ &= P^{-1}APP^{-1}APP^{-1}AP = P^{-1}AAAP = P^{-1}A^3P \end{aligned}$$

であり，右辺は

$$D^2 = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1^2 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2^2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3^2 \end{pmatrix}$$

$$D^3 = D^2 D = \begin{pmatrix} \lambda_1^2 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2^2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1^3 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2^3 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3^3 \end{pmatrix}$$

となる．これより見当がつくと思われるが，一般の場合は次のようになる．

例題 2.22.　n を自然数とするとき，次が成り立つことを数学的帰納法により証明せよ．

(1) A を m 次正方行列，P を m 次正則行列とするとき

$$(P^{-1}AP)^n = P^{-1}A^nP$$

となる．

(2) D を以下のような m 次対角行列とすると，その n 乗は次のようになる．

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_m \end{pmatrix} \quad \Longrightarrow \quad D^n = \begin{pmatrix} \lambda_1^n & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2^n & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_m^n \end{pmatrix}$$

証明.　基本的な内容なので，各自で確かめてみよ．　□

この結果より，次から説明する例題のように行列の n 乗は計算できる．

例題 2.23. $A = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ とおく．自然数 n に対して，A^n を求めよ．

（解答） A の固有方程式は

$$F_A(x) = \begin{vmatrix} x-4 & -1 \\ -2 & x-3 \end{vmatrix} = x^2 - 7x + 10 = (x-2)(x-5) = 0$$

より，A の固有値は $\lambda = 2, 5$ である．よって，固有値がすべて異なるから A は対角化可能である．

固有値 $\lambda = 2$ に対する固有空間 $V(2)$ を求める．これは方程式 $(A - 2E_2)\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ の解空間であり

$$A - 2E_2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{行基本変形}} \begin{pmatrix} 1 & 1/2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

より，$V(2)$ の基底として $\boldsymbol{p}_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ がとれる．

固有値 $\lambda = 5$ に対する固有空間 $V(5)$ を求める．これは方程式 $(A - 5E_2)\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ の解空間であり

$$A - 5E_2 = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{行基本変形}} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

より，$V(5)$ の基底として $\boldsymbol{p}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ がとれる．

ゆえに

$$P = \begin{pmatrix} \boldsymbol{p}_1 & \boldsymbol{p}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \qquad P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$$

と対角化できる．よって，この両辺を n 乗すれば

$$(P^{-1}AP)^n = P^{-1}A^nP = \begin{pmatrix} 2^n & 0 \\ 0 & 5^n \end{pmatrix}$$

となる．ここで

$$P^{-1} = \frac{1}{-3} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

なので

$$A^n = P \begin{pmatrix} 2^n & 0 \\ 0 & 5^n \end{pmatrix} P^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2^n & 0 \\ 0 & 5^n \end{pmatrix} \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 \cdot 5^n + 2^n & 5^n - 2^n \\ 2 \cdot 5^n - 2^{n+1} & 5^n + 2^{n+1} \end{pmatrix}$$

（解答終）

この例題が対角化可能な行列の n 乗の基本的な計算法である．対角化してから n 乗することによって，計算は大変ではあるが答えを求めることができる．最後の答えの形からわかるように，$A^2, A^3, A^4, \ldots$ と順に計算しても A^n を推測するのは難しい．何か規則性があれば，A^n の形を推測して数学的帰納法で証明できることもあるが，普通はそのように計算するのは困難である．必ずこの例題の流れを把握しておくこと．

例題 2.24. 2 つの数列 $\{a_n\}, \{b_n\}$ は $a_1 = 1,\ b_1 = 2$ であり，次の漸化式をみたしている．

$$\begin{cases} a_{n+1} = 5a_n + 2b_n \\ b_{n+1} = a_n + 4b_n \end{cases} \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots)$$

(1) $A = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$ とおく．自然数 n に対して，A^n を求めよ．

(2) 一般項 a_n と b_n を求めよ．

（解答）

(1) A の固有方程式は

$$F_A(x) = \begin{vmatrix} x-5 & -2 \\ -1 & x-4 \end{vmatrix} = x^2 - 9x + 18 = (x-3)(x-6) = 0$$

より，A の固有値は $\lambda = 3, 6$ である．よって，固有値がすべて異なるから A は対角化可能である．

固有値 $\lambda = 3$ に対する固有空間 $V(3)$ を求める．これは方程式 $(A - 3E_2)\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ の解空間であり

$$A - 3E_2 = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{行基本変形}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

より，$V(3)$ の基底として $\boldsymbol{p}_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ がとれる．

固有値 $\lambda = 6$ に対する固有空間 $V(6)$ を求める．これは方程式 $(A - 6E_2)\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ の解空間であり

$$A - 6E_2 = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{行基本変形}} \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

より，$V(6)$ の基底として $\boldsymbol{p}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ がとれる．

ゆえに

$$P = \begin{pmatrix} \boldsymbol{p}_1 & \boldsymbol{p}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \qquad P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}$$

と対角化できる．よって，この両辺を n 乗すれば

$$(P^{-1}AP)^n = P^{-1}A^nP = \begin{pmatrix} 3^n & 0 \\ 0 & 6^n \end{pmatrix}$$

となる．ここで

$$P^{-1} = \frac{1}{-3}\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

なので

$$A^n = P\begin{pmatrix} 3^n & 0 \\ 0 & 6^n \end{pmatrix}P^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3^n & 0 \\ 0 & 6^n \end{pmatrix}\frac{1}{3}\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2\cdot 6^n + 3^n & 2\cdot 6^n - 2\cdot 3^n \\ 6^n - 3^n & 6^n + 2\cdot 3^n \end{pmatrix}$$

(2) 与えられた漸化式は

$$\begin{pmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix} = A\begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix}$$

と表せるので

$$\begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix} = A^{n-1}\begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2\cdot 6^{n-1} + 3^{n-1} & 2\cdot 6^{n-1} - 2\cdot 3^{n-1} \\ 6^{n-1} - 3^{n-1} & 6^{n-1} + 2\cdot 3^{n-1} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\cdot 6^{n-1} - 3^{n-1} \\ 6^{n-1} + 3^{n-1} \end{pmatrix}$$

となる．よって，$a_n = 2\cdot 6^{n-1} - 3^{n-1},\ b_n = 6^{n-1} + 3^{n-1}$ である．

（解答終）

例題 2.25. $A = \begin{pmatrix} -2 & -5 & -1 \\ 2 & 4 & 0 \\ -2 & -3 & 1 \end{pmatrix}$ とおく．自然数 n に対して，A^n を求めよ．

（解答） A の固有方程式は

$$F_A(x) = \begin{vmatrix} x+2 & 5 & 1 \\ -2 & x-4 & 0 \\ 2 & 3 & x-1 \end{vmatrix} = x^3 - 3x^2 + 2x = x(x-1)(x-2) = 0$$

より，A の固有値は $\lambda = 0, 1, 2$ であり，固有値がすべて異なるから対角化可能である．

固有値 $\lambda = 0$ に対する固有空間 $V(0)$ を求める．これは方程式 $A\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$ の解空間であり

$$A = \begin{pmatrix} -2 & -5 & -1 \\ 2 & 4 & 0 \\ -2 & -3 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 1 列の掃き出し}]{\text{(2,1) 成分による}} \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 2 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{行基本変形}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

より，$V(0)$ の基底として $\boldsymbol{p}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ がとれる．

固有値 $\lambda = 1$ に対する固有空間 $V(1)$ を求める．これは方程式 $(A - E_3)\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$ の解空間であり

$$A - E_3 = \begin{pmatrix} -3 & -5 & -1 \\ 2 & 3 & 0 \\ -2 & -3 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 1 列の掃き出し}]{\text{(2,1) 成分による}} \begin{pmatrix} 0 & -1/2 & -1 \\ 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{行基本変形}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

より，$V(1)$ の基底として $\boldsymbol{p}_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ がとれる．

固有値 $\lambda = 2$ に対する固有空間 $V(2)$ を求める．これは方程式 $(A - 2E_3)\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$ の解空間であり

$$A - 2E_3 = \begin{pmatrix} -4 & -5 & -1 \\ 2 & 2 & 0 \\ -2 & -3 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 1 列の掃き出し}]{\text{(2,1) 成分による}} \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 2 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{行基本変形}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

より，$V(2)$ の基底として $\boldsymbol{p}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ がとれる．

ゆえに

$$P = \begin{pmatrix} \boldsymbol{p}_1 & \boldsymbol{p}_2 & \boldsymbol{p}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ -1 & -2 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \qquad P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

と対角化できる．この両辺を n 乗すれば

$$(P^{-1}AP)^n = P^{-1}A^nP = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix}$$

となる．

ここで

$$
(P\,|\,E_3)=\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 3 & 1 & 1 & 0 & 0\\ -1 & -2 & -1 & 0 & 1 & 0\\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1\end{array}\right)
\xrightarrow[\text{第 1 列の掃き出し}]{\text{(3,1) 成分による}}
\left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 1 & -1 & 1 & 0 & -2\\ 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1\end{array}\right)
$$

$$
\xrightarrow[\text{第 2 列の掃き出し}]{\text{(2,2) 成分による}}
\left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 0 & -1 & 1 & 1 & -1\\ 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 1\\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 2\end{array}\right)
$$

$$
\xrightarrow[\text{第 3 列の掃き出し}]{\text{(1,3) 成分による}}
\left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 0 & -1 & 1 & 1 & -1\\ 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 1\\ 1 & 0 & 0 & 1 & 2 & 1\end{array}\right)
$$

$$
\xrightarrow{\text{第 2 行と第 3 行を }(-1)\text{ 倍}}
\left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 1\\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & -1\\ 1 & 0 & 0 & 1 & 2 & 1\end{array}\right)
$$

$$
\xrightarrow[\text{入れ替え}]{\text{第 1 行と第 3 行の}}
\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 2 & 1\\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & -1\\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 1\end{array}\right)
$$

より

$$
P^{-1}=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1\\ 0 & -1 & -1\\ -1 & -1 & 1\end{pmatrix}
$$

となる．よって

$$
\begin{aligned}
A^n=P\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 2^n\end{pmatrix}P^{-1}&=\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1\\ -1 & -2 & -1\\ 1 & 1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 2^n\end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1\\ 0 & -1 & -1\\ -1 & -1 & 1\end{pmatrix}\\
&=\begin{pmatrix} -2^n & -2^n-3 & 2^n-3\\ 2^n & 2^n+2 & -2^n+2\\ -2^n & -2^n-1 & 2^n-1\end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

（解答終）

このように 3 次正方行列の n 乗計算はかなり大変である．今回は固有値が 0 や 1 だったのでまだ簡単だったが，一般にはかなりハードな計算量となる．例えば

$$
A=\begin{pmatrix} 3 & -1 & 1\\ -3 & 0 & 0\\ 1 & 4 & 0\end{pmatrix}
$$

の n 乗を計算すれば

$$
A^n=\frac{1}{20}\begin{pmatrix} -10\cdot 2^{n+1}+4\cdot 3^{n+2}-2(-2)^{n+1} & -10\cdot 2^n+4\cdot 3^n+6(-2)^n & -10\cdot 2^n+4\cdot 3^{n+1}-2(-2)^n\\ 15\cdot 2^{n+1}-4\cdot 3^{n+2}-3(-2)^{n+1} & 15\cdot 2^n-4\cdot 3^n+9(-2)^n & 15\cdot 2^n-4\cdot 3^{n+1}-3(-2)^n\\ 25\cdot 2^{n+1}-4\cdot 3^{n+2}+7(-2)^{n+1} & 25\cdot 2^n-4\cdot 3^n-21(-2)^n & 25\cdot 2^n-4\cdot 3^{n+1}+7(-2)^n\end{pmatrix}
$$

となる．この計算をミスなく行うことは簡単ではない．

3　対角化の応用例

3.1　確率行列

行列の n 乗を利用すれば，次のような考察ができる．

例題 3.1.　ある業界では A 社，B 社，C 社がサービスを提供し，毎年次のように利用者が契約を変更する．

- A 社から，A 社で継続が 80 %，B 社へ変更が 10 %，C 社へ変更が 10 %
- B 社から，A 社へ変更が 10 %，B 社で継続が 70 %，C 社へ変更が 20 %
- C 社から，A 社へ変更が 10 %，B 社へ変更が 5 %，C 社で継続が 85 %

長期間後に各社の契約者数の比率はどうなっていくか調べよ．ただし，簡単のために全契約者数は毎年一定とし，新規契約や契約解除は考えないこととする．

（解答）　今年の A 社，B 社，C 社の契約者数をそれぞれ a_0, b_0, c_0 とし，n 年後の人数をそれぞれ a_n, b_n, c_n とする．このとき，n 年後の人数と $n+1$ 年後の人数の関係は

$$\begin{cases} a_{n+1} = 0.8a_n + 0.1b_n + 0.1c_n \\ b_{n+1} = 0.1a_n + 0.7b_n + 0.05c_n \\ c_{n+1} = 0.1a_n + 0.2b_n + 0.85c_n \end{cases}$$

であるから，行列を用いて表せば

$$A = \begin{pmatrix} 0.8 & 0.1 & 0.1 \\ 0.1 & 0.7 & 0.05 \\ 0.1 & 0.2 & 0.85 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \\ c_{n+1} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix} \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots)$$

となる．A の固有方程式は

$$\begin{aligned} F_A(x) = \begin{vmatrix} x-0.8 & -0.1 & -0.1 \\ -0.1 & x-0.7 & -0.05 \\ -0.1 & -0.2 & x-0.85 \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} x-1 & x-1 & x-1 \\ -0.1 & x-0.7 & -0.05 \\ -0.1 & -0.2 & x-0.85 \end{vmatrix} && \text{（第 2 行と第 3 行を第 1 行に加える）} \\ &= \begin{vmatrix} x-1 & 0 & 0 \\ -0.1 & x-0.6 & 0.05 \\ -0.1 & -0.1 & x-0.75 \end{vmatrix} && \text{（(1,1) 成分による第 1 行の掃き出し）} \\ &= (x-1) \begin{vmatrix} x-0.6 & 0.05 \\ -0.1 & x-0.75 \end{vmatrix} \\ &= (x-1)(x^2 - 1.35x + 4.505) = (x-1)(x-0.7)(x-0.65) = 0 \end{aligned}$$

より，A の固有値は $\lambda = 1, 0.7, 0.65$ である．固有値がすべて異なるので，A は対角化可能である．

固有値 $\lambda = 1$ に対する固有空間 $V(1)$ を求める．これは方程式 $(A - E_3)\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$ の解空間であり

$$A - E_3 = \begin{pmatrix} -0.2 & 0.1 & 0.1 \\ 0.1 & -0.3 & 0.05 \\ 0.1 & 0.2 & -0.15 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 1 列の掃き出し}]{\text{(3,1) 成分による}} \begin{pmatrix} 0 & 0.5 & -0.2 \\ 0 & -0.5 & 0.2 \\ 0.1 & 0.2 & -0.15 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{行基本変形}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -0.7 \\ 0 & 1 & -0.4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

より，$V(1)$ の基底として $\boldsymbol{p}_1 = \begin{pmatrix} 7 \\ 4 \\ 10 \end{pmatrix}$ がとれる．

固有値 $\lambda = 0.7$ に対する固有空間 $V(0.7)$ を求める．これは方程式 $(A - 0.7E_3)\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ の解空間であり

$$A - 0.7E_3 = \begin{pmatrix} 0.1 & 0.1 & 0.1 \\ 0.1 & 0 & 0.05 \\ 0.1 & 0.2 & 0.15 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 1 列の掃き出し}]{(2,1) \text{ 成分による}} \begin{pmatrix} 0 & 0.1 & 0.05 \\ 0.1 & 0 & 0.05 \\ 0 & 0.2 & 0.1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{行基本変形}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0.5 \\ 0 & 1 & 0.5 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

より，$V(0.7)$ の基底として $\boldsymbol{p}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ がとれる．

固有値 $\lambda = 0.65$ に対する固有空間 $V(0.65)$ を求める．これは方程式 $(A - 0.65E_3)\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ の解空間であり

$$A - 0.65E_3 = \begin{pmatrix} 0.15 & 0.1 & 0.1 \\ 0.1 & 0.05 & 0.05 \\ 0.1 & 0.2 & 0.2 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 1 列の掃き出し}]{(3,1) \text{ 成分による}} \begin{pmatrix} 0 & -0.2 & -0.2 \\ 0 & -0.15 & -0.15 \\ 0.1 & 0.2 & 0.2 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{行基本変形}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

より，$V(0.65)$ の基底として $\boldsymbol{p}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ がとれる．

ゆえに

$$P = \begin{pmatrix} \boldsymbol{p}_1 & \boldsymbol{p}_2 & \boldsymbol{p}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & -1 & 0 \\ 4 & -1 & -1 \\ 10 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \qquad P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0.7 & 0 \\ 0 & 0 & 0.65 \end{pmatrix}$$

と対角化できる．よって，両辺を n 乗すれば

$$P^{-1}A^nP = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0.7^n & 0 \\ 0 & 0 & 0.65^n \end{pmatrix}$$

となる．また，掃き出し法により

$$P^{-1} = \frac{1}{21}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -14 & 7 & 7 \\ 18 & -24 & -3 \end{pmatrix}$$

であるから

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix} &= A^n \begin{pmatrix} a_0 \\ b_0 \\ c_0 \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0.7^n & 0 \\ 0 & 0 & 0.65^n \end{pmatrix} P^{-1} \begin{pmatrix} a_0 \\ b_0 \\ c_0 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{21}\begin{pmatrix} 7(a_0 + b_0 + c_0) - (-14a_0 + 7b_0 + 7c_0)0.7^n \\ 4(a_0 + b_0 + c_0) - (-14a_0 + 7b_0 + 7c_0)0.7^n - (18a_0 - 24b_0 - 3c_0)0.65^n \\ 10(a_0 + b_0 + c_0) + (-28a_0 + 14b_0 + 14c_0)0.7^n + (18a_0 - 24b_0 - 3c_0)0.65^n \end{pmatrix} \end{aligned}$$

となる．ゆえに

$$\lim_{n \to \infty} a_n = \frac{7(a_0 + b_0 + c_0)}{21}, \qquad \lim_{n \to \infty} b_n = \frac{4(a_0 + b_0 + c_0)}{21}, \qquad \lim_{n \to \infty} c_n = \frac{10(a_0 + b_0 + c_0)}{21}$$

である．したがって，長期間後には A 社，B 社，C 社の契約人数比は $7:4:10$ に（指数関数的に）限りなく近づいていく．

（解答終）

例題 3.1 で現れた行列 $A=\begin{pmatrix}0.8 & 0.1 & 0.1\\ 0.1 & 0.7 & 0.05\\ 0.1 & 0.2 & 0.85\end{pmatrix}$ は，各列ベクトルの成分の和がすべて 1 となっている．これは問題設定（確率による分配）と漸化式の作り方から当たり前のことである．各自でもう一度見直してみよ．なお，高校数学では確率漸化式とも呼ばれる分野であるが，本来は行列を用いて統一的に解くのが一般的である．

このように各列ベクトルの成分の和がどこでも 1 になる行列には名前がついている．

定義 3.2. （確率行列）
$A\in M_n(\mathbb{R})$ の成分がすべて 0 以上であり，さらに

$$\sum_{i=1}^{n} a_{ij}=1 \qquad (j=1,2,\ldots,n)$$

が成り立つ，つまり各列ベクトルの成分の和が 1 になるとき，A を確率行列という．

確率行列の簡単な性質として次が成り立つことがわかる．

例題 3.3. 　$A,B\in M_n(\mathbb{R})$ を確率行列とするとき，次を示せ．

(1) $0\leqq t\leqq 1$ に対して，$(1-t)A+tB$ も確率行列である．

(2) 積 AB も確率行列である．

（解答）　確率行列を $A=(a_{ij})_{ij},\ B=(b_{ij})_{ij}$ とおく．

(1)　$C=(1-t)A+tB$ とおく．C の (i,j) 成分 c_{ij} は $a_{ij}\geqq 0,\ b_{ij}\geqq 0,\ 0\leqq t\leqq 1$ より

$$c_{ij}=(1-t)a_{ij}+tb_{ij}\geqq 0$$

となる．次に $j=1,2,\ldots,n$ に対して，第 j 列の成分の和は

$$\sum_{i=1}^{n} c_{ij}=\sum_{i=1}^{n}\{(1-t)a_{ij}+tb_{ij}\}=(1-t)\sum_{i=1}^{n} a_{ij}+t\sum_{i=1}^{n} b_{ij}=(1-t)+t=1$$

が成り立つ．したがって，$C=(1-t)A+tB$ も確率行列である．

(2)　$C=AB$ とおく．C の (i,j) 成分 c_{ij} は $a_{ij}\geqq 0,\ b_{ij}\geqq 0$ より

$$c_{ij}=\sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj}\geqq 0$$

となる．次に $j=1,2,\ldots,n$ に対して，第 j 列の成分の和は

$$\sum_{i=1}^{n} c_{ij}=\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj}=\sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} a_{ik}b_{kj}=\sum_{k=1}^{n} b_{kj}\left(\sum_{i=1}^{n} a_{ik}\right)=\sum_{k=1}^{n} b_{kj}=1$$

が成り立つ．したがって，$C=AB$ も確率行列である．

（解答終）

確率行列については次の性質が重要である．

定理 3.4. （確率行列の固有値）
$A \in M_n(\mathbb{R})$ が確率行列ならば，A の固有値の 1 つは 1 であり，さらに A の固有値の絶対値はすべて 1 以下である．

証明. すべての成分が 1 のベクトルを

$$\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$$

とおく．転置行列 ${}^tA$ について，確率行列の定義より

$${}^tA\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} + a_{21} + \cdots + a_{n1} \\ a_{12} + a_{22} + \cdots + a_{n2} \\ \vdots \\ a_{1n} + a_{2n} + \cdots + a_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} = \boldsymbol{v}$$

であるから，1 は ${}^tA$ の固有値であり，$\boldsymbol{v}$ は 1 に対する固有ベクトルである．また，転置をとっても行列式は変わらないので

$$F_{{}^tA}(x) = \det(xE_n - {}^tA) = \det({}^t(xE_n - A)) = \det(xE_n - A) = F_A(x)$$

が成り立つから，A と ${}^tA$ の固有値はすべて一致する．よって，A の固有値の 1 つは 1 である．

次に，$\lambda \in \mathbb{C}$ を A の固有値，$\boldsymbol{w} = {}^t(w_1, w_2, \cdots, w_n) \in \mathbb{C}^n$ を λ に対する固有ベクトルとする．$\boldsymbol{w} \neq \boldsymbol{0}$ であるから，$\boldsymbol{w}$ の成分のうちもっとも絶対値が大きいものを第 j 成分とする．このとき，$A\boldsymbol{w} = \lambda\boldsymbol{w}$ の第 j 行は

$$a_{j1}w_1 + a_{j2}w_2 + \cdots + a_{jj}w_j + \cdots + a_{jn}w_n = \lambda w_j$$

であるから，$a_{ij} \geqq 0$ と A の列ベクトルの成分の和が 1 であること，および $|w_k| \leqq |w_j|$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$ より

$$\begin{aligned} |\lambda w_j| = |\, a_{j1}w_1 + a_{j2}w_2 + \cdots + a_{jn}w_n \,| &\leqq a_{j1}|w_1| + a_{j2}|w_2| + \cdots + a_{jn}|w_n| \\ &\leqq (a_{j1} + a_{j2} + \cdots + a_{jn})|w_j| = |w_j| \end{aligned}$$

が成り立つ．ゆえに，$|w_j| \neq 0$ より $|\lambda| \leqq 1$ が得られる． □

例題 3.1 の答えの部分で

$$\lim_{n \to \infty} \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix} = \frac{a_0 + b_0 + c_0}{21} \begin{pmatrix} 7 \\ 4 \\ 10 \end{pmatrix} = \frac{a_0 + b_0 + c_0}{21}\, \boldsymbol{p}_1$$

と $n \to \infty$ の極限を考えたときに現れる "極限ベクトル" は A の固有値 1 に対する固有ベクトルとなっている．実際，A の固有値の 1 つは 1 であり，他の固有値の絶対値が 1 より小さいから $0.7^n \to 0,\ 0.65^n \to 0$ となるためである．行列の積をとる前に極限をとって確認してみよ．

このように，十分時間が経過した後の状態のみを知りたければ，固有値 1 の固有ベクトルを見れば済むこともある．詳しくは確率・統計の参考書を参照してほしい．

3.2　1 階連立微分方程式

a_{ij} $(i,j=1,2,\ldots,n)$ を実数とする．関数 $x_1=x_1(t),\ x_2=x_2(t),\ \ldots,\ x_n=x_n(t)$ に関する微分方程式

$$\begin{cases} x_1'(t)=a_{11}x_1(t)+a_{12}x_2(t)+\cdots+a_{1n}x_n(t) \\ x_2'(t)=a_{21}x_1(t)+a_{22}x_2(t)+\cdots+a_{2n}x_n(t) \\ \qquad\qquad\vdots \\ x_n'(t)=a_{n1}x_1(t)+a_{n2}x_2(t)+\cdots+a_{nn}x_n(t) \end{cases}$$

を**定数係数 1 階連立微分方程式**という．この微分方程式をそのまま解くのは簡単ではないが，行列を用いて

$$\begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ \vdots \\ x_n' \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

と表せるので，行列の対角化を利用して解くことができる．

例題 3.5.　次の連立微分方程式の解 $x_1=x_1(t), x_2=x_2(t)$ を求めよ．

$$\begin{cases} x_1'=3x_1+8x_2 \\ x_2'=4x_1-x_2 \end{cases}$$

（解答）　連立微分方程式を行列を用いて表せば

$$A=\begin{pmatrix} 3 & 8 \\ 4 & -1 \end{pmatrix},\qquad \begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \end{pmatrix}=A\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

となる．A の固有方程式は

$$F_A(t)=\begin{vmatrix} t-3 & -8 \\ -4 & t+1 \end{vmatrix}=t^2-2t-35=(t-7)(t+5)=0$$

より，A の固有値は $\lambda=7,-5$ である．固有値がすべて異なるので，A は対角化可能である．

固有値 $\lambda=7$ に対する固有空間 $V(7)$ を求める．これは方程式 $(A-7E_2)\boldsymbol{x}=\mathbf{0}$ の解空間であり

$$A-7E_2=\begin{pmatrix} -4 & 8 \\ 4 & -8 \end{pmatrix}\xrightarrow[\text{第 1 行を } (-1/4) \text{ 倍}]{(1,1)\text{ 成分による第 1 列の掃き出し}}\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

より，固有空間 $V(7)$ の基底として $\boldsymbol{p}_1=\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ がとれる．

固有値 $\lambda=-5$ に対する固有空間 $V(-5)$ を求める．これは方程式 $(A+5E_2)\boldsymbol{x}=\mathbf{0}$ の解空間であり

$$A+5E_2=\begin{pmatrix} 8 & 8 \\ 4 & 4 \end{pmatrix}\xrightarrow[\text{第 1 行を 1/8 倍}]{(1,1)\text{ 成分による第 1 列の掃き出し}}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

より，固有空間 $V(-5)$ の基底として $\boldsymbol{p}_2=\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ がとれる．

よって，行列 A は

$$P=\begin{pmatrix} \boldsymbol{p}_1 & \boldsymbol{p}_2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix},\qquad P^{-1}AP=\begin{pmatrix} 7 & 0 \\ 0 & -5 \end{pmatrix}$$

と対角化できる．

ここで，新しい関数 y_1, y_2 を

$$\begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{pmatrix} = P^{-1} \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$$

で定める．このとき，この両辺を微分すれば

$$\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = P^{-1} \begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \end{pmatrix} = P^{-1}A \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = P^{-1}AP \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 0 \\ 0 & -5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7y_1 \\ -5y_2 \end{pmatrix}$$

であるから，y_1, y_2 に関する微分方程式は

$$\begin{cases} y_1' = 7y_1 \\ y_2' = -5y_2 \end{cases}$$

となる．これを解けば，C_1, C_2 を任意の定数として

$$y_1 = C_1 e^{7t}, \qquad y_2 = C_2 e^{-5t}$$

と求まるから

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2y_1 - y_2 \\ y_1 + y_2 \end{pmatrix}$$

より

$$x_1(t) = 2C_1 e^{7t} - C_2 e^{-5t}, \qquad x_2(t) = C_1 e^{7t} + C_2 e^{-5t}$$

（解答終）

今回の問題で対角化が有効に働いたのは，未知関数の置き換えにより

$$\begin{cases} x_1' = 3x_1 + 8x_2 \\ x_2' = 4x_1 - x_2 \end{cases} \qquad \Longrightarrow \qquad \begin{cases} y_1' = 7y_1 \\ y_2' = -5y_2 \end{cases}$$

とできたことにある．変換後では形としては連立しているが，実質的に y_1 単独の微分方程式と y_2 単独の微分方程式とに分離できている．そのため，元の問題よりも簡単に解くことができ，最後に対角化のための変換行列 P を用いて x_1 と x_2 に戻せばよい．

もし初期条件（例えば $x_1(0) = 2,\ x_2(0) = 7$）などがあれば，最後の一般解における任意定数 C_1, C_2 を条件をみたすよう具体的に求めればよい．その際には連立 1 次方程式を解くことになる．

このように，対角化を利用して各成分方向に分離することにより，解析しやすい問題に帰着させるという手法は，物理・化学・工学などの広い分野において現れる．

例題 3.5 は正方行列 A の指数関数 e^A を用いれば，より簡明に解を求められる．実際，$\boldsymbol{x}(t) = e^{tA}\boldsymbol{x}_0$ とおけば，形式的には

$$(e^{tA})' = Ae^{tA}$$

と t の “係数” の A が前に出てくることが期待できるので，次の連立常微分方程式

$$\boldsymbol{x}'(t) = A\boldsymbol{x}(t), \qquad \boldsymbol{x}(0) = \boldsymbol{x}_0$$

の解となる．ただし，行列の指数関数 e^A の意味を明確にしなければならない．そこで，e^x のマクローリン展開式

$$e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots$$

を参考にして，e^A を次のように定義する．

定義 3.6. （行列の指数関数）
$A \in M_n(\mathbb{C})$ に対して，n 次正方行列 e^A を

$$e^A = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!} = E_n + A + \frac{1}{2!}\,A^2 + \frac{1}{3!}\,A^3 + \cdots$$

で定める．ただし，$A^0 = E_n$ と約束する．

厳密には e^A の定義式の無限級数が収束することを示さなければならないが，ここでは省略する．行列の各成分の無限級数が収束すればよいと考えれば，1 変数の微分積分の問題である．

行列の指数関数について，整級数の項別微分と同様に次が成り立つ．

命題 3.7. $A \in M_n(\mathbb{C})$ とする．このとき，n 次正則行列 P に対して次が成り立つ．

(1) $e^{P^{-1}AP} = P^{-1}e^AP$ (2) $\dfrac{d}{dt}\,e^{tA} = Ae^{tA}$

証明. (1) $(P^{-1}AP)^k = P^{-1}A^kP$ だから

$$e^{P^{-1}AP} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(P^{-1}AP)^k}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{P^{-1}A^kP}{k!} = P^{-1}\left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!}\right)P = P^{-1}e^AP$$

(2) 項別微分可能なので

$$\frac{d}{dt}\,e^{tA} = \frac{d}{dt}\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(tA)^k}{k!} = \frac{d}{dt}\sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!}\,t^k = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{A^k}{(k-1)!}\,t^{k-1} = A\sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!}\,t^k = Ae^{tA}$$

□

行列の指数関数が簡単に求められる行列として，対角行列がある．

例題 3.8. 対角行列 $D = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$ に対して，行列の指数関数 e^D を求めよ．

（解答）　自然数 k に対して

$$D^k = \begin{pmatrix} a^k & 0 \\ 0 & b^k \end{pmatrix}$$

なので

$$e^D = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{D^k}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \begin{pmatrix} a^k & 0 \\ 0 & b^k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{a^k}{k!} & 0 \\ 0 & \displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{b^k}{k!} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^a & 0 \\ 0 & e^b \end{pmatrix}$$

（解答終）

これらの結果を用いれば，例題 3.5 については

$$P = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \qquad D = P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 7 & 0 \\ 0 & -5 \end{pmatrix}$$

まで求めれば，tD も対角行列であるから

$$e^{tA} = Pe^{tD}P^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{7t} & 0 \\ 0 & e^{-5t} \end{pmatrix} P^{-1} = \begin{pmatrix} 2e^{7t} & -e^{-5t} \\ e^{7t} & e^{-5t} \end{pmatrix} P^{-1}$$

となるので，解は

$$\boldsymbol{x}(t) = e^{tA} \begin{pmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2e^{7t} & -e^{-5t} \\ e^{7t} & e^{-5t} \end{pmatrix} P^{-1} \begin{pmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{pmatrix}$$

となる．そこで，$P^{-1} \begin{pmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix}$ とおけば

$$\boldsymbol{x}(t) = \begin{pmatrix} 2e^{7t} & -e^{-5t} \\ e^{7t} & e^{-5t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2C_1e^{7t} - C_2e^{-5t} \\ C_1e^{7t} + C_2e^{-5t} \end{pmatrix}$$

と表せる．ただし，C_1, C_2 は任意の定数である．

3.3 定数係数斉次線形漸化式

d を自然数とする．定数 $c_1, c_2, \dots, c_d \in \mathbb{R}$ を用いて

$$a_{n+d} = c_1 a_{n+d-1} + c_2 a_{n+d-2} + \cdots + c_{d-1} a_{n+1} + c_d a_n \quad \cdots\ (*)$$

の形に表せる漸化式を（d 階の）定数係数斉次線形漸化式という．これは最初の d 項 $a_1, a_2, \dots, a_d$ を与えれば a_{d+1} 以降は漸化式により一意的に定まる．また，実数列全体のなす実ベクトル空間 S の部分集合 W を

$$W = \{\, \boldsymbol{a} = \{a_n\}_{n=1}^{\infty} \in S \mid a_{n+d} = c_1 a_{n+d-1} + c_2 a_{n+d-2} + \cdots + c_{d-1} a_{n+1} + c_d a_n \ (n = 1, 2, 3, \dots) \,\}$$

で定めれば，これは S の d 次元部分空間となる（第 8 章 2.16）．その基底は最初の d 項が $\mathbb{R}^d$ の標準基底となっているもの，つまり W のベクトル $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \dots, \boldsymbol{x}_d$ を次で定めたもの

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{x}_1 &: 1,\ 0,\ 0,\ \dots, 0,\ c_d,\ \dots \\
\boldsymbol{x}_2 &: 0,\ 1,\ 0,\ \dots, 0,\ c_{d-1},\ \dots \\
\boldsymbol{x}_3 &: 0,\ 0,\ 1,\ \dots, 0,\ c_{d-2},\ \dots \\
&\qquad\quad \vdots \\
\boldsymbol{x}_d &: 0,\ 0,\ 0,\ \dots, 1,\ c_1,\ \dots
\end{aligned}$$

である（第 8 章 4.12）．

次に，S の線形変換であるシフト作用素 $\delta \colon S \longrightarrow S$ を定義する．

定義 3.9. （数列のシフト作用素）
写像 $\delta \colon S \longrightarrow S$ を $\boldsymbol{a} = \{a_n\}_{n=1}^{\infty} \in S$ に対して

$$\delta(\boldsymbol{a}) = \boldsymbol{b}, \qquad \boldsymbol{b} = \{b_n\}_{n=1}^{\infty}, \quad b_n = a_{n+1}$$

で定義し，これを**シフト作用素**という．

これを具体的に述べれば

$$\delta(\{2^n\}_{n=1}^{\infty}) = \left\{2^{n+1}\right\}_{n=1}^{\infty}, \qquad \delta(\{2n-1\}_{n=1}^{\infty}) = \{2n+1\}_{n=1}^{\infty}$$

のように

$$\delta \colon (a_1, a_2, a_3, a_4, \dots) \longmapsto (a_2, a_3, a_4, a_5, \dots)$$

と初項を捨てて 1 つ前に詰めた数列を与える写像である．

まず，任意の $\boldsymbol{a} = \{a_n\}_{n=1}^{\infty}, \boldsymbol{b} = \{b_n\}_{n=1}^{\infty} \in S$ と $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ に対して，数列空間の和とスカラー倍の定義より

$$\alpha\boldsymbol{a} + \beta\boldsymbol{b} = \{\alpha a_n + \beta b_n\}_{n=1}^{\infty}$$

であるから

$$\delta(\alpha\boldsymbol{a} + \beta\boldsymbol{b}) = \{\alpha a_{n+1} + \beta b_{n+1}\}_{n=1}^{\infty} = \alpha\,\{a_{n+1}\}_{n=1}^{\infty} + \beta\,\{b_{n+1}\}_{n=1}^{\infty} = \alpha\delta(\boldsymbol{a}) + \beta\delta(\boldsymbol{b})$$

が成り立つ．よって，シフト作用素 δ は S の線形変換である．

また，$\boldsymbol{a} = \{a_n\}_{n=1}^{\infty} \in S$ が定数係数斉次線形漸化式 $(*)$ をみたしているならば，もちろん $\delta(\boldsymbol{a}) = \{a_{n+1}\}_{n=1}^{\infty}$ も漸化式 $(*)$ をみたす．よって，$\boldsymbol{a} \in W$ ならば $\delta(\boldsymbol{a}) \in W$ となるので，シフト作用素 δ は W の線形変換である．

さらに，このシフト作用素 δ の固有ベクトルについて調べてみる．数列 $\boldsymbol{a} = \{a_n\}_{n=1}^{\infty} \in S$ が δ の固有値 λ に対する固有ベクトルならば

$$\delta(\boldsymbol{a}) = \lambda \boldsymbol{a} \quad \Longleftrightarrow \quad \{a_{n+1}\}_{n=1}^{\infty} = \{\lambda a_n\}_{n=1}^{\infty}$$

より，すべての自然数 n に対して

$$a_{n+1} = \lambda a_n$$

が成り立つ．これは公比 λ の等比数列なので，一般項は $a_n = a_1 \lambda^{n-1}$ と簡単に求めることができる．

まずはすべてのプロセスを丁寧に解答してみる．

例題 3.10. 次の漸化式により定まる数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ の一般項を求めよ．

$$a_1 = 1, \quad a_2 = 2, \quad a_3 = 3, \qquad a_{n+3} - 5a_{n+2} + 2a_{n+1} + 8a_n = 0 \quad (n = 1, 2, 3, \ldots)$$

（解答） 実数列全体のなす実ベクトル空間

$$S = \{\, \boldsymbol{a} = \{a_n\}_{n=1}^{\infty} \mid a_n \in \mathbb{R} \quad (n = 1, 2, 3, \ldots) \,\}$$

の 3 次元部分空間 W を

$$W = \{\, \boldsymbol{a} = \{a_n\}_{n=1}^{\infty} \in S \mid a_{n+3} - 5a_{n+2} + 2a_{n+1} + 8a_n = 0 \quad (n = 1, 2, 3, \ldots) \,\}$$

で定義する．このとき，数列 $\boldsymbol{x} = \{x_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\boldsymbol{y} = \{y_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\boldsymbol{z} = \{z_n\}_{n=1}^{\infty} \in W$ を

$$\begin{aligned} \boldsymbol{x} &= \{x_n\}_{n=1}^{\infty} = (1,\ 0,\ 0,\ -8,\ \ldots) \\ \boldsymbol{y} &= \{y_n\}_{n=1}^{\infty} = (0,\ 1,\ 0,\ -2,\ \ldots) \\ \boldsymbol{z} &= \{z_n\}_{n=1}^{\infty} = (0,\ 0,\ 1,\ 5,\ \ldots) \end{aligned}$$

で定めると，$\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}$ は W の基底となる．

そこで，W の線形変換であるシフト作用素 $\delta\colon W \longrightarrow W$ について，W の基底 $[\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}]$ に関する表現行列 A を求める．上で列挙したものから初項を取り除けば

$$\begin{aligned} \delta(\boldsymbol{x}) &= \{x_{n+1}\}_{n=1}^{\infty} = (0,\ 0,\ -8,\ \ldots) = -8\boldsymbol{z} \\ \delta(\boldsymbol{y}) &= \{y_{n+1}\}_{n=1}^{\infty} = (1,\ 0,\ -2,\ \ldots) = \boldsymbol{x} - 2\boldsymbol{z} \\ \delta(\boldsymbol{z}) &= \{z_{n+1}\}_{n=1}^{\infty} = (0,\ 1,\ 5,\ \ldots) = \boldsymbol{y} + 5\boldsymbol{z} \end{aligned}$$

であるから

$$[\delta(\boldsymbol{x}),\, \delta(\boldsymbol{y}),\, \delta(\boldsymbol{z})] = [\boldsymbol{x},\, \boldsymbol{y},\, \boldsymbol{z}] \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -8 & -2 & 5 \end{pmatrix}$$

となるから，求める表現行列は

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -8 & -2 & 5 \end{pmatrix}$$

である．

A の固有方程式は

$$F_A(t) = \begin{vmatrix} t & -1 & 0 \\ 0 & t & -1 \\ 8 & 2 & t-5 \end{vmatrix} = t^3 - 5t^2 + 2t + 8 = (t+1)(t-2)(t-4) = 0$$

より，A の固有値は $\lambda = -1, 2, 4$ である．A の固有値がすべて異なるので対角化可能であるから，シフト作用素 δ の固有ベクトルからなる W の基底が存在する．

一方，固有値 $-1, 2, 4$ に対する δ の固有ベクトルはそれぞれ $\left\{(-1)^{n-1}\right\}_{n=1}^{\infty}, \left\{2^{n-1}\right\}_{n=1}^{\infty}, \left\{4^{n-1}\right\}_{n=1}^{\infty}$ であるから，これらが W の基底である．よって，任意の $\boldsymbol{a} = \{a_n\}_{n=1}^{\infty} \in W$ はある実数 c_1, c_2, c_3 を用いて

$$\boldsymbol{a} = c_1 \left\{(-1)^{n-1}\right\}_{n=1}^{\infty} + c_2 \left\{2^{n-1}\right\}_{n=1}^{\infty} + c_3 \left\{4^{n-1}\right\}_{n=1}^{\infty}$$

と表せる．ゆえに

$$a_n = c_1(-1)^{n-1} + c_2 2^{n-1} + c_3 4^{n-1}$$

が成り立つ．そこで，与えられた条件

$$\begin{cases} a_1 = c_1 + c_2 + c_3 = 1 \\ a_2 = -c_1 + 2c_2 + 4c_3 = 2 \\ a_3 = c_1 + 4c_2 + 16c_3 = 3 \end{cases}$$

をみたす c_1, c_2, c_3 を求めればよいから，この連立 1 次方程式の拡大係数行列を行基本変形して

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 4 & 2 \\ 1 & 4 & 16 & 3 \end{array}\right) \xrightarrow[\text{第 1 列の掃き出し}]{\text{(1,1) 成分による}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 5 & 3 \\ 0 & 3 & 15 & 2 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[\text{第 2 列の掃き出し}]{\text{(2,2) 成分による}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -2/3 & 0 \\ 0 & 3 & 5 & 3 \\ 0 & 0 & 10 & -1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[\text{第 3 行を 1/10 倍}]{\text{第 2 行を 1/3 倍}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -2/3 & 0 \\ 0 & 1 & 5/3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1/10 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[\text{第 3 列の掃き出し}]{\text{(3,3) 成分による}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -1/15 \\ 0 & 1 & 0 & 7/6 \\ 0 & 0 & 1 & -1/10 \end{array}\right)$$

より，求める一般項は

$$a_n = -\frac{1}{15}\,(-1)^{n-1} + \frac{7}{6}\,2^{n-1} - \frac{1}{10}\,4^{n-1}$$

（解答終）

実際には『シフト作用素の表現行列の固有方程式』と『定数係数斉次線形漸化式の係数』が常に一致する事が示せるので，後半から計算を始めればよい．この例題でも 2 つを並べると

$$F_A(t) = t^3 - 5t^2 + 2t + 8, \qquad a_{n+3} - 5a_{n+2} + 2a_{n+1} + 8a_n = 0$$

となっている．よって，このタイプの漸化式はシフト作用素の表現行列の固有値がすべて異なれば，対角化可能なことから固有ベクトル（等比数列）で基底を作ることができるので，ほとんど計算無しに一般項を求められることがわかる．そのため，シフト作用素の表現行列の固有方程式を**特性方程式**と呼んで，最初からそれだけを考える解法が様々な場面で紹介されているし，高校数学でもそうである．実際，漸化式で a_{n+2}, a_{n+1}, a_n をそれぞれ $x^2, x, 1$ とおいた 2 次方程式の解を $x = \alpha, \beta$ として，一般項を求めた経験があるはずである．初項から必要なだけの項数の条件が与えられている場合には，任意定数を決定するところで方程式を解かなければならず，案外それが面倒なことも多い．

また，もし表現行列に重複度 2 以上の固有値があれば，固有ベクトルで基底が作れないため簡単には議論が進まない．そのため，さらに工夫を要することになる．これも高校数学で特性方程式が重解をもてば，解法が変わったことを思い出すとよい．

3.4　定数係数斉次線形常微分方程式

n を自然数とする．定数 $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ を用いて，関数 $x = x(t)$ に対して

$$a_n x^{(n)} + a_{n-1} x^{(n-1)} + \cdots + a_1 x' + a_0 x = 0 \quad \cdots\ (*)$$

の形に表せる微分方程式を（n 階の）定数係数斉次線形常微分方程式という．これは n 個の条件

$$x(0),\ x'(0),\ x''(0),\ \ldots,\ x^{(n-1)}(0)$$

を与えれば，微分方程式の解 $x = x(t)$ が一意的に定まることが知られている．

また，$\mathbb{R}$ 上の C^∞ 級関数全体のなす集合 $C^\infty(\mathbb{R})$ の部分集合 W を

$$W = \{\, x = x(t) \in C^\infty(\mathbb{R}) \mid a_n x^{(n)} + a_{n-1} x^{(n-1)} + \cdots + a_1 x' + a_0 x = 0 \,\}$$

で定めれば，これは $C^\infty(\mathbb{R})$ の n 次元部分空間となる（第 8 章例題 2.17）．その基底は上記の条件が $\mathbb{R}^n$ の標準基底となっているもの，つまり W のベクトル $x_1, x_2, \ldots, x_n$ で次の条件

$$\begin{array}{lllll}
x_1(0) = 1 & x_1'(0) = 0 & x_1''(0) = 0 & \cdots & x_1^{(n-1)}(0) = 0 \\
x_2(0) = 0 & x_2'(0) = 1 & x_2''(0) = 0 & \cdots & x_2^{(n-1)}(0) = 0 \\
x_3(0) = 0 & x_3'(0) = 0 & x_3''(0) = 1 & \cdots & x_3^{(n-1)}(0) = 0 \\
 & & \vdots & & \\
x_n(0) = 0 & x_n'(0) = 0 & x_n''(0) = 0 & \cdots & x_n^{(n-1)}(0) = 1
\end{array}$$

をみたすものである（第 8 章例題 4.13）．

また，$C^\infty(\mathbb{R})$ の線形変換である微分作用素

$$\frac{d}{dt} \colon C^\infty(\mathbb{R}) \longrightarrow C^\infty(\mathbb{R})$$

について考えると，$x \in C^\infty(\mathbb{R})$ がある定数係数斉次線形常微分方程式 $(*)$ をみたしているならば，方程式 $(*)$ の両辺を微分することにより，x' も同じ微分方程式をみたすことがわかる．つまり

$$\frac{d}{dt} \colon W \longrightarrow W$$

も線形変換である．

さらに，この微分作用素 $\dfrac{d}{dt}$ の固有ベクトルについて調べてみる．もし，関数 $x \in C^\infty(\mathbb{R})$ が $\dfrac{d}{dt}$ の固有値 λ に対する固有ベクトルならば

$$\frac{d}{dt}\, x(t) = \lambda x(t)$$

をみたすことになるが，このような関数 $x(t)$ は

$$x(t) = Ce^{\lambda t}$$

と任意定数 C を用いて指数関数で表せる．さらに，その指数には対応する固有値 λ が現れている．固有ベクトルの形が簡単にわかることから，次に説明する例題の手順で定数係数斉次線形常微分方程式 $(*)$ の解が求められることがある．

まずはすべてのプロセスを丁寧に解答してみる．

例題 3.11. 次の微分方程式の解 $x = x(t)$ を求めよ．

$$x''' - 2x'' - 5x' + 6x = 0, \qquad x(0) = 1,\ \ x'(0) = 2,\ \ x''(0) = 3$$

（解答） $C^\infty(\mathbb{R})$ の 3 次元部分空間 W を

$$W = \{\, x \in C^\infty(\mathbb{R}) \mid x''' - 2x'' - 5x' + 6x = 0 \,\}$$

で定義する．このとき，関数 $x_1, x_2, x_3 \in W$ を

$$\begin{array}{lll} x_1(0) = 1 & x_1'(0) = 0 & x_1''(0) = 0 \\ x_2(0) = 0 & x_2'(0) = 1 & x_2''(0) = 0 \\ x_3(0) = 0 & x_3'(0) = 0 & x_3''(0) = 1 \end{array}$$

をみたすもので定めると，x_1, x_2, x_3 は W の基底となる．

そこで，W の線形変換である微分作用素 $\dfrac{d}{dt}\colon W \longrightarrow W$ について，W の基底 $[x_1, x_2, x_3]$ に関する表現行列 A を求める．微分方程式より

$$\begin{aligned} x_1'''(0) &= 2x_1''(0) + 5x_1'(0) - 6x_1(0) = -6 \\ x_2'''(0) &= 2x_2''(0) + 5x_2'(0) - 6x_2(0) = 5 \\ x_3'''(0) &= 2x_3''(0) + 5x_3'(0) - 6x_3(0) = 2 \end{aligned}$$

であるから

$$y_j = x_j' \qquad (j = 1, 2, 3)$$

とおけば，線形常微分方程式の解の一意性より

$$\begin{array}{llllll} y_1(0) = 0 & y_1'(0) = 0 & y_1''(0) = -6 & \Longrightarrow & y_1 = -6x_3 \\ y_2(0) = 1 & y_2'(0) = 0 & y_2''(0) = 5 & \Longrightarrow & y_2 = x_1 + 5x_3 \\ y_3(0) = 0 & y_3'(0) = 1 & y_3''(0) = 2 & \Longrightarrow & y_3 = x_2 + 2x_3 \end{array}$$

が成り立つ．よって

$$\left[\frac{dx_1}{dt},\, \frac{dx_2}{dt},\, \frac{dx_3}{dt}\right] = [y_1,\, y_2,\, y_3] = [x_1,\, x_2,\, x_3] \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -6 & 5 & 2 \end{pmatrix}$$

となるから，求める表現行列は

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -6 & 5 & 2 \end{pmatrix}$$

である．

A の固有方程式は

$$F_A(t) = \begin{vmatrix} t & -1 & 0 \\ 0 & t & -1 \\ 6 & -5 & t-2 \end{vmatrix} = t^3 - 2t^2 - 5t + 6 = (t-1)(t+2)(t-3) = 0$$

より，A の固有値は $\lambda = 1, -2, 3$ である．ゆえに，固有値がすべて異なるので A は対角化可能であるから，微分作用素 $\dfrac{d}{dt}$ の固有ベクトルからなる W の基底が存在する．

一方，固有値 $1, -2, 3$ に対する $\dfrac{d}{dt}$ の固有ベクトルはそれぞれ e^t, e^{-2t}, e^{3t} であるから，これらが W の基底である．よって，任意の $x \in W$ はある実数 C_1, C_2, C_3 を用いて

$$x(t) = C_1 e^t + C_2 e^{-2t} + C_3 e^{3t}$$

と表せる．よって，与えられた条件

$$\begin{cases} x(0) = C_1 + C_2 + C_3 = 1 \\ x'(0) = C_1 - 2C_2 + 3C_3 = 2 \\ x''(0) = C_1 + 4C_2 + 9C_3 = 3 \end{cases}$$

をみたす定数 C_1, C_2, C_3 を求めればよいから，この連立 1 次方程式の拡大係数行列を行基本変形して

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 3 & 2 \\ 1 & 4 & 9 & 3 \end{array}\right) \xrightarrow[\text{第 1 列の掃き出し}]{\text{(1,1) 成分による}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 8 & 2 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[\text{第 2 列の掃き出し}]{\text{(2,2) 成分による}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 5/3 & 4/3 \\ 0 & -3 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 10 & 3 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[\text{第 3 行を 1/10 倍}]{\text{第 2 行を } (-1/3) \text{ 倍}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 5/3 & 4/3 \\ 0 & 1 & -2/3 & -1/3 \\ 0 & 0 & 1 & 3/10 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[\text{第 3 列の掃き出し}]{\text{(3,3) 成分による}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 5/6 \\ 0 & 1 & 0 & -2/15 \\ 0 & 0 & 1 & 3/10 \end{array}\right)$$

より，求める解は

$$x(t) = \frac{5}{6}\, e^t - \frac{2}{15}\, e^{-2t} + \frac{3}{10}\, e^{3t}$$

である．

（解答終）

実際には『微分作用素 $\dfrac{d}{dt}$ の表現行列の固有方程式』と『定数係数斉次線形微分方程式の係数』が常に一致する事が示せるので，後半から計算を始めればよい．この例題でも 2 つを並べると

$$F_A(t) = t^3 - 2t^2 - 5t + 6 = 0, \qquad\qquad x''' - 2x'' - 5x' + 6x = 0$$

となっている．よって，このタイプの微分方程式は固有値がすべて異なれば，対角化可能なことから固有ベクトル（指数関数）で基底を作ることができるので，ほとんど計算なしに一般解を求められることがわかる．そのため，微分作用素の表現行列の固有方程式を**特性方程式**と呼んで，最初からそれだけを考える解法が様々な場面で紹介されている．大学物理では力学ですぐに必要となるため，最初に公式として紹介されるかもしれない．初期条件が与えられている場合には，任意定数を決定するところで方程式を解かなければならず，案外それが面倒なことも多い．

また，もし表現行列に重複度 2 以上の固有値があれば（つまり特性方程式が重解をもてば），このようには議論が進まない．そのため，さらに工夫を要することになる．

練習問題 3.1. ある業界では A 社，B 社，C 社がサービスを提供している．毎年次のように利用者が契約を変更するとき，長期間後に各社の契約者数の比率はどうなっていくか調べよ．ただし，簡単のために全契約者数は毎年一定とし，新規契約や契約解除は考えないこととする．

(1)
- A 社から，A 社で継続が 70 %，B 社へ変更が 20 %，C 社へ変更が 10 %
- B 社から，A 社へ変更が 10 %，B 社で継続が 80 %，C 社へ変更が 10 %
- C 社から，A 社へ変更が 15 %，B 社へ変更が 10 %，C 社で継続が 75 %

(2)
- A 社から，A 社で継続が 80 %，B 社へ変更が 10 %，C 社へ変更が 10 %
- B 社から，A 社へ変更が 20 %，B 社で継続が 65 %，C 社へ変更が 15 %
- C 社から，A 社へ変更が 20 %，B 社へ変更が 10 %，C 社で継続が 70 %

練習問題 3.2. 次の連立微分方程式の解 $x_1 = x_1(t),\ x_2 = x_2(t)$ を求めよ．

(1) $\begin{cases} x_1' = 3x_1 + 6x_2 \\ x_2' = 5x_1 + 4x_2 \end{cases}$ (2) $\begin{cases} x_1' = 4x_1 - 3x_2 \\ x_2' = 6x_1 - 5x_2 \end{cases}$

練習問題 3.3. 次の漸化式により定まる数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ の一般項を求めよ．

$$a_1 = 1,\quad a_2 = 5,\quad a_3 = -5, \qquad a_{n+3} - 4a_{n+2} + a_{n+1} + 6a_n = 0 \quad (n = 1, 2, 3, \ldots)$$

練習問題 3.4. 次の微分方程式の解 $x = x(t)$ を求めよ．

$$x'' - 5x' + 6x = 0, \qquad x(0) = 2,\quad x'(0) = 1$$

第11章　ベクトル空間と内積

高校数学 B のベクトルの単元において，ベクトルの内積は重要な役割を果たしていた．内積を利用することで様々なベクトルの長さやなす角を計算したり，ベクトルの直交を示したりすることができたことは記憶にあると思う．そこで，一般のベクトル空間にも内積の概念を導入し，長さの計算や “ベクトルの直交” などの概念を導入してこれまで多くの問題が扱えるようにする．

ただし，内積については複素ベクトル空間の場合に計算や議論がやや複雑になる．また，実ベクトルの場合をまずは理解したい学生もいることを考えて，最初に実ベクトル空間の場合を説明し，後から複素ベクトル空間の場合を繰り返して説明することにする．

1　実計量ベクトル空間

1.1　実ベクトル空間の内積

まずは高校数学の内容を思い出すことにする．平面ベクトル

$$\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$$

の内積は

$$(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = a_1 b_1 + a_2 b_2$$

で，長さは

$$\|\boldsymbol{a}\| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}$$

で定義されていた．ここで，高校数学 B では内積を $\vec{a} \cdot \vec{b}$ で，長さを $|\vec{a}|$ のように表していたが，これからはかっこや 2 重縦線を使って上のように表す（第 1 章も参照せよ）．

また，平面ベクトルの長さや内積については次の関係が成り立つことは，実際に問題を解くときに用いてきた（後での対比のため，高校数学における記号で書く）．

- $(\vec{a} + \vec{b}) \cdot \vec{c} = \vec{a} \cdot \vec{c} + \vec{b} \cdot \vec{c}, \qquad \vec{a} \cdot (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{c}$
- $(k\vec{a}) \cdot \vec{b} = k\, \vec{a} \cdot \vec{b}, \qquad \vec{a} \cdot (k\vec{b}) = k\, \vec{a} \cdot \vec{b}$
- $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$
- $\vec{a} \cdot \vec{a} = |\vec{a}|^2 \geqq 0$ であり，等号成立は $\vec{a} = \vec{0}$ のときに限る．

これを出発点として，数ベクトル空間とは限らない一般のベクトル空間 V へ内積を導入する．

定義 1.1. （実ベクトル空間の内積）

V を実ベクトル空間とする．V の任意のベクトル $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \in V$ に対して実数 $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$ を与える対応 $(\cdot, \cdot)$ が，任意のベクトル $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c} \in V$ とスカラー $\alpha \in \mathbb{R}$ に対して

(I-1) $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}) = (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{c}) + (\boldsymbol{b}, \boldsymbol{c})$

(I-2) $(\alpha\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = \alpha(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$

(I-3) $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = (\boldsymbol{b}, \boldsymbol{a})$

(I-4) $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{a}) \geqq 0$ であり，$(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{a}) = 0$ となるのは $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{0}$ のときに限る．

をみたすとき，$(\cdot, \cdot)$ を V の**内積**という．

内積が定まっている実ベクトル空間を**実計量ベクトル空間**または $\mathbb{R}$ 上の計量ベクトル空間という．

注意 1.2. 性質 (I-1) と (I-2) から，ベクトル $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c} \in V$ とスカラー $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ に対して

$$(\alpha\boldsymbol{a} + \beta\boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}) = \alpha(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{c}) + \beta(\boldsymbol{b}, \boldsymbol{c})$$

が成り立つ．また

$$(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}) \overset{(\mathrm{I-3})}{=} (\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}, \boldsymbol{a}) \overset{(\mathrm{I-1})}{=} (\boldsymbol{b}, \boldsymbol{a}) + (\boldsymbol{c}, \boldsymbol{a}) \overset{(\mathrm{I-3})}{=} (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) + (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{c})$$

$$(\boldsymbol{a}, \alpha\boldsymbol{b}) \overset{(\mathrm{I-3})}{=} (\alpha\boldsymbol{b}, \boldsymbol{a}) \overset{(\mathrm{I-1})}{=} \alpha(\boldsymbol{b}, \boldsymbol{a}) \overset{(\mathrm{I-3})}{=} \alpha(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$$

より

$$(\boldsymbol{a}, \alpha\boldsymbol{b} + \beta\boldsymbol{c}) = \alpha(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) + \beta(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{c})$$

も成り立つ．

他に，任意のベクトル $\boldsymbol{v} \in V$ に対して

$$(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{0}) = 0$$

が成り立つ．実際，(I-1) より

$$(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{0}) = (\boldsymbol{v}, \boldsymbol{0}+\boldsymbol{0}) = (\boldsymbol{v}, \boldsymbol{0}) + (\boldsymbol{v}, \boldsymbol{0}) = 2(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{0})$$

より，$(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{0}) = 0$ である．内積の性質 (I-2) を用いて示すことも出来る．

定義 1.1 は高校数学の平面ベクトルや空間ベクトルにおける内積を一般化（抽象化）したものである．これだけでは意味を捉えにくいかもしれないので，次からいくつか代表的な例を説明する．

もし与えられた対応が内積かどうか確認するには，原則的に上の定義の 4 条件を確認する以外にはない．そのため，この 4 条件は必ず書けるようにしておくこと．

必ず理解しておかなければならない内積の例は次のものである．

例題 1.3. （$\mathbb{R}^n$ の標準内積）
実 n 次元数ベクトル空間 $\mathbb{R}^n$ のベクトル

$$\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

に対して

$$(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = {}^t\boldsymbol{a}\boldsymbol{b} = \sum_{j=1}^{n} a_j b_j$$

と定めると，$(\cdot, \cdot)$ は $\mathbb{R}^n$ の内積になることを示せ．これを $\mathbb{R}^n$ の**標準内積**またはユークリッド内積という．

（解答）　内積の公理をすべて確認すればよい．以下では

$$\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{c} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}$$

を $\mathbb{R}^n$ の任意のベクトル，$\alpha \in \mathbb{R}$ を任意のスカラーとする．

(I-1) $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}) = \sum_{j=1}^{n}(a_j + b_j)c_j = \sum_{j=1}^{n} a_j c_j + \sum_{j=1}^{n} b_j c_j = (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{c}) + (\boldsymbol{b}, \boldsymbol{c})$

(I-2) $(\alpha\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = \sum_{j=1}^{n}(\alpha a_j)b_j = \alpha \sum_{j=1}^{n} a_j b_j = \alpha(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$

(I-3) $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = \sum_{j=1}^{n} a_j b_j = \sum_{j=1}^{n} b_j a_j = (\boldsymbol{b}, \boldsymbol{a})$

(I-4) $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{a}) = \sum_{j=1}^{n} a_j^2 \geqq 0$ であり，$(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{a}) = 0$ となるのは

$$\sum_{j=1}^{n} a_j^2 = a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2 = 0$$

より，$a_1 = a_2 = \cdots = a_n = 0$ のとき，つまり $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{0}$ のときに限る．

したがって，$(\cdot, \cdot)$ は $\mathbb{R}^n$ の内積となる．

（解答終）

以下では（基本的には断るようにするが）特に断りがなければ，実 n 次元数ベクトル空間 $\mathbb{R}^n$ の内積は標準内積とする．ただし，$\mathbb{R}^n$ に他の内積を導入することもできるので注意すること．

例題 1.4. $a < b$ とし，$I = [a, b]$ を有界閉区間，$C(I)$ で I で定義された実数値連続関数全体のなす実ベクトル空間を表すことにする．このとき，$f, g \in C(I)$ に対して

$$(f, g) = \int_a^b f(x)g(x)\, dx$$

と定めると，これは $C(I)$ の内積になることを示せ．

（解答） 有界閉区間上で連続な関数が積分可能であることは微分積分学で学習済みである．あとは内積の公理を確認すればよい．以下では $f, g, h \in C(I)$ を任意のベクトル，$\alpha \in \mathbb{R}$ を任意のスカラーとする．

(I-1) $(f + g, h) = \int_a^b \{f(x) + g(x)\}h(x)\, dx = \int_a^b f(x)h(x)\, dx + \int_a^b g(x)h(x)\, dx = (f, h) + (g, h)$

(I-2) $(\alpha f, g) = \int_a^b \alpha f(x)g(x)\, dx = \alpha \int_a^b f(x)g(x)\, dx = \alpha(f, g)$

(I-3) $(f, g) = \int_a^b f(x)g(x)\, dx = \int_a^b g(x)f(x)\, dx = (g, f)$

(I-4) $(f, f) = \int_a^b \{f(x)\}^2\, dx \geqq 0$ であり，$(f, f) = \int_a^b \{f(x)\}^2\, dx = 0$ となるのは，すべての $x \in I$ に対して $\{f(x)\}^2 = 0$，つまり $f = 0$ のときに限る．

したがって，$(\cdot, \cdot)$ は $C(I)$ の内積となる．

（解答終）

関数 $p \in C(I)$ が $p(x) > 0$ をみたすならば

$$(f, g) = \int_a^b p(x)f(x)g(x)\, dx$$

と定義すれば，これも $C(I)$ の内積となる．例題 1.4 と同様に示せるので，各自確かめよ．

例 1.5. $P_2(\mathbb{R})$ における内積を

$$(f, g) = \int_0^1 f(x)g(x)\, dx$$

で定義すれば

$$(x + 1, x^2) = \int_0^1 (x + 1)x^2\, dx = \int_0^1 (x^3 + x^2)\, dx = \left[\frac{x^4}{4} + \frac{x^3}{3}\right]_0^1 = \frac{7}{12}$$

例 1.6. $P_2(\mathbb{R})$ における内積を

$$(f, g) = \int_{-1}^1 f(x)g(x)\, dx$$

で定義すれば

$$(x + 1, x^2) = \int_{-1}^1 (x + 1)x^2\, dx = \int_{-1}^1 (x^3 + x^2)\, dx = 2\int_0^1 x^2\, dx = 2\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^1 = \frac{2}{3}$$

このように同じベクトル空間でも内積を変えれば具体的な計算結果は異なるので注意すること．

例題 1.7.　実ベクトル空間 $\mathbb{R}^4$ に標準内積を考える．次の内積の値を計算せよ．

$$\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 7 \\ 5 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{c} = \begin{pmatrix} 9 \\ 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{d} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

(1) $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$　(2) $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{c})$　(3) $(3\boldsymbol{a}, 2\boldsymbol{b} - 5\boldsymbol{c})$　(4) $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{a})$　(5) $(\boldsymbol{b}, \boldsymbol{d})$

（解答）　最初なので丁寧に解答するが，実際にはある程度は暗算でもよい．

(1) $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = 2 \cdot (-3) + (-1) \cdot 0 + 7 \cdot 1 + 5 \cdot 4 = -6 + 0 + 7 + 20 = 21$

(2) $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{c}) = 2 \cdot 9 + (-1) \cdot 3 + 7 \cdot 2 + 5 \cdot 1 = 18 - 3 + 14 + 5 = 34$

(3)　直接計算しても簡単に求められるが，(1) と (2) の計算を利用するならば

$$(3\boldsymbol{a}, 2\boldsymbol{b} - 5\boldsymbol{c}) = 6(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) - 15(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{c}) = 6 \cdot 21 - 15 \cdot 34 = 126 - 510 = -384$$

(4) $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{a}) = 2^2 + (-1)^2 + 7^2 + 5^2 = 4 + 1 + 49 + 25 = 79$

(5) $(\boldsymbol{b}, \boldsymbol{d}) = -3 \cdot 2 + 0 \cdot (-3) + 1 \cdot 2 + 4 \cdot 1 = -6 + 0 + 2 + 4 = 0$

（解答終）

例題 1.8.　実ベクトル空間 $P_2(\mathbb{R})$ における内積を

$$(f, g) = \int_{-1}^{1} f(x)g(x)\,dx$$

で定める．次の内積の値を計算せよ．

(1) $(x + 1, x^2)$　(2) $(1, x)$

(3) $(x^2 + x, 2x + 3)$　(4) $(x^2 + x + 1, x^2 + x + 1)$

（解答）

(1) $(x + 1, x^2) = \displaystyle\int_{-1}^{1} (x + 1)x^2\,dx = \int_{-1}^{1} (x^3 + x^2)\,dx = 2\int_{0}^{1} x^2\,dx = 2\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^1 = \frac{2}{3}$

(2) $(1, x) = \displaystyle\int_{-1}^{1} 1 \cdot x\,dx = \int_{-1}^{1} x\,dx = 0$

(3) $(x^2 + x, 2x + 3) = \displaystyle\int_{-1}^{1} (x^2 + x)(2x + 3)\,dx = \int_{-1}^{1} (2x^3 + 5x^2 + 3x)\,dx = 10\int_{0}^{1} x^2\,dx = 10\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^1 = \frac{10}{3}$

(4)

$$\begin{aligned}(x^2 + x + 1, x^2 + x + 1) &= \int_{-1}^{1} (x^2 + x + 1)^2\,dx = \int_{-1}^{1} (x^4 + 2x^3 + 3x^2 + 2x + 1)\,dx \\ &= 2\int_{0}^{1} (x^4 + 3x^2 + 1)\,dx = 2\left[\frac{x^5}{5} + x^3 + x\right]_0^1 = \frac{22}{5}\end{aligned}$$

（解答終）

例題 1.9. 実ベクトル空間 $\mathbb{R}^2$ のベクトル $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$，$\boldsymbol{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$ に対して，$(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ を次で定めるときに $\mathbb{R}^2$ の内積となっているかを判定せよ．

(1) $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = x_1^2 + x_1y_1 + x_2y_2$

(2) $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = 2x_1y_1 + 3x_2y_2$

(3) $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = x_1y_1$

(4) $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = x_1y_1 + 2x_1y_2 + 2x_2y_1 + 5x_2y_2$

（解答） 反例の選び方や議論の流れは何通りもありうる．

(1) ベクトルを $\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ とおけば

$$(2\boldsymbol{a}, \boldsymbol{0}) = \left(\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right) = 2^2 + 0 + 0 = 4, \qquad 2(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{0}) = 2\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right) = 2(1^2 + 0 + 0) = 2$$

となるから，$(2\boldsymbol{a}, \boldsymbol{0}) \neq 2(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{0})$ である．よって，$(\cdot, \cdot)$ は内積ではない．

(2) 任意のベクトル $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c} \in \mathbb{R}^2$ とスカラー $\alpha \in \mathbb{R}$ に対して

(I-1) $(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}) = 2(a_1 + b_1)c_1 + 3(a_2 + b_2)c_2 = (2a_1c_1 + 3a_2c_2) + (2b_1c_1 + 3b_2c_2) = (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{c}) + (\boldsymbol{b}, \boldsymbol{c})$

(I-2) $(\alpha\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = 2(\alpha a_1)b_1 + 3(\alpha a_2)b_2 = \alpha(2a_1b_1 + 3a_2b_2) = \alpha(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$

(I-3) $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = 2a_1b_1 + 3a_2b_2 = 2b_1a_1 + 3b_2a_2 = (\boldsymbol{b}, \boldsymbol{a})$

(I-4) $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{a}) = 2a_1^2 + 3a_2^2 \geqq 0$ であり，$(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{a}) = 0$ となるのは

$$2a_1^2 + 3a_2^2 = 0$$

より，$a_1 = a_2 = 0$ のとき，つまり $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{0}$ のときに限る．

したがって，$(\cdot, \cdot)$ は $\mathbb{R}^2$ の内積となる．

(3) ベクトルを $\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ とおけば

$$(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{a}) = \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right) = 0^2 = 0$$

となるから，$\boldsymbol{a} \neq \boldsymbol{0}$ かつ $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{a}) = 0$ となる．よって，$(\cdot, \cdot)$ は内積ではない．

(4) (I-1) と (I-2) が成り立つことは (2) と同様にしてわかる．(I-3) については

$$\begin{aligned} (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) &= a_1b_1 + 2a_1b_2 + 2a_2b_1 + 5a_2b_2 \\ &= b_1a_1 + 2b_1a_2 + 2b_2a_1 + 5b_2a_2 = (\boldsymbol{b}, \boldsymbol{a}) \end{aligned}$$

である．また，(I-4) については

$$(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{a}) = a_1^2 + 2a_1a_2 + 2a_2a_1 + 5a_2^2 = a_1^2 + 4a_1a_2 + 5a_2^2 = (a_1 + 2a_2)^2 + a_2^2 \geqq 0$$

であり，$(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{a}) = 0$ となるのは上で等号が成り立つときで

$$a_1 + 2a_2 = 0, \qquad a_2 = 0$$

より，$a_1 = a_2 = 0$ のとき，つまり $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{0}$ のときに限る．

したがって，$(\cdot, \cdot)$ は $\mathbb{R}^2$ の内積となる．

（解答終）

例題 1.10. 実数を成分にもつ n 次正方行列全体のなす実ベクトル空間 $M_n(\mathbb{R})$ のベクトル A, B に対して

$$(A, B) = \mathrm{tr}({}^t\!AB)$$

と定めると，これは $M_n(\mathbb{R})$ の内積になることを示せ．

（解答） $A, B, C \in M_n(\mathbb{R})$ を任意のベクトル，$\alpha \in \mathbb{R}$ を任意のスカラーとする．

(I-1) 転置行列の性質より

$${}^t(A+B)C = ({}^t\!A + {}^t\!B)C = {}^t\!AC + {}^t\!BC$$

であるから

$$(A+B, C) = \mathrm{tr}({}^t(A+B)C) = \mathrm{tr}({}^t\!AC + {}^t\!BC) = \mathrm{tr}({}^t\!AC) + \mathrm{tr}({}^t\!BC) = (A, C) + (B, C)$$

(I-2) 転置行列の性質より ${}^t(\alpha A) = \alpha {}^t\!A$ であるから

$$(\alpha A, B) = \mathrm{tr}({}^t(\alpha A)B) = \mathrm{tr}(\alpha {}^t\!AB) = \alpha\ \mathrm{tr}({}^t\!AB) = \alpha(A, B)$$

(I-3) トレースの性質 $\mathrm{tr}({}^t\!X) = \mathrm{tr}\, X$ と転置行列の性質 ${}^t(XY) = {}^t Y {}^t X$ および ${}^t({}^t X) = X$ より

$$(A, B) = \mathrm{tr}({}^t\!AB) = \mathrm{tr}({}^t({}^t\!AB)) = \mathrm{tr}({}^t\!BA) = (B, A)$$

(I-4) $A = (a_{ij})_{ij}$ とおくと，${}^t\!AA$ の (i, i) 成分 b_{ii} は

$$b_{ii} = \sum_{k=1}^{n} a_{ki}a_{ki} = \sum_{k=1}^{n} a_{ki}^2$$

であるから

$$(A, A) = \mathrm{tr}({}^t\!AA) = \sum_{i=1}^{n} b_{ii} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} a_{ki}^2 \geqq 0$$

であり，$(A, A) = 0$ となるのは，すべての i, k に対して $a_{ki}^2 = 0$，つまり $A = O$ のときに限る．

したがって，$(\cdot, \cdot)$ は $M_n(\mathbb{R})$ の内積となる．

（解答終）

例題 1.10 の内積は複雑に見えるかもしれない．そこで，$M_2(\mathbb{R})$ の場合に具体的に書き下してみる．普通と違う文字のおき方だが $A = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{pmatrix}$，$B = \begin{pmatrix} b_1 & b_2 \\ b_3 & b_4 \end{pmatrix}$ とおいて計算してみると

$${}^t\!AB = \begin{pmatrix} a_1 & a_3 \\ a_2 & a_4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b_1 & b_2 \\ b_3 & b_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1b_1 + a_3b_3 & a_1b_2 + a_3b_4 \\ a_2b_1 + a_4b_3 & a_2b_2 + a_4b_4 \end{pmatrix}$$

なので

$$(A, B) = \mathrm{tr}({}^t\!AB) = (a_1b_1 + a_3b_3) + (a_2b_2 + a_4b_4) = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3 + a_4b_4$$

が得られる．つまり，(A, B) は行列の成分をすべて縦に並べて 4 次元数ベクトルを作った際の標準内積と一致する．この意味で例題 1.10 の内積は行列に対して自然なものと考えられる．

1.2 ベクトルの直交性

一般の実計量ベクトル空間 V において，内積を利用してベクトルの直交性の概念を定義することができる．

定義 1.11. （ベクトルの直交性）
V を実計量ベクトル空間とし，$(\cdot,\cdot)$ を V の内積とする．このとき，$\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\in V$ に対して

$$(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})=0$$

となるとき，$\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ は直交するといい，$\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$ で表す．

直交性の定義から，V の零ベクトル $\mathbf{0}$ は任意のベクトル $\boldsymbol{a}\in V$ と直交することがわかる．行列や多項式，関数の“直交性”という概念は最初は慣れないかもしれないが，幾何学的なイメージとは無関係に定義は上の通りである．ただし，$\mathbb{R}^2$ のときと同様の性質は成り立つので，それほど計算上で違和感を覚えることはないはずである．

例題 1.12. 実ベクトル空間 $\mathbb{R}^4$ に標準内積を与える．また

$$\boldsymbol{u}=\begin{pmatrix}1\\2\\3\\4\end{pmatrix},\qquad \boldsymbol{v}=\begin{pmatrix}3\\-4\\3\\-1\end{pmatrix}$$

とおく．

(1) $\boldsymbol{u}$ と $\boldsymbol{v}$ は直交することを示せ．

(2) $\boldsymbol{u}$ と直交する $\mathbb{R}^4$ のベクトルを求めよ．

（解答）

(1) 標準内積をとれば

$$(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v})=3-8+9-4=0$$

となるので，$\boldsymbol{u}$ と $\boldsymbol{v}$ は直交する．

(2) 求めるベクトルを

$$\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}$$

とおけば

$$(\boldsymbol{u},\boldsymbol{x})=x_1+2x_2+3x_3+4x_4=0$$

となる．よって，$x_2=s,\ x_3=t,\ x_4=w$ とおけば

$$\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix}-2s-3t-4w\\s\\t\\w\end{pmatrix}\qquad (s,t,w\in\mathbb{R})$$

と表せる．

（解答終）

数ベクトルだけではなく関数に対しても直交しているかどうかを考えることが出来る．

例題 1.13. $[-\pi, \pi]$ 上の連続関数全体のなす実ベクトル空間 $C([-\pi, \pi])$ の内積を

$$(f, g) = \int_{-\pi}^{\pi} f(x)g(x)\,dx$$

で定める．次のベクトル

$$f_0(x) = 1, \qquad f_k(x) = \cos kx, \qquad g_k(x) = \sin kx \qquad (k = 1, 2, \ldots, n)$$

は互いに直交することを示せ．

（解答） $\cos kx$ は偶関数，$\sin kx$ は奇関数であるから

$$(f_0, f_k) = \int_{-\pi}^{\pi} 1 \cdot \cos kx\,dx = \int_{-\pi}^{\pi} \cos kx\,dx = \left[\frac{\sin kx}{k}\right]_{-\pi}^{\pi} = 0$$

$$(f_0, g_k) = \int_{-\pi}^{\pi} 1 \cdot \sin kx\,dx = \int_{-\pi}^{\pi} \sin kx\,dx = 0$$

$$(f_k, g_m) = \int_{-\pi}^{\pi} \cos kx \sin mx\,dx = 0$$

である．また，$k \fallingdotseq m$ ならば，積和の公式より

$$\begin{aligned}(f_k, f_m) = \int_{-\pi}^{\pi} \sin kx \sin mx\,dx &= \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\cos(k-m)x - \cos(k+m)x}{2}\,dx \\ &= \left[\frac{\sin(k-m)x}{2(k-m)} - \frac{\sin(k+m)x}{2(k+m)}\right]_{-\pi}^{\pi} = 0\end{aligned}$$

および

$$\begin{aligned}(g_k, g_m) = \int_{-\pi}^{\pi} \cos kx \cos mx\,dx &= \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\cos(k+m)x + \cos(k-m)x}{2}\,dx \\ &= \left[\frac{\sin(k+m)x}{2(k+m)} + \frac{\sin(k-m)x}{2(k-m)}\right]_{-\pi}^{\pi} = 0\end{aligned}$$

が成り立つ．

（解答終）

例題 1.13 の三角関数の組は（この内積について）互いに直交している．この事実は『フーリエ級数』の分野で重要な役割を果たしている．なお，周期 2π の分だけ積分することが重要なので，内積を

$$(f, g) = \int_{0}^{2\pi} f(x)g(x)\,dx$$

としても，互いに直交していることがわかる．

1.3 ベクトルの長さ

一般の実計量ベクトル空間 V においても，内積を利用してベクトルの長さを定義できる．

定義 1.14. （ベクトルの長さ）

V を実計量ベクトル空間とし，$(\cdot,\cdot)$ を V の内積とする．このとき，ベクトル $\boldsymbol{a}\in V$ に対して

$$\|\boldsymbol{a}\| = \sqrt{(\boldsymbol{a},\boldsymbol{a})}$$

を $\boldsymbol{a}$ の**長さ**という．特に，長さが 1 であるベクトルを**単位ベクトル**という．

長さの定義は高校数学の平面ベクトルや空間ベクトルの長さの定義を一般化したものである．そのため，同様の計算が可能である．例えば，内積の定義 (I-2) より

$$\|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}\|^2 = (\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b},\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}) = (\boldsymbol{a},\boldsymbol{a}) + (\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}) + (\boldsymbol{b},\boldsymbol{a}) + (\boldsymbol{b},\boldsymbol{b}) = \|\boldsymbol{a}\|^2 + 2(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}) + \|\boldsymbol{b}\|^2$$

のように普通に展開できる．他には以下の性質も成り立つ．

命題 1.15. （長さの性質）

V を実計量ベクトル空間とし，$(\cdot,\cdot)$ を V の内積，$\|\cdot\|$ をこの内積から定まる長さとする．このとき，任意のベクトル $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\in V$ とスカラー $\alpha\in\mathbb{R}$ に対して，次が成り立つ．

(1) $\|\boldsymbol{a}\| \geqq 0$ であり，$\|\boldsymbol{a}\| = 0$ となるのは $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{0}$ のときに限る．

(2) $\|\alpha\boldsymbol{a}\| = |\alpha|\,\|\boldsymbol{a}\|$

(3) （三平方の定理）$\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$ のとき，$\|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}\|^2 = \|\boldsymbol{a}\|^2 + \|\boldsymbol{b}\|^2$

(4) （中線定理）$\|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}\|^2 + \|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}\|^2 = 2(\|\boldsymbol{a}\|^2 + \|\boldsymbol{b}\|^2)$

証明.

(1) $\|\boldsymbol{a}\| = \sqrt{(\boldsymbol{a},\boldsymbol{a})} \geqq 0$ であり，内積の定義 (I-4) より

$$\|\boldsymbol{a}\| = \sqrt{(\boldsymbol{a},\boldsymbol{a})} = 0 \quad\Longleftrightarrow\quad (\boldsymbol{a},\boldsymbol{a}) = 0 \quad\Longleftrightarrow\quad \boldsymbol{a}=\boldsymbol{0}$$

(2) 内積の定義 (I-2) より

$$\|\alpha\boldsymbol{a}\| = \sqrt{(\alpha\boldsymbol{a},\alpha\boldsymbol{a})} = \sqrt{\alpha^2(\boldsymbol{a},\boldsymbol{a})} = |\alpha|\sqrt{(\boldsymbol{a},\boldsymbol{a})} = |\alpha|\,\|\boldsymbol{a}\|$$

(3) $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$ なので $(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})=0$ であるから

$$\|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}\|^2 = \|\boldsymbol{a}\|^2 + 2(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}) + \|\boldsymbol{b}\|^2 = \|\boldsymbol{a}\|^2 + \|\boldsymbol{b}\|^2$$

(4) 左辺を展開すると

$$\begin{aligned}\|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}\|^2 + \|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}\|^2 &= \left(\|\boldsymbol{a}\|^2 + 2(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}) + \|\boldsymbol{b}\|^2\right) + \left(\|\boldsymbol{a}\|^2 - 2(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}) + \|\boldsymbol{b}\|^2\right)\\ &= 2(\|\boldsymbol{a}\|^2 + \|\boldsymbol{b}\|^2)\end{aligned}$$

□

この命題より “ ベクトルの長さ ” は 0 以上であり，長さが 0 になるのは零ベクトル $\boldsymbol{0}$ のときだけである．また，2 つのベクトルが直交している場合にはその長さの間の関係について三平方の定理が成り立つ．

例題 1.16.　実ベクトル空間 $\mathbb{R}^4$ に標準内積を与える．次のベクトルの長さを求めよ．

(1) $\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix}$　(2) $\begin{pmatrix} -2 \\ 5 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$　(3) $\begin{pmatrix} 6 \\ -3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$

（解答）　与えられたベクトルを $\boldsymbol{v}$ とおく．

(1)　長さの 2 乗は

$$\|\boldsymbol{v}\|^2 = 3^2 + (-1)^2 + 4^2 + (-2)^2 = 9 + 1 + 16 + 4 = 30$$

より，$\|\boldsymbol{v}\| = \sqrt{30}$ である．

(2)　長さの 2 乗は

$$\|\boldsymbol{v}\|^2 = (-2)^2 + 5^2 + 0 + 3^2 = 4 + 25 + 9 = 38$$

より，$\|\boldsymbol{v}\| = \sqrt{38}$ である．

(3)　長さの 2 乗は

$$\|\boldsymbol{v}\|^2 = 6^2 + (-3)^2 + (-1)^2 + 2^2 = 36 + 9 + 1 + 4 = 50$$

より，$\|\boldsymbol{v}\| = \sqrt{50} = 5\sqrt{2}$ である．

（解答終）

例題 1.17.　実ベクトル空間 $P_2(\mathbb{R})$ の内積を

$$(f, g) = \int_{-1}^{1} f(x)g(x)\,dx$$

で定める．次のベクトルの長さを求めよ．

(1) $3x - 4$　(2) $x^2 + 2x + 3$

（解答）　与えられたベクトルを $f(x)$ とおく．

(1)　長さの 2 乗は

$$\begin{aligned} \|f\|^2 = (f, f) = \int_{-1}^{1} (3x-4)^2\,dx &= \int_{-1}^{1} (9x^2 - 24x + 16)\,dx \\ &= 2\int_{0}^{1} (9x^2 + 16)\,dx = 2\Big[3x^3 + 16x\Big]_0^1 = 38 \end{aligned}$$

より，$\|f\| = \sqrt{38}$ である．

(2)　長さの 2 乗は

$$\begin{aligned} \|f\|^2 = (f, f) = \int_{-1}^{1} (x^2+2x+3)^2\,dx &= \int_{-1}^{1} (x^4 + 4x^3 + 10x^2 + 12x + 9)\,dx \\ &= 2\int_{0}^{1} (x^4 + 10x^2 + 9)\,dx = 2\left[\frac{x^5}{5} + \frac{10x^3}{3} + 9x\right]_0^1 = \frac{76}{3} \end{aligned}$$

より，$\|f\| = \sqrt{\dfrac{76}{3}} = \dfrac{2\sqrt{57}}{3}$ である．

（解答終）

次に有名な不等式を 2 つ説明する．複素ベクトル空間に内積を導入したときにも同じ不等式が成り立つが証明が複雑になるので，まずは実計量ベクトル空間の場合の証明を述べる．

命題 1.18. （シュワルツの不等式）
実計量ベクトル空間 V の任意のベクトル $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \in V$ に対して

$$|(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})| \leqq \|\boldsymbol{a}\|\|\boldsymbol{b}\|$$

が成り立つ．

証明. $\boldsymbol{b} = \boldsymbol{0}$ ならば両辺とも 0 で不等式は成り立つ．そこで，以下では $\boldsymbol{b} \fallingdotseq \boldsymbol{0}$ とする．

t を実数とすると

$$\|\boldsymbol{a} + t\boldsymbol{b}\|^2 = \|\boldsymbol{a}\|^2 + 2t(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) + t^2\|\boldsymbol{b}\|^2$$

となる．この左辺は 0 以上であるから，すべての実数 t に対して

$$t^2\|\boldsymbol{b}\|^2 + 2t(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) + \|\boldsymbol{a}\|^2 \geqq 0$$

が成り立つ．ここで，$\|\boldsymbol{b}\| \fallingdotseq 0$ なので，この 2 次不等式が常に成り立つから

$$(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})^2 - \|\boldsymbol{b}\|^2\|\boldsymbol{a}\|^2 \leqq 0$$

となる．これより

$$(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})^2 \leqq \|\boldsymbol{a}\|^2\|\boldsymbol{b}\|^2$$

なので，この両辺のルートをとれば，求める不等式が得られる． □

命題 1.19. （三角不等式）
実計量ベクトル空間 V の任意のベクトル $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \in V$ に対して

$$\|\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}\| \leqq \|\boldsymbol{a}\| + \|\boldsymbol{b}\|$$

が成り立つ．

証明. 両辺とも 0 以上なので，2 乗した不等式を示せばよい．ここで，シュワルツの不等式より

$$(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) \leqq |(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})| \leqq \|\boldsymbol{a}\|\|\boldsymbol{b}\|$$

であるから

$$\begin{aligned}\|\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}\|^2 &= \|\boldsymbol{a}\|^2 + 2(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) + \|\boldsymbol{b}\|^2 \\ &\leqq \|\boldsymbol{a}\|^2 + 2\|\boldsymbol{a}\|\|\boldsymbol{b}\| + \|\boldsymbol{b}\|^2 = (\|\boldsymbol{a}\| + \|\boldsymbol{b}\|)^2\end{aligned}$$

となるので，求める不等式が成り立つ． □

2 複素計量ベクトル空間

2.1 複素ベクトル空間の内積

前節では実ベクトル空間の内積を定義したが，複素ベクトル空間の場合にはやや異なるものとなる．その違いに注意しながら読み進めること．ここでは複素数 $z = a + bi$ の複素共役を $\overline{z} = a - bi$ で表す．よく用いられる複素共役の性質として

$$\overline{z + w} = \overline{z} + \overline{w}, \qquad \overline{zw} = \overline{z}\,\overline{w}, \qquad \overline{(\overline{z})} = z$$

などがある．

定義 2.1. （複素ベクトル空間の内積）

V を複素ベクトル空間とする．V の任意のベクトル $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \in V$ に対して複素数 $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$ を与える対応 $(\cdot, \cdot)$ が，任意のベクトル $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c} \in V$ とスカラー $\alpha \in \mathbb{C}$ に対して

(C-1) $(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}) = (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{c}) + (\boldsymbol{b}, \boldsymbol{c})$

(C-2) $(\alpha \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = \alpha(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$

(C-3) $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = \overline{(\boldsymbol{b}, \boldsymbol{a})}$

(C-4) $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{a}) \geqq 0$ であり，$(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{a}) = 0$ となるのは $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{0}$ のときに限る．

をみたすとき，$(\cdot, \cdot)$ を V の**内積**という．

内積が定まっている複素ベクトル空間を**複素計量ベクトル空間**または $\mathbb{C}$ **上の計量ベクトル空間**という．

注意 2.2. 実計量ベクトル空間との違いは (C-3) であり，内積の順番を入れ替えると複素共役をとらなければならない．実際にはこちらが本来の内積の定義で，実計量ベクトル空間の場合には複素共役をとっても値が変わらないから (I-3) になると思っておいたほうがよい．

また，実計量ベクトル空間と同様に，性質 (C-1) と (C-2) から

$$(\alpha \boldsymbol{a} + \beta \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}) = \alpha(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{c}) + \beta(\boldsymbol{b}, \boldsymbol{c})$$

が成り立つ．一方

$$(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} + \boldsymbol{c}) \overset{\text{(C-3)}}{=} \overline{(\boldsymbol{b} + \boldsymbol{c}, \boldsymbol{a})} \overset{\text{(C-1)}}{=} \overline{(\boldsymbol{b}, \boldsymbol{a})} + \overline{(\boldsymbol{c}, \boldsymbol{a})} \overset{\text{(C-3)}}{=} (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) + (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{c})$$

$$(\boldsymbol{a}, \alpha \boldsymbol{b}) \overset{\text{(C-3)}}{=} \overline{(\alpha \boldsymbol{b}, \boldsymbol{a})} \overset{\text{(C-1)}}{=} \overline{\alpha}\,\overline{(\boldsymbol{b}, \boldsymbol{a})} \overset{\text{(C-3)}}{=} \overline{\alpha}(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$$

より

$$(\boldsymbol{a}, \alpha \boldsymbol{b} + \beta \boldsymbol{c}) = \overline{\alpha}(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) + \overline{\beta}(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{c})$$

が成り立つ．このように右側からスカラーを前に出すときには気をつける必要がある．

注意 2.3. 物理学や量子化学などの分野では，複素ベクトル空間の内積の条件 (C-2) を

$$(\boldsymbol{a}, \alpha \boldsymbol{b}) = \alpha(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$$

とすることも多い．このときには

$$(\alpha \boldsymbol{a} + \beta \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}) = \overline{\alpha}(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{c}) + \overline{\beta}(\boldsymbol{b}, \boldsymbol{c})$$

と，左側の成分から複素共役でスカラーが出てくる．文献によって左右のどちらから複素共役で現れるかが異なるので注意すること．

例題 2.4. （$\mathbb{C}^n$ の標準内積）

複素 n 次元数ベクトル空間 $\mathbb{C}^n$ のベクトル

$$\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

に対して

$$(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = {}^t\boldsymbol{a}\overline{\boldsymbol{b}} = \sum_{j=1}^{n} a_j \overline{b_j}$$

と定めると，これは $\mathbb{C}^n$ の内積になることを示せ．これを $\mathbb{C}^n$ の**標準内積**またはエルミート内積という．

（解答）　内積の公理をすべて確認すればよい．以下では

$$\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{c} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}$$

を $\mathbb{C}^n$ の任意のベクトル，$\alpha \in \mathbb{C}$ を任意のスカラーとする．

(C-1) $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}) = \sum_{j=1}^{n} (a_j + b_j)\overline{c_j} = \sum_{j=1}^{n} a_j \overline{c_j} + \sum_{j=1}^{n} b_j \overline{c_j} = (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{c}) + (\boldsymbol{b}, \boldsymbol{c})$

(C-2) $(\alpha\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = \sum_{j=1}^{n} (\alpha a_j)\overline{b_j} = \alpha \sum_{j=1}^{n} a_j \overline{b_j} = \alpha(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$

(C-3) $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = \sum_{j=1}^{n} a_j \overline{b_j} = \overline{\sum_{j=1}^{n} b_j \overline{a_j}} = \overline{(\boldsymbol{b}, \boldsymbol{a})}$

(C-4) $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{a}) = \sum_{j=1}^{n} a_j \overline{a_j} = \sum_{j=1}^{n} |a_j|^2 \geqq 0$ であり，$(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{a}) = 0$ となるのは

$$\sum_{j=1}^{n} |a_j|^2 = |a_1|^2 + |a_2|^2 + \cdots + |a_n|^2 = 0$$

より，$a_1 = a_2 = \cdots = a_n = 0$ のとき，つまり $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{0}$ のときに限る．

したがって，$(\cdot, \cdot)$ は $\mathbb{C}^n$ の内積となる．

（解答終）

複素ベクトル空間 $\mathbb{C}^n$ においては，実ベクトル空間と同じように

$$(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = {}^t\boldsymbol{a}\boldsymbol{b} = \sum_{j=1}^{n} a_j b_j$$

としてしまうと内積とはならないので注意すること．その理由は上の例題の解答を見ながら考えてみよ．

複素計量ベクトル空間においても，ベクトルの直交性の概念を定義することができる．直交性の定義は実計量ベクトル空間とまったく同じである．

定義 2.5. （ベクトルの直交性）
V を複素計量ベクトル空間とし，$(\cdot,\cdot)$ を V の内積とする．このとき，$\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\in V$ に対して

$$(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})=0$$

となるとき，$\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ は直交するといい，$\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$ で表す.

例題 2.6. 複素ベクトル空間 $\mathbb{C}^2$ に標準内積を与える.

(1) $\boldsymbol{u}=\begin{pmatrix}2-i\\1+3i\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{v}=\begin{pmatrix}3+2i\\4i\end{pmatrix}$ に対して，内積 $(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v})$ の値を計算せよ.

(2) $\boldsymbol{w}=\begin{pmatrix}1\\i\end{pmatrix}$ と直交する $\boldsymbol{0}$ でないベクトルを 1 つ求めよ.

（解答）

(1) 標準内積の定義より

$$\begin{aligned}(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v})&=(2-i)\cdot\overline{(3+2i)}+(1+3i)\cdot\overline{(4i)}\\&=(2-i)\cdot(3-2i)+(1+3i)\cdot(-4i)=(4-7i)+(12-4i)=16-11i\end{aligned}$$

(2) 求めるベクトルを $\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}$ とおけば

$$(\boldsymbol{x},\boldsymbol{w})=a\cdot 1+b\cdot\bar{i}=a-bi=0$$

であるから，これは

$$\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix}it\\t\end{pmatrix}\qquad(t\in\mathbb{C})$$

と表せる．特に $t=1$ とすれば，$\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix}i\\1\end{pmatrix}$ が求めるベクトルである.

（解答終）

2.2 ベクトルの長さ

複素計量ベクトル空間 V においても，内積を利用してベクトルの長さを定義できる．ベクトルの長さについては，展開式に注意すれば実計量ベクトル空間の場合と同様に議論を進めることができる．

定義 2.7. （ベクトルの長さ）
V を複素計量ベクトル空間とし，$(\cdot,\cdot)$ を V の内積とする．このとき，$\boldsymbol{a}\in V$ に対して

$$\|\boldsymbol{a}\| = \sqrt{(\boldsymbol{a},\boldsymbol{a})}$$

を $\boldsymbol{a}$ の**長さ**という．特に，長さが 1 であるベクトルを**単位ベクトル**という．

実計量ベクトル空間との違いは

$$\|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}\|^2 = (\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b},\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}) = (\boldsymbol{a},\boldsymbol{a}) + (\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}) + (\boldsymbol{b},\boldsymbol{a}) + (\boldsymbol{b},\boldsymbol{b}) = \|\boldsymbol{a}\|^2 + (\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}) + \overline{(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})} + \|\boldsymbol{b}\|^2$$

となり，内積の項を 2 倍でまとめられないことである．まとめるならば，複素数 z の実部を $\mathrm{Re}\, z$ とおけば

$$(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}) + \overline{(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})} = 2\,\mathrm{Re}(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})$$

となる．

命題 2.8. （長さの性質）
V を複素計量ベクトル空間とし，$(\cdot,\cdot)$ を V の内積，$\|\cdot\|$ をこの内積から定まる長さとする．このとき，任意のベクトル $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\in V$ とスカラー $\alpha\in\mathbb{C}$ に対して，次が成り立つ．

(1) $\|\boldsymbol{a}\| \geqq 0$ であり，$\|\boldsymbol{a}\| = 0$ となるのは $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{0}$ のときに限る．

(2) $\|\alpha\boldsymbol{a}\| = |\alpha|\,\|\boldsymbol{a}\|$

(3) （三平方の定理）$\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$ のとき，$\|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}\|^2 = \|\boldsymbol{a}\|^2 + \|\boldsymbol{b}\|^2$

(4) （中線定理）$\|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}\|^2 + \|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}\|^2 = 2(\|\boldsymbol{a}\|^2 + \|\boldsymbol{b}\|^2)$

証明.

(1) $\|\boldsymbol{a}\| = \sqrt{(\boldsymbol{a},\boldsymbol{a})} \geqq 0$ であり，内積の定義 (C-4) より

$$\|\boldsymbol{a}\| = \sqrt{(\boldsymbol{a},\boldsymbol{a})} = 0 \iff (\boldsymbol{a},\boldsymbol{a}) = 0 \iff \boldsymbol{a}=\boldsymbol{0}$$

(2) 内積の定義 (C-2) と (C-3) より

$$\|\alpha\boldsymbol{a}\| = \sqrt{(\alpha\boldsymbol{a},\alpha\boldsymbol{a})} = \sqrt{\alpha\overline{\alpha}(\boldsymbol{a},\boldsymbol{a})} = \sqrt{|\alpha|^2(\boldsymbol{a},\boldsymbol{a})} = |\alpha|\sqrt{(\boldsymbol{a},\boldsymbol{a})} = |\alpha|\,\|\boldsymbol{a}\|$$

(3) $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$ なので $(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})=0$ であるから

$$\|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}\|^2 = \|\boldsymbol{a}\|^2 + (\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}) + (\boldsymbol{b},\boldsymbol{a}) + \|\boldsymbol{b}\|^2 = \|\boldsymbol{a}\|^2 + \|\boldsymbol{b}\|^2$$

(4) 左辺を展開すると

$$\begin{aligned}\|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}\|^2 + \|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}\|^2 &= \left(\|\boldsymbol{a}\|^2 + (\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}) + (\boldsymbol{b},\boldsymbol{a}) + \|\boldsymbol{b}\|^2\right) + \left(\|\boldsymbol{a}\|^2 - (\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}) - (\boldsymbol{b},\boldsymbol{a}) + \|\boldsymbol{b}\|^2\right)\\ &= 2(\|\boldsymbol{a}\|^2 + \|\boldsymbol{b}\|^2)\end{aligned}$$

□

例題 2.9. 複素ベクトル空間 $\mathbb{C}^3$ に標準内積を与える．次のベクトルの長さを求めよ．

(1) $\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} 1-i \\ 2i \\ 3 \end{pmatrix}$ (2) $\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} 3-4i \\ 1+2i \\ 5+i \end{pmatrix}$

（解答）

(1) 長さの 2 乗は

$$\|\boldsymbol{v}\|^2 = |1-i|^2 + |2i|^2 + |3|^2 = 2+4+9 = 15$$

より，$\|\boldsymbol{v}\| = \sqrt{15}$ である．

(2) 長さの 2 乗は

$$\|\boldsymbol{v}\|^2 = |3-4i|^2 + |1+2i|^2 + |5+i|^2 = 25+5+26 = 56$$

より，$\|\boldsymbol{v}\| = \sqrt{56} = 2\sqrt{14}$ である．

（解答終）

複素ベクトルの長さは成分の 2 乗和ではないことに注意すること．もしベクトルの長さが虚数になった場合には，その時点で誤りである．

命題 2.10. （シュワルツの不等式）
複素計量ベクトル空間 V の任意のベクトル $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \in V$ に対して

$$|\,(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})\,| \leqq \|\boldsymbol{a}\|\|\boldsymbol{b}\|$$

が成り立つ．

証明. $\boldsymbol{b} = \boldsymbol{0}$ ならば両辺とも 0 で不等式は成り立つ．そこで，以下では $\boldsymbol{b} \fallingdotseq \boldsymbol{0}$ とする．

任意の複素数 $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ に対して

$$\begin{aligned} 0 \leqq \|\alpha\boldsymbol{a} + \beta\boldsymbol{b}\|^2 &= (\alpha\boldsymbol{a} + \beta\boldsymbol{b}, \alpha\boldsymbol{a} + \beta\boldsymbol{b}) \\ &= \alpha\overline{\alpha}(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{a}) + \alpha\overline{\beta}(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) + \beta\overline{\alpha}(\boldsymbol{b}, \boldsymbol{a}) + \beta\overline{\beta}(\boldsymbol{b}, \boldsymbol{b}) \\ &= |\alpha|^2\|\boldsymbol{a}\|^2 + \alpha\overline{\beta}(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) + \overline{\alpha\overline{\beta}(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})} + |\beta|^2\|\boldsymbol{b}\|^2 \\ &= |\alpha|^2\|\boldsymbol{a}\|^2 + 2\,\mathrm{Re}\big(\alpha\overline{\beta}(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})\big) + |\beta|^2\|\boldsymbol{b}\|^2 \end{aligned}$$

が成り立つから，特に $\alpha = \|\boldsymbol{b}\|^2$, $\beta = -(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$ とすると

$$0 \leqq \|\boldsymbol{b}\|^4\|\boldsymbol{a}\|^2 - 2\|\boldsymbol{b}\|^2|(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})|^2 + \|\boldsymbol{b}\|^2|(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})|^2 = \|\boldsymbol{b}\|^2(\|\boldsymbol{a}\|^2\|\boldsymbol{b}\|^2 - |(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})|^2)$$

となる．この両辺を $\|\boldsymbol{b}\|^2 (\fallingdotseq 0)$ で割れば

$$|(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})|^2 \leqq \|\boldsymbol{a}\|^2\|\boldsymbol{b}\|^2$$

なので，この両辺のルートをとれば，求める不等式が得られる． □

命題 2.11. （三角不等式）
複素計量ベクトル空間 V の任意のベクトル $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \in V$ に対して

$$\|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}\| \leqq \|\boldsymbol{a}\| + \|\boldsymbol{b}\|$$

が成り立つ．

証明． 両辺とも 0 以上なので，2 乗した不等式を示せばよい．内積を展開すれば

$$\|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}\|^2 = (\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}, \boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}) = \|\boldsymbol{a}\|^2 + (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) + (\boldsymbol{b}, \boldsymbol{a}) + \|\boldsymbol{b}\|^2$$

である．ここで，複素共役に注意すれば

$$(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) + (\boldsymbol{b}, \boldsymbol{a}) = (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) + \overline{(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})} = 2\,\mathrm{Re}(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) \leqq 2|(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})|$$

であるから，シュワルツの不等式より

$$\begin{aligned}
\|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}\|^2 &= \|\boldsymbol{a}\|^2 + (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) + (\boldsymbol{b}, \boldsymbol{a}) + \|\boldsymbol{b}\|^2 \\
&\leqq \|\boldsymbol{a}\|^2 + 2|(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})| + \|\boldsymbol{b}\|^2 \\
&\leqq \|\boldsymbol{a}\|^2 + 2\|\boldsymbol{a}\|\|\boldsymbol{b}\| + \|\boldsymbol{b}\|^2 = (\|\boldsymbol{a}\| + \|\boldsymbol{b}\|)^2
\end{aligned}$$

となるので，求める不等式が成り立つ． □

複素計量ベクトル空間の場合の証明には，複素数 z に対して

$$|\,\mathrm{Re}\, z| \leqq |z|$$

であることを利用した．これは実数 a, b を用いて $z = a + bi$ と表せば

$$|a| \leqq \sqrt{a^2 + b^2}$$

が成り立つということであり，これは簡単に確かめられる．

3 直交補空間

3.1 直交補空間の定義と性質

ここでは $\mathbb{K}=\mathbb{R}$ または $\mathbb{K}=\mathbb{C}$ とする．実計量ベクトル空間でも複素計量ベクトル空間でも議論は同じなので，とりあえず $\mathbb{K}=\mathbb{R}$ だと思って読んでも差し支えない．

定義 3.1. （直交補空間）
V を $\mathbb{K}$ 上の計量ベクトル空間，W を V の部分空間とする．このとき

$$W^{\perp}=\{\,\boldsymbol{v}\in V \mid 任意の\ \boldsymbol{w}\in W\ に対して\ (\boldsymbol{v},\boldsymbol{w})=0\,\}$$

で定まる V の部分空間 $W^{\perp}$ を W の**直交補空間**という．

言葉で述べれば，W の直交補空間とは W のすべてのベクトルと直交するような V のベクトルをすべて集めた集合である．

例題 3.2. V を $\mathbb{K}$ 上の計量ベクトル空間，W を V の部分空間とする．このとき，W の直交補空間 $W^{\perp}$ は V の部分空間であることを示せ．

（解答） 零ベクトル $\mathbf{0}$ について，任意の $w\in W$ に対して

$$(\mathbf{0},\boldsymbol{w})=0$$

であるから，$\mathbf{0}\in W^{\perp}$ となる．よって，$W^{\perp}\neq\emptyset$ である．

また，任意のベクトル $\boldsymbol{v}_1,\boldsymbol{v}_2\in W^{\perp}$ とスカラー $\alpha,\beta\in\mathbb{K}$ をとる．このとき，任意の $\boldsymbol{w}\in W$ に対して

$$(\alpha\boldsymbol{v}_1+\beta\boldsymbol{v}_2,\boldsymbol{w})=\alpha(\boldsymbol{v}_1,\boldsymbol{w})+\beta(\boldsymbol{v}_2,\boldsymbol{w})=\alpha\cdot 0+\beta\cdot 0=0$$

より，$\alpha\boldsymbol{v}_1+\beta\boldsymbol{v}_2\in W^{\perp}$ となる．よって，$W^{\perp}$ は V の部分空間である．

（解答終）

例 3.3. $V=\mathbb{R}^2$ に標準内積を与える．このとき，$\mathbb{R}^2$ の部分空間

$$W=\left\{\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\;\middle|\; y=3x\right\}$$

に対して，その直交補空間は

$$W^{\perp}=\left\{\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\;\middle|\; y=-\frac{x}{3}\right\}$$

となる．これを計算で確かめ，座標平面上に W と $W^{\perp}$ を描いてみよ．

$V=\mathbb{R}^3$ に標準内積を与える．後の例題で見るように，$\mathbb{R}^3$ の部分空間 W を原点を通る直線 l とすれば，その直交補空間は直線 l に垂直で原点を通る平面となる．逆に，W を原点を通る平面 H とすれば，その直交補空間は平面 H に垂直で原点を通る直線となる．

例題 3.4. （直交補空間の性質）

V を $\mathbb{K}$ 上の計量ベクトル空間，W を V の部分空間とする．このとき，W の直交補空間 $W^{\perp}$ に対して，次が成り立つことを示せ．

(1) $W \cap W^{\perp} = \{\mathbf{0}\}$

(2) W_1, W_2 を V の部分空間とする．このとき，$W_1 \subset W_2$ ならば $W_1^{\perp} \supset W_2^{\perp}$ である．

（解答）

(1) 任意の $\boldsymbol{v} \in W \cap W^{\perp}$ に対して，$\boldsymbol{v} \in W^{\perp}$ より

$$(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}) = 0 \qquad (\boldsymbol{w} \in W)$$

が成り立つ．そこで，特に $\boldsymbol{w} = \boldsymbol{v}$ を代入すれば $(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{v}) = 0$ となるので，$\boldsymbol{v} = \mathbf{0}$ である．よって，$W \cap W^{\perp} \subset \{\mathbf{0}\}$ となる．逆に $W \cap W^{\perp} \supset \{\mathbf{0}\}$ は明らかなので，$W \cap W^{\perp} = \{\mathbf{0}\}$ が成り立つ．

(2) 任意の $v \in W_2^{\perp}$ をとる．このとき，直交補空間の定義より

$$(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}) = 0 \qquad (\boldsymbol{w} \in W_2)$$

が成り立つ．ここで，$W_1 \subset W_2$ なので，当然

$$(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}) = 0 \qquad (\boldsymbol{w} \in W_1)$$

も成り立つ．これは $v \in W_1^{\perp}$ を意味しているから，$W_2^{\perp} \subset W_1^{\perp}$ である．

（解答終）

和空間の直交補空間については，次が成り立つ．

定理 3.5. V を $\mathbb{K}$ 上の計量ベクトル空間とし，W_1, W_2 を V の部分空間とする．このとき

$$(W_1 + W_2)^{\perp} = W_1{}^{\perp} \cap W_2{}^{\perp}$$

が成り立つ．

証明. $W_1 + W_2 \supset W_1$ だから，例題 3.4(2) より

$$(W_1 + W_2)^{\perp} \subset W_1{}^{\perp}$$

となる．同様に $(W_1 + W_2)^{\perp} \subset W_2{}^{\perp}$ であるから，$(W_1 + W_2)^{\perp} \subset W_1{}^{\perp} \cap W_2{}^{\perp}$ が成り立つ．

逆の包含関係を示すために，任意の $\boldsymbol{v} \in W_1{}^{\perp} \cap W_2{}^{\perp}$ をとる．任意の $\boldsymbol{w} \in W_1 + W_2$ は

$$\boldsymbol{w} = \boldsymbol{w}_1 + \boldsymbol{w}_2 \qquad (\boldsymbol{w}_1 \in W_1,\ \boldsymbol{w}_2 \in W_2)$$

と表せるから

$$(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}) = (\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}_1) + (\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}_2) = 0 + 0 = 0$$

となり，$\boldsymbol{v} \in (W_1 + W_2)^{\perp}$ である．よって，$(W_1 + W_2)^{\perp} \supset W_1{}^{\perp} \cap W_2{}^{\perp}$ が成り立つ．

したがって，$(W_1 + W_2)^{\perp} = W_1{}^{\perp} \cap W_2{}^{\perp}$ が成り立つ． □

3.2 直交補空間の計算例

具体的に与えられた部分空間 W に対して，その直交補空間 $W^{\perp}$ を計算するにはどうすればよいだろうか．定義どおりに考えれば W のすべてのベクトルと直交するようなベクトルを求めればよいが，実際に W のすべてのベクトルとの内積を計算するのは面倒である．

そこで，内積の性質に着目すれば，次のように考えればよいことがわかる．

例題 3.6. V を $\mathbb{K}$ 上の計量ベクトル空間，$\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_k \in V$ とし，

$$W = \langle \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \cdots, \boldsymbol{v}_k \rangle$$

を $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_k$ の生成する部分空間とする．このとき，$\boldsymbol{x} \in V$ に対し

$$\boldsymbol{x} \in W^{\perp} \iff (\boldsymbol{v}_j, \boldsymbol{x}) = 0 \quad (j = 1, 2, \ldots, k)$$

が成り立つことを示せ．

（解答）

($\Longrightarrow$) $\boldsymbol{v}_j \in W,\ \boldsymbol{x} \in W^{\perp}$ から直交補空間の定義より成り立つ．

($\Longleftarrow$) $(\boldsymbol{v}_j, \boldsymbol{x}) = 0 \ \ (j = 1, 2, \ldots, k)$ とする．任意の $\boldsymbol{w} \in W$ は

$$\boldsymbol{w} = c_1\boldsymbol{v}_1 + c_2\boldsymbol{v}_2 + \cdots + c_k\boldsymbol{v}_k \qquad (c_j \in \mathbb{K})$$

と表せるから，内積の性質より

$$(\boldsymbol{w}, \boldsymbol{x}) = c_1(\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{x}) + c_2(\boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{x}) + \cdots + c_k(\boldsymbol{v}_k, \boldsymbol{x}) = 0$$

となる．よって，$\boldsymbol{x} \in W^{\perp}$ が成り立つ．

（解答終）

これより，$W^{\perp}$ を求めるには必ずしも W のすべてのベクトルと直交するかを調べる必要はなく，W を生成するベクトルの組と直交するかを調べればよい．特に W の基底がわかっていれば，基底となるベクトルとの内積だけを計算すればよく，計算量は大幅に削減できる．

例題 3.7. $\mathbb{R}^3$ の次の部分空間 W の直交補空間 $W^{\perp}$ の次元と基底を求めよ．

(1) $W = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix} \right\rangle$ (2) $W = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$

ただし，$\mathbb{R}^3$ の内積は標準内積とする．

（解答）

(1) 直交補空間 $W^{\perp}$ は

$$\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

と直交するベクトル $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ 全体のなす部分空間なので，斉次 1 次方程式

$$(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{x}) = x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 0$$

の解空間と一致する．よって，解は

$$\boldsymbol{x} = s \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad (s, t \in \mathbb{R})$$

と表せる．ゆえに，$\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$，$\begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ が $W^{\perp}$ の基底であり，$\dim W^{\perp} = 2$ となる．

(2) 直交補空間 $W^{\perp}$ は

$$\boldsymbol{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

のすべてと直交するベクトル $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ 全体のなす部分空間なので，斉次連立 1 次方程式

$$\begin{cases} (\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{x}) = x_1 - x_2 - 2x_3 = 0 \\ (\boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{x}) = x_1 + 2x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$$

の解空間と一致する．そこで，この方程式の係数行列を行基本変形で簡約階段行列に変形すれば

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 1 列の掃き出し}]{\text{(1,1) 成分による}} \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 0 & 3 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{(2,2) 成分による第 2 列の掃き出し}]{\text{第 2 行を 1/3 倍して}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

より，解は

$$\boldsymbol{x} = t \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad (t \in \mathbb{R})$$

と表せる．よって，$\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ が $W^{\perp}$ の基底であり，$\dim W^{\perp} = 1$ となる．

（解答終）

例題 3.8. $\mathbb{R}^4$ の部分空間

$$W = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ -8 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

の直交補空間 $W^\perp$ の次元と基底を求めよ．ただし，$\mathbb{R}^4$ の内積は標準内積とする．

（解答） 直交補空間 $W^\perp$ は

$$\boldsymbol{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{v}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ -8 \\ 1 \end{pmatrix}$$

のすべてと直交するベクトル $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$ 全体のなす部分空間なので，斉次連立 1 次方程式

$$\begin{cases} (\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{x}) = x_1 + 2x_2 - 3x_3 + x_4 = 0 \\ (\boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{x}) = 2x_1 + 5x_2 - 8x_3 + x_4 = 0 \end{cases}$$

の解空間と一致する．

そこで，この方程式の係数行列を行基本変形で簡約階段行列に変形すれば

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 1 \\ 2 & 5 & -8 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 1 列の掃き出し}]{\text{(1,1) 成分による}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 2 列の掃き出し}]{\text{(2,2) 成分による}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -2 & -1 \end{pmatrix}$$

より，解は

$$\boldsymbol{x} = s \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad (s, t \in \mathbb{R})$$

と表せる．よって，$\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ が $W^\perp$ の基底であり，$\dim W^\perp = 2$ となる．

（解答終）

数ベクトル空間の場合には部分空間 W の直交補空間 $W^\perp$ の計算は斉次連立 1 次方程式の解空間の計算に帰着される．そのため，計算方法や議論の流れは前に扱った例題とほぼ同じである．

例題 3.9.　$\mathbb{R}^4$ の部分空間

$$W = \left\langle \begin{pmatrix}1\\2\\1\\3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\0\\-1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\1\\2\\9\end{pmatrix} \right\rangle$$

の直交補空間 $W^{\perp}$ の次元と基底を求めよ．ただし，$\mathbb{R}^4$ の内積は標準内積とする．

（解答）　直交補空間 $W^{\perp}$ は

$$\boldsymbol{v}_1 = \begin{pmatrix}1\\2\\1\\3\end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{v}_2 = \begin{pmatrix}1\\1\\0\\-1\end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{v}_3 = \begin{pmatrix}-1\\1\\2\\9\end{pmatrix}$$

のすべてと直交するベクトル $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}$ 全体のなす部分空間なので，斉次連立 1 次方程式

$$\begin{cases} (\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{x}) = x_1 + 2x_2 + x_3 + 3x_4 = 0 \\ (\boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{x}) = x_1 + x_2 - x_4 = 0 \\ (\boldsymbol{v}_3, \boldsymbol{x}) = -x_1 + x_2 + 2x_3 + 9x_4 = 0 \end{cases}$$

の解空間と一致する．

　そこで，この方程式の係数行列を行基本変形で簡約階段行列に変形すれば

$$\begin{pmatrix}1&2&1&3\\1&1&0&-1\\-1&1&2&9\end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 1 列の掃き出し}]{\text{(1,1) 成分による}} \begin{pmatrix}1&2&1&3\\0&-1&-1&-4\\0&3&3&12\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{\text{第 2 行を } (-1) \text{ 倍}} \begin{pmatrix}1&2&1&3\\0&1&1&4\\0&3&3&12\end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 2 列の掃き出し}]{\text{(2,2) 成分による}} \begin{pmatrix}1&0&-1&-5\\0&1&1&4\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

より，解は

$$\boldsymbol{x} = s\begin{pmatrix}1\\-1\\1\\0\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}5\\-4\\0\\1\end{pmatrix} \qquad (s, t \in \mathbb{R})$$

と表せる．よって，$\begin{pmatrix}1\\-1\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}5\\-4\\0\\1\end{pmatrix}$ が $W^{\perp}$ の基底であり，$\dim W^{\perp} = 2$ となる．

（解答終）

　与えられたベクトルの組が W の基底になっていなくても，計算方法は変わらない．係数行列の基本変形の結果としてどこかの行の成分がすべて 0 になるだけなので，あらかじめ W の基底を求める必要はない．

4　計量ベクトル空間の直交分解と正射影

4.1　正規直交基底

xy 平面や xyz 空間の座標軸は直交しており，このために計算が簡単なものとなっている．これは

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = x\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + y\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = x\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + y\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + z\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

と表せば，$\mathbb{R}^2$ や $\mathbb{R}^3$ の標準基底の長さがすべて 1 で互いに直交しているという事実に相当する．

ここでは一般の計量ベクトル空間で同様に計算に便利な正規直交基底について説明する．当然ながらベクトルの長さや直交という概念を必要とするため，内積を決めなければこのようなことはできない．

まずは基底とは限らない場合の用語と性質を述べる．スカラーが実数の場合も複素数の場合も同様に議論が進むので，$\mathbb{K} = \mathbb{R}$ または $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ とする．

定義 4.1. （正規直交系）

V を $\mathbb{K}$ 上の計量ベクトル空間とする．V の零ベクトルでないベクトルの組 $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_k$ が

$$(\boldsymbol{v}_i, \boldsymbol{v}_j) = 0 \qquad (i, j = 1, 2, \ldots, k,\ i \neq j)$$

をみたすとき，$\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_k$ は V の**直交系**であるという．

直交系がさらに次の条件

$$\|\boldsymbol{v}_i\| = 1 \qquad (i = 1, 2, \ldots, k)$$

をみたすとき，$\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_k$ は V の**正規直交系**であるという．

このような場合に便利な記号として，クロネッカーのデルタ δ_{ij} というものがある．これは

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & (i = j) \\ 0 & (i \neq j) \end{cases}$$

と定義されるもので，例えば

$$\delta_{11} = \delta_{22} = \delta_{33} = 1, \qquad \delta_{12} = \delta_{21} = \delta_{13} = \delta_{31} = \delta_{23} = \delta_{32} = 0$$

となる．この記号を用いれば，単位行列は $E_n = (\delta_{ij})_{ij}$ と表せる．また，$\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_k$ が V の正規直交系であるための定義は

$$(\boldsymbol{v}_i, \boldsymbol{v}_j) = \delta_{ij} \qquad (i, j = 1, 2, \ldots, k)$$

と 1 つの式で表せる．

例 4.2.　$[-\pi, \pi]$ 上の連続関数全体のなす実ベクトル空間 $C([-\pi, \pi])$ の内積を

$$(f, g) = \int_{-\pi}^{\pi} f(x)g(x)\,dx$$

で定めると

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \qquad \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos kx, \qquad \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin kx \qquad (k = 1, 2, \ldots, n)$$

は $C([-\pi, \pi])$ の正規直交系である．各自で確かめてみよ（後で例題としても扱う）．

直交系については次の性質が重要である．

定理 4.3. （直交系の 1 次独立性）
$\mathbb{K}$ 上の計量ベクトル空間 V において，直交系は 1 次独立である．

証明. $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_k$ を V の直交系とする．この 1 次独立性を示すために，$c_1, c_2, \ldots, c_k \in \mathbb{K}$ に対して

$$c_1\boldsymbol{v}_1 + c_2\boldsymbol{v}_2 + \cdots + c_k\boldsymbol{v}_k = \boldsymbol{0} \qquad \cdots (*)$$

とおく．任意の $j = 1, 2, \ldots, k$ に対して，$(*)$ の両辺と $\boldsymbol{v}_j$ との内積をとると

$$(c_1\boldsymbol{v}_1 + c_2\boldsymbol{v}_2 + \cdots + c_k\boldsymbol{v}_k, \boldsymbol{v}_j) = 0$$

となる．ここで，直交系の定義より $i \neq j$ ならば $(\boldsymbol{v}_i, \boldsymbol{v}_j) = 0$ なので，この左辺は

$$\begin{aligned}(c_1\boldsymbol{v}_1 + c_2\boldsymbol{v}_2 + \cdots + c_k\boldsymbol{v}_k, \boldsymbol{v}_j) &= c_1(\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_j) + c_2(\boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_j) + \cdots + c_k(\boldsymbol{v}_k, \boldsymbol{v}_j) \\ &= c_j(\boldsymbol{v}_j, \boldsymbol{v}_j)\end{aligned}$$

である．よって

$$c_j(\boldsymbol{v}_j, \boldsymbol{v}_j) = 0$$

となる．ここで，$\boldsymbol{v}_j \neq \boldsymbol{0}$ より $(\boldsymbol{v}_j, \boldsymbol{v}_j) > 0$ であるから，$c_j = 0$ が成り立つ．ゆえに

$$c_1 = c_2 = \cdots = c_k = 0$$

が得られ，$(*)$ は自明な解のみをもつから，$\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_k$ は 1 次独立である． □

直交系は常に 1 次独立であるので，次のように用語を定める．

定義 4.4. （正規直交基底）
V を $\mathbb{K}$ 上の計量ベクトル空間とする．V のベクトル $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_n$ が正規直交系かつ V の基底となっているとき，$\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_n$ は**正規直交基底**であるという．

例 4.5. 標準内積を入れた $\mathbb{R}^n$ において，標準基底 $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \ldots, \boldsymbol{e}_n$ は $\mathbb{R}^n$ の正規直交基底である．
標準内積を入れた $\mathbb{C}^n$ においても，同様に標準基底は正規直交基底である．

正規直交基底は重要な役割を果たすが，具体的に正規直交基底を見つけるのは難しいことが多い．例えば $P_2(\mathbb{R})$ の内積を

$$(f, g) = \int_{-1}^{1} f(x)g(x)\,dx$$

で定義すれば，$1, x, x^2$ は $P_2(\mathbb{R})$ の基底ではあるが正規直交基底ではない．実際

$$(1, x^2) = \int_{-1}^{1} x^2\,dx = \frac{2}{3} \neq 0$$

であるから，1 と x^2 は直交しない．この実計量ベクトル空間 $P_2(\mathbb{R})$ の正規直交基底をあてずっぽうで見つけるのは不可能に近い．そこで，次節では与えられた基底を変換することで正規直交基底を機械的に構成できる方法を説明する．

例題 4.6. 実計量ベクトル空間 V の正規直交基底を $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_n$ とする．$\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in V$ を

$$\boldsymbol{x} = \sum_{j=1}^{n} x_j \boldsymbol{v}_j, \qquad \boldsymbol{y} = \sum_{j=1}^{n} y_j \boldsymbol{v}_j$$

と表すとき

$$x_j = (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{v}_j), \qquad \|\boldsymbol{x}\|^2 = \sum_{j=1}^{n} x_j^2, \qquad (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \sum_{j=1}^{n} x_j y_j$$

が成り立つことを示せ．

（解答） $j = 1, 2, \ldots, n$ とし，$\boldsymbol{x} = \sum\limits_{k=1}^{n} x_k \boldsymbol{v}_k$ と $\boldsymbol{v}_j$ との内積をとれば

$$(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{v}_j) = \left(\sum_{k=1}^{n} x_k \boldsymbol{v}_k, \boldsymbol{v}_j \right) = \sum_{k=1}^{n} x_k (\boldsymbol{v}_k, \boldsymbol{v}_j) = \sum_{k=1}^{n} x_k \delta_{kj} = x_j$$

となる．また

$$(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \left(\sum_{j=1}^{n} x_j \boldsymbol{v}_j, \sum_{k=1}^{n} y_k \boldsymbol{v}_k \right) = \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} x_j y_k (\boldsymbol{v}_j, \boldsymbol{v}_k) = \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} x_j y_k \delta_{jk} = \sum_{j=1}^{n} x_j y_j$$

が成り立つ．特に $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{x}$ とすれば

$$\|\boldsymbol{x}\|^2 = (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}) = \sum_{j=1}^{n} x_j x_j = \sum_{j=1}^{n} x_j^2$$

（解答終）

この例題 4.6 において，複素計量ベクトル空間の場合には内積に複素共役が現れるので

$$\|\boldsymbol{x}\|^2 = \sum_{j=1}^{n} |x_j|^2, \qquad (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \sum_{j=1}^{n} x_j \overline{y_j}$$

となる．各自で確かめてみること．

これより，抽象的な $\mathbb{K}$ 上の計量ベクトル空間 V において正規直交基底を用いた表示を利用すれば，標準内積を入れた $\mathbb{K}^n$ の場合と同様に内積や長さが計算できることがわかる．その意味で正規直交基底は有用である．

4.2 グラム・シュミットの直交化法

V を $\mathbb{K}$ 上の計量ベクトル空間とし，V のベクトルの組 $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_n$ が 1 次独立であるとする．このとき，V の正規直交系 $\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \ldots, \boldsymbol{u}_n$ で

$$\langle \boldsymbol{v}_1, \cdots, \boldsymbol{v}_k \rangle = \langle \boldsymbol{u}_1, \cdots, \boldsymbol{u}_k \rangle \qquad (k = 1, 2, \ldots, n)$$

となるものを作ることを考える．ここで，まずは直交系を作れば，それらを長さで割って正規化することで正規直交系が得られる．そこで，V の直交系 $\boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{w}_2, \ldots, \boldsymbol{w}_n$ を作ることを目指す.

(i) $\boldsymbol{w}_1 = \boldsymbol{v}_1$ とおく.

(ii) $\boldsymbol{w}_1$ と $\boldsymbol{v}_2$ が直交しているとは限らないから，$\boldsymbol{v}_2$ を $\boldsymbol{w}_1$ と直交するように変換したい．そこで，新しいベクトル $\boldsymbol{w}_2$ を

$$\boldsymbol{w}_2 = \boldsymbol{v}_2 - \lambda \boldsymbol{w}_1$$

とおき，$\boldsymbol{w}_1$ と $\boldsymbol{w}_2$ が直交するように定数 λ を定める．そのためには

$$0 = (\boldsymbol{w}_2, \boldsymbol{w}_1) = (\boldsymbol{v}_2 - \lambda \boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{w}_1) = (\boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{w}_1) - \lambda (\boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{w}_1)$$

より

$$\lambda = \frac{(\boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{w}_1)}{(\boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{w}_1)}$$

とすればよい．よって

$$\boldsymbol{w}_2 = \boldsymbol{v}_2 - \frac{(\boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{w}_1)}{(\boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{w}_1)} \boldsymbol{w}_1$$

とおくと $\boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{w}_2$ は V の直交系である．さらに，$\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2$ と $\boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{w}_2$ は互いに 1 次結合で書けるので，$\langle \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2 \rangle = \langle \boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{w}_2 \rangle$ が成り立つ.

(iii) $\boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{w}_2$ と $\boldsymbol{v}_3$ が直交しているとは限らないから，$\boldsymbol{v}_3$ を $\boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{w}_2$ の生成する 2 次元部分空間（$\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2$ の生成する平面と思ってよい）と直交するように変換したい．そこで，新しいベクトル $\boldsymbol{w}_3$ を

$$\boldsymbol{w}_3 = \boldsymbol{v}_3 - \lambda \boldsymbol{w}_1 - \mu \boldsymbol{w}_2$$

とおき，$\boldsymbol{w}_3$ が $\boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{w}_2$ と直交するような定数 λ, μ を求めると

$$0 = (\boldsymbol{w}_3, \boldsymbol{w}_1) = (\boldsymbol{v}_3 - \lambda \boldsymbol{w}_1 - \mu \boldsymbol{w}_2, \boldsymbol{w}_1) = (\boldsymbol{v}_3, \boldsymbol{w}_1) - \lambda (\boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{w}_1)$$

$$0 = (\boldsymbol{w}_3, \boldsymbol{w}_2) = (\boldsymbol{v}_3 - \lambda \boldsymbol{w}_1 - \mu \boldsymbol{w}_2, \boldsymbol{w}_2) = (\boldsymbol{v}_3, \boldsymbol{w}_2) - \mu (\boldsymbol{w}_2, \boldsymbol{w}_2)$$

より

$$\lambda = \frac{(\boldsymbol{v}_3, \boldsymbol{w}_1)}{(\boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{w}_1)}, \qquad \mu = \frac{(\boldsymbol{v}_3, \boldsymbol{w}_2)}{(\boldsymbol{w}_2, \boldsymbol{w}_2)}$$

となる．よって

$$\boldsymbol{w}_3 = \boldsymbol{v}_3 - \frac{(\boldsymbol{v}_3, \boldsymbol{w}_1)}{(\boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{w}_1)} \boldsymbol{w}_1 - \frac{(\boldsymbol{v}_3, \boldsymbol{w}_2)}{(\boldsymbol{w}_2, \boldsymbol{w}_2)} \boldsymbol{w}_2$$

とおくと $\boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{w}_2, \boldsymbol{w}_3$ は V の直交系である．さらに，$\langle \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3 \rangle = \langle \boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{w}_2, \boldsymbol{w}_3 \rangle$ が成り立つ.

(iv) ここまでの操作を繰り返すと，$k = 2, 3, \ldots, n$ に対して

$$\boldsymbol{w}_k = \boldsymbol{v}_k - \sum_{i=1}^{k-1} \frac{(\boldsymbol{v}_k, \boldsymbol{w}_i)}{(\boldsymbol{w}_i, \boldsymbol{w}_i)} \boldsymbol{w}_i$$

とすれば $\boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{w}_2, \ldots, \boldsymbol{w}_n$ は直交系になる．さらに，$\langle \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \cdots, \boldsymbol{v}_n \rangle = \langle \boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{w}_2, \cdots, \boldsymbol{w}_n \rangle$ が成り立つことも互いに 1 次結合で書けていることからわかる.

(v)　$\boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{w}_2, \ldots, \boldsymbol{w}_n$ をそれぞれの長さで割って正規化し

$$\boldsymbol{u}_k = \frac{\boldsymbol{w}_k}{\|\boldsymbol{w}_k\|} \qquad (k = 1, 2, \ldots, n)$$

とおけば $\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \ldots, \boldsymbol{u}_n$ は V の正規直交系である．

この正規直交系を構成する手法は**グラム・シュミットの直交化法**と呼ばれる．

定理 4.7. **（グラム・シュミットの直交化法）**
V を $\mathbb{K}$ 上の計量ベクトル空間とし，$\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_n$ を V の 1 次独立なベクトルの組とする．このとき，V の正規直交系 $\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \ldots, \boldsymbol{u}_n$ で

$$\langle \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \cdots, \boldsymbol{v}_k \rangle = \langle \boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \cdots, \boldsymbol{u}_k \rangle \qquad (k = 1, 2, \ldots, n)$$

となるものが存在する．具体的には

$$\begin{cases} \boldsymbol{w}_1 = \boldsymbol{v}_1 \\ \boldsymbol{w}_k = \boldsymbol{v}_k - \displaystyle\sum_{i=1}^{k-1} \frac{(\boldsymbol{v}_k, \boldsymbol{w}_i)}{(\boldsymbol{w}_i, \boldsymbol{w}_i)} \boldsymbol{w}_i \qquad (k = 2, 3, \ldots, n) \end{cases}$$

として

$$\boldsymbol{u}_k = \frac{\boldsymbol{w}_k}{\|\boldsymbol{w}_k\|}$$

とおけばよい．

グラム・シュミットの直交化法は，公式を暗記するよりも前に述べた導出法を理解して再現できるようにした方がミスは少なくなる．教科書によっては最後にまとめて長さで割るのではなく，各ステップで正規化して

$$\begin{cases} \boldsymbol{u}_1 = \dfrac{\boldsymbol{v}_1}{\|\boldsymbol{v}_1\|} \\ \boldsymbol{u}_k = \dfrac{\boldsymbol{v}_k - \sum_{i=1}^{k-1} (\boldsymbol{v}_k, \boldsymbol{u}_i)\boldsymbol{u}_i}{\|\boldsymbol{v}_k - \sum_{i=1}^{k-1} (\boldsymbol{v}_k, \boldsymbol{u}_i)\boldsymbol{u}_i\|} \qquad (k = 2, 3, \ldots, n) \end{cases}$$

と書いてあることもある．

どちらでも本質的に同じ計算ではあるが，途中で正規化すると計算式にルートがたくさん出てくることがあるので，個人的には最後に正規化する方が好みではある．いずれにしても，具体的な計算をミスなく実行できるように計算練習をしておくこと．

定理 4.8.　V が有限次元計量ベクトル空間ならば，正規直交基底が存在する．

証明.　$\dim V = n$ とし，$\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_n$ を V の基底とする．このとき，グラム・シュミットの直交化法（定理 4.7）により n 個のベクトルからなる正規直交系 $\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \ldots, \boldsymbol{u}_n$ が存在する．定理 4.3 から正規直交系は 1 次独立なので，$\dim V = n$ より $\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \ldots, \boldsymbol{u}_n$ は V の基底となる．よって，$\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \ldots, \boldsymbol{u}_n$ は V の正規直交基底である． □

4.3 グラム・シュミットの直交化法の計算例

例題 4.9. 標準内積を与えた $\mathbb{R}^3$ の基底

$$\boldsymbol{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{v}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{v}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

にグラム・シュミットの直交化法を適用して，$\mathbb{R}^3$ の正規直交基底を求めよ．

（解答） グラム・シュミットの直交化法より

$$\boldsymbol{w}_1 = \boldsymbol{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{w}_2 = \boldsymbol{v}_2 - \frac{(\boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{w}_1)}{(\boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{w}_1)} \boldsymbol{w}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{2}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{w}_3 = \boldsymbol{v}_3 - \frac{(\boldsymbol{v}_3, \boldsymbol{w}_1)}{(\boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{w}_1)} \boldsymbol{w}_1 - \frac{(\boldsymbol{v}_3, \boldsymbol{w}_2)}{(\boldsymbol{w}_2, \boldsymbol{w}_2)} \boldsymbol{w}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} - \frac{-1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} - \frac{2}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{5}{6} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

とおけば，$\boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{w}_2, \boldsymbol{w}_3$ は $\mathbb{R}^3$ の直交系である．よって

$$\|\boldsymbol{w}_1\| = \sqrt{2}, \qquad \|\boldsymbol{w}_2\| = \sqrt{3}, \qquad \|\boldsymbol{w}_3\| = \frac{5}{6}\sqrt{6}$$

より

$$\boldsymbol{u}_1 = \frac{\boldsymbol{w}_1}{\|\boldsymbol{w}_1\|} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{u}_2 = \frac{\boldsymbol{w}_2}{\|\boldsymbol{w}_2\|} = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{u}_3 = \frac{\boldsymbol{w}_3}{\|\boldsymbol{w}_3\|} = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

とおけば，$\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{u}_3$ が求める $\mathbb{R}^3$ の正規直交基底である．

（解答終）

計算法を理解していても，慣れないうちは計算ミスをしがちなので気を付けること．検算として，求めた答えが正規直交系となっているかを確認するのがよい．もし答えが正規直交系になっていなければ，必ずどこかに誤りがある．今回の例題なら

$$\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right) = 1 + 0 - 1 = 0$$

$$\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right) = 1 + 0 - 1 = 0$$

$$\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right) = 1 - 2 + 1 = 0$$

より，求めた答えの 3 本のベクトル $\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{u}_3$ は互いに直交している．直交するかどうかの検算の際には，もちろん上のように係数は無視するのが楽である．後はベクトルの長さが 1 となっているか確認すればよい．

例題 4.10.　標準内積を与えた $\mathbb{R}^3$ の次の基底にグラム・シュミットの直交化法を適用して，$\mathbb{R}^3$ の正規直交基底を求めよ．

(1) $\boldsymbol{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},\ \boldsymbol{v}_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},\ \boldsymbol{v}_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$　　(2) $\boldsymbol{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},\ \boldsymbol{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix},\ \boldsymbol{v}_3 = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$

（解答）

(1)　グラム・シュミットの直交化法より

$$\boldsymbol{w}_1 = \boldsymbol{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{w}_2 = \boldsymbol{v}_2 - \frac{(\boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{w}_1)}{(\boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{w}_1)} \boldsymbol{w}_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{-2}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{w}_3 = \boldsymbol{v}_3 - \frac{(\boldsymbol{v}_3, \boldsymbol{w}_1)}{(\boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{w}_1)} \boldsymbol{w}_1 - \frac{(\boldsymbol{v}_3, \boldsymbol{w}_2)}{(\boldsymbol{w}_2, \boldsymbol{w}_2)} \boldsymbol{w}_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{2}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{-3}{3} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

なので

$$\boldsymbol{u}_1 = \frac{\boldsymbol{w}_1}{\|\boldsymbol{w}_1\|} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{u}_2 = \frac{\boldsymbol{w}_2}{\|\boldsymbol{w}_2\|} = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{u}_3 = \frac{\boldsymbol{w}_3}{\|\boldsymbol{w}_3\|} = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

とおけば，$\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{u}_3$ が求める $\mathbb{R}^3$ の正規直交基底である．

(2)　グラム・シュミットの直交化法より

$$\boldsymbol{w}_1 = \boldsymbol{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{w}_2 = \boldsymbol{v}_2 - \frac{(\boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{w}_1)}{(\boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{w}_1)} \boldsymbol{w}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} - \frac{6}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{w}_3 = \boldsymbol{v}_3 - \frac{(\boldsymbol{v}_3, \boldsymbol{w}_1)}{(\boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{w}_1)} \boldsymbol{w}_1 - \frac{(\boldsymbol{v}_3, \boldsymbol{w}_2)}{(\boldsymbol{w}_2, \boldsymbol{w}_2)} \boldsymbol{w}_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} - \frac{-1}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{4}{2} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

なので

$$\boldsymbol{u}_1 = \frac{\boldsymbol{w}_1}{\|\boldsymbol{w}_1\|} = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{u}_2 = \frac{\boldsymbol{w}_2}{\|\boldsymbol{w}_2\|} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{u}_3 = \frac{\boldsymbol{w}_3}{\|\boldsymbol{w}_3\|} = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

とおけば，$\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{u}_3$ が求める $\mathbb{R}^3$ の正規直交基底である．

（解答終）

例題 4.11.　標準内積を与えた $\mathbb{R}^3$ の次の基底にグラム・シュミットの直交化法を適用して，$\mathbb{R}^3$ の正規直交基底を求めよ．

(1) $\boldsymbol{v}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},\ \boldsymbol{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},\ \boldsymbol{v}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$　　(2) $\boldsymbol{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix},\ \boldsymbol{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix},\ \boldsymbol{v}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

（解答）

(1)　グラム・シュミットの直交化法より

$$\boldsymbol{w}_1 = \boldsymbol{v}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{w}_2 = \boldsymbol{v}_2 - \frac{(\boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{w}_1)}{(\boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{w}_1)}\boldsymbol{w}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{3}{6}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{w}_3 = \boldsymbol{v}_3 - \frac{(\boldsymbol{v}_3, \boldsymbol{w}_1)}{(\boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{w}_1)}\boldsymbol{w}_1 - \frac{(\boldsymbol{v}_3, \boldsymbol{w}_2)}{(\boldsymbol{w}_2, \boldsymbol{w}_2)}\boldsymbol{w}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{5}{6}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{-1/2}{1/2}\cdot\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{2}{3}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

なので

$$\boldsymbol{u}_1 = \frac{\boldsymbol{w}_1}{\|\boldsymbol{w}_1\|} = \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{u}_2 = \frac{\boldsymbol{w}_2}{\|\boldsymbol{w}_2\|} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{u}_3 = \frac{\boldsymbol{w}_3}{\|\boldsymbol{w}_3\|} = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

とおけば，$\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{u}_3$ が求める $\mathbb{R}^3$ の正規直交基底である．

(2)　グラム・シュミットの直交化法より

$$\boldsymbol{w}_1 = \boldsymbol{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{w}_2 = \boldsymbol{v}_2 - \frac{(\boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{w}_1)}{(\boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{w}_1)}\boldsymbol{w}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{-1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{w}_3 = \boldsymbol{v}_3 - \frac{(\boldsymbol{v}_3, \boldsymbol{w}_1)}{(\boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{w}_1)}\boldsymbol{w}_1 - \frac{(\boldsymbol{v}_3, \boldsymbol{w}_2)}{(\boldsymbol{w}_2, \boldsymbol{w}_2)}\boldsymbol{w}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} - \frac{2}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} - \frac{-2}{9/2}\cdot\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

なので

$$\boldsymbol{u}_1 = \frac{\boldsymbol{w}_1}{\|\boldsymbol{w}_1\|} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{u}_2 = \frac{\boldsymbol{w}_2}{\|\boldsymbol{w}_2\|} = \frac{1}{3\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{u}_3 = \frac{\boldsymbol{w}_3}{\|\boldsymbol{w}_3\|} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

とおけば，$\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{u}_3$ が求める $\mathbb{R}^3$ の正規直交基底である．

（解答終）

数ベクトル空間ではないベクトル空間においても計算法は同様である．与えられた内積の形に注意して，公式に当てはめていけばよい．

例題 4.12. $P_2(\mathbb{R})$ に次の内積を与える．

$$(f(x), g(x)) = \int_{-1}^{1} f(x)g(x)\,dx$$

$P_2(\mathbb{R})$ の基底 $1, x, x^2$ から，グラム・シュミットの直交化法により $P_2(\mathbb{R})$ の正規直交基底を構成せよ．

（解答）　$\boldsymbol{w}_1 = 1$, $\boldsymbol{v}_2 = x$, $\boldsymbol{v}_3 = x^2$ とおく．まず

$$(\boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{w}_1) = \int_{-1}^{1} x\,dx = 0, \qquad (\boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{w}_1) = \int_{-1}^{1} 1\,dx = 2$$

より

$$\boldsymbol{w}_2 = \boldsymbol{v}_2 - \frac{(\boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{w}_1)}{(\boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{w}_1)}\,\boldsymbol{w}_1 = x - \frac{0}{2}\cdot 1 = x$$

次に

$$(\boldsymbol{v}_3, \boldsymbol{w}_1) = \int_{-1}^{1} x^2\,dx = \left[\frac{x^3}{3}\right]_{-1}^{1} = \frac{2}{3}$$

$$(\boldsymbol{v}_3, \boldsymbol{w}_2) = \int_{-1}^{1} x^3\,dx = 0$$

$$(\boldsymbol{w}_2, \boldsymbol{w}_2) = \int_{-1}^{1} x^2\,dx = \frac{2}{3}$$

より

$$\boldsymbol{w}_3 = \boldsymbol{v}_3 - \frac{(\boldsymbol{v}_3, \boldsymbol{w}_1)}{(\boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{w}_1)}\,\boldsymbol{w}_1 - \frac{(\boldsymbol{v}_3, \boldsymbol{w}_2)}{(\boldsymbol{w}_2, \boldsymbol{w}_2)}\,\boldsymbol{w}_2 = x^2 - \frac{2/3}{2}\cdot 1 - \frac{0}{2/3}\,x = x^2 - \frac{1}{3}$$

後は直交系 $\boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{w}_2, \boldsymbol{w}_3$ を正規化すればよい．ここで

$$\begin{aligned}\|\boldsymbol{w}_3\|^2 &= \int_{-1}^{1} \left(x^2 - \frac{1}{3}\right)^2 dx = 2\int_{0}^{1} \left(x^4 - \frac{2}{3}\,x^2 + \frac{1}{9}\right) dx \\ &= 2\left[\frac{x^5}{5} - \frac{2}{9}\,x^3 + \frac{x}{9}\right]_0^1 = \frac{8}{45}\end{aligned}$$

より

$$\|\boldsymbol{w}_1\| = \sqrt{2}, \qquad \|\boldsymbol{w}_2\| = \sqrt{\frac{2}{3}} = \frac{2}{\sqrt{6}}, \qquad \|\boldsymbol{w}_3\| = \sqrt{\frac{8}{45}} = \frac{4}{3\sqrt{10}}$$

なので

$$\boldsymbol{u}_1 = \frac{\boldsymbol{w}_1}{\|\boldsymbol{w}_1\|} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\boldsymbol{u}_2 = \frac{\boldsymbol{w}_2}{\|\boldsymbol{w}_2\|} = \frac{\sqrt{6}}{2}\,x$$

$$\boldsymbol{u}_3 = \frac{\boldsymbol{w}_3}{\|\boldsymbol{w}_3\|} = \frac{3\sqrt{10}}{4}\left(x^2 - \frac{1}{3}\right) = \frac{\sqrt{10}}{4}(3x^2 - 1)$$

とおけば，$\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{u}_3$ が求める $P_2(\mathbb{R})$ の正規直交基底である．

（解答終）

例題 4.13. $P_2(\mathbb{R})$ に次の内積を与える．

$$(f(x), g(x)) = \int_0^1 f(x)g(x)\,dx$$

$P_2(\mathbb{R})$ の基底 $1, x, x^2$ から，グラム・シュミットの直交化法により $P_2(\mathbb{R})$ の正規直交基底を構成せよ．

（解答） $\boldsymbol{w}_1 = 1$, $\boldsymbol{v}_2 = x$, $\boldsymbol{v}_3 = x^2$ とおく．まず

$$(\boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{w}_1) = \int_0^1 x\,dx = \frac{1}{2}, \qquad (\boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{w}_1) = \int_0^1 1\,dx = 1$$

より

$$\boldsymbol{w}_2 = \boldsymbol{v}_2 - \frac{(\boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{w}_1)}{(\boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{w}_1)}\,\boldsymbol{w}_1 = x - \frac{1/2}{1} \cdot 1 = x - \frac{1}{2}$$

次に

$$(\boldsymbol{v}_3, \boldsymbol{w}_1) = \int_0^1 x^2\,dx = \frac{1}{3}$$

$$(\boldsymbol{v}_3, \boldsymbol{w}_2) = \int_0^1 x^2\left(x - \frac{1}{2}\right)dx = \int_0^1 \left(x^3 - \frac{x^2}{2}\right)dx = \left[\frac{x^4}{4} - \frac{x^3}{6}\right]_0^1 = \frac{1}{12}$$

$$(\boldsymbol{w}_2, \boldsymbol{w}_2) = \int_0^1 \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 dx = \left[\frac{1}{3}\left(x - \frac{1}{2}\right)^3\right]_0^1 = \frac{1}{12}$$

より

$$\boldsymbol{w}_3 = \boldsymbol{v}_3 - \frac{(\boldsymbol{v}_3, \boldsymbol{w}_1)}{(\boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{w}_1)}\,\boldsymbol{w}_1 - \frac{(\boldsymbol{v}_3, \boldsymbol{w}_2)}{(\boldsymbol{w}_2, \boldsymbol{w}_2)}\,\boldsymbol{w}_2 = x^2 - \frac{1/3}{1} \cdot 1 - \frac{1/12}{1/12}\left(x - \frac{1}{2}\right) = x^2 - x + \frac{1}{6}$$

後は直交系 $\boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{w}_2, \boldsymbol{w}_3$ を正規化すればよい．ここで

$$\|\boldsymbol{w}_3\|^2 = \int_0^1 \left(x^2 - x + \frac{1}{6}\right)^2 dx = \int_0^1 \left(x^4 - 2x^3 + \frac{4}{3}\,x^2 - \frac{1}{3}\,x + \frac{1}{36}\right)dx$$

$$= \left[\frac{x^5}{5} - \frac{x^4}{2} + \frac{4}{9}\,x^3 - \frac{x^2}{6} + \frac{x}{36}\right]_0^1 = \frac{1}{180}$$

より

$$\|\boldsymbol{w}_1\| = 1, \qquad \|\boldsymbol{w}_2\| = \sqrt{\frac{1}{12}} = \frac{1}{2\sqrt{3}}, \qquad \|\boldsymbol{w}_3\| = \sqrt{\frac{1}{180}} = \frac{1}{6\sqrt{5}}$$

なので

$$\boldsymbol{u}_1 = \frac{\boldsymbol{w}_1}{\|\boldsymbol{w}_1\|} = 1$$

$$\boldsymbol{u}_2 = \frac{\boldsymbol{w}_2}{\|\boldsymbol{w}_2\|} = 2\sqrt{3}\left(x - \frac{1}{2}\right) = \sqrt{3}\,(2x - 1)$$

$$\boldsymbol{u}_3 = \frac{\boldsymbol{w}_3}{\|\boldsymbol{w}_3\|} = 6\sqrt{5}\left(x^2 - x + \frac{1}{6}\right) = \sqrt{5}\,(6x^2 - 6x + 1)$$

とおけば，$\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{u}_3$ が求める $P_2(\mathbb{R})$ の正規直交基底である．

（解答終）

4.4 直交分解

ここでは V は $\mathbb{K}$ 上の計量ベクトル空間とし，$(\cdot,\cdot)$ で V の内積を表す．

定理 4.14. （計量ベクトル空間の直交分解）

W を V の有限次元部分空間とするとき，次が成り立つ．

(1) $V = W \oplus W^{\perp}$　　　(2) $(W^{\perp})^{\perp} = W$

証明.

(1)　例題 3.4 より，$W \cap W^{\perp} = \{\mathbf{0}\}$ は成り立つ．ゆえに，$V = W + W^{\perp}$ であることを示せばよい．

W は有限次元なので，定理 4.8 より W の正規直交基底 $\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \ldots, \boldsymbol{u}_k$ が存在する．そこで，任意の $\boldsymbol{v} \in V$ に対して

$$\boldsymbol{v}' = \sum_{i=1}^{k} (\boldsymbol{v}, \boldsymbol{u}_i)\boldsymbol{u}_i \in W$$

とおく．このとき，$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}' + (\boldsymbol{v} - \boldsymbol{v}') \in W + W^{\perp}$ である．実際，$j = 1, 2, \ldots, k$ に対して

$$\begin{aligned}(\boldsymbol{v} - \boldsymbol{v}', \boldsymbol{u}_j) = \left(\boldsymbol{v} - \sum_{i=1}^{k}(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{u}_i)\boldsymbol{u}_i, \boldsymbol{u}_j\right) &= (\boldsymbol{v}, \boldsymbol{u}_j) - \sum_{i=1}^{k}(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{u}_i)(\boldsymbol{u}_i, \boldsymbol{u}_j) \\ &= (\boldsymbol{v}, \boldsymbol{u}_j) - \sum_{i=1}^{k}(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{u}_i)\delta_{ij} = (\boldsymbol{v}, \boldsymbol{u}_j) - (\boldsymbol{v}, \boldsymbol{u}_j) = 0\end{aligned}$$

であるから，例題 3.6 より $\boldsymbol{v} - \boldsymbol{v}' \in W^{\perp}$ である．よって，$V = W + W^{\perp}$ が成り立つ．

したがって，第 8 章命題 5.11 より，$V = W \oplus W^{\perp}$ が成り立つ．

(2)　直交補空間の性質として，常に $W \subset (W^{\perp})^{\perp}$ が成り立つ．なぜならば，任意の $\boldsymbol{u} \in W$ をとり固定すると

$$\boldsymbol{v} \in W^{\perp} \quad \Longrightarrow \quad (\boldsymbol{v}, \boldsymbol{u}) = 0$$

であるから，これより

$$(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) = 0 \qquad (\boldsymbol{v} \in W^{\perp})$$

が成り立つ．ゆえに，直交補空間の定義より $\boldsymbol{u} \in (W^{\perp})^{\perp}$ となる．

任意の $\boldsymbol{v} \in (W^{\perp})^{\perp}$ に対して，(1) より $V = W \oplus W^{\perp}$ であるから

$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{u} + \boldsymbol{z} \qquad (\boldsymbol{u} \in W,\ \boldsymbol{z} \in W^{\perp})$$

と一意的に表せる．このとき

$$(\boldsymbol{z}, \boldsymbol{z}) = (\boldsymbol{v} - \boldsymbol{u}, \boldsymbol{z}) = (\boldsymbol{v}, \boldsymbol{z}) - (\boldsymbol{u}, \boldsymbol{z})$$

となるが，ここで

$$\boldsymbol{z} \in W^{\perp},\ \boldsymbol{v} \in (W^{\perp})^{\perp} \quad \Longrightarrow \quad (\boldsymbol{z}, \boldsymbol{v}) = 0$$

$$\boldsymbol{u} \in W,\ \boldsymbol{z} \in W^{\perp} \quad \Longrightarrow \quad (\boldsymbol{u}, \boldsymbol{z}) = 0$$

であるから，$(\boldsymbol{z}, \boldsymbol{z}) = 0$ となるので，$\boldsymbol{z} = \mathbf{0}$ である．よって，$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{u} \in W$ となるから，$(W^{\perp})^{\perp} \subset W$ が成り立つ．

したがって，$W = (W^{\perp})^{\perp}$ が成り立つ．

□

4.5　正射影

$\mathbb{K}$ 上の計量ベクトル空間 V の直交分解 $V = W \oplus W^{\perp}$ を利用して，正射影という写像が定義できる．

定義 4.15. （正射影）
V を $\mathbb{K}$ 上の計量ベクトル空間，W を V の有限次元部分空間とする．このとき，直交分解定理（定理 4.14）より $V = W \oplus W^{\perp}$ であるから，任意のベクトル $\boldsymbol{v} \in V$ は

$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{u} + \boldsymbol{z} \qquad (\boldsymbol{u} \in W,\ \boldsymbol{z} \in W^{\perp})$$

と一意的に表せる．このとき，V 上の線形変換 $P_W \colon V \longrightarrow V$ を

$$P_W(\boldsymbol{v}) = \boldsymbol{u} \qquad (\boldsymbol{v} = \boldsymbol{u} + \boldsymbol{z},\ \boldsymbol{u} \in W,\ \boldsymbol{z} \in W^{\perp})$$

で定義し，これを V から W への**正射影**という．

定理 4.14 の証明から，$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{u} + \boldsymbol{z} \in W \oplus W^{\perp}$ と表したとき，$\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \ldots, \boldsymbol{u}_k$ を W の正規直交基底とすれば

$$\boldsymbol{u} = \sum_{j=1}^{k} (\boldsymbol{v}, \boldsymbol{u}_j)\boldsymbol{u}_j \in W$$

であったから，次が成り立つ．

定理 4.16. （正射影の公式）
V を $\mathbb{K}$ 上の計量ベクトル空間，W を V の有限次元部分空間とする．$\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \ldots, \boldsymbol{u}_k$ を W の正規直交基底とすれば，$\boldsymbol{v} \in V$ の正射影について

$$P_W(\boldsymbol{v}) = \sum_{j=1}^{k} (\boldsymbol{v}, \boldsymbol{u}_j)\boldsymbol{u}_j$$

が成り立つ．

次の定理より，V から W への正射影は $\boldsymbol{v} \in V$ を $\boldsymbol{v}$ に最も近いベクトル $\boldsymbol{u} \in W$ に写すことがわかる．つまり，正射影ベクトル $P_W(\boldsymbol{v})$ は $\boldsymbol{v}$ から部分空間 W に下ろした垂線の足に相当している．

ベクトル $\boldsymbol{v} \in V$ と有限次元部分空間 W に対して，$\boldsymbol{w} \in W$ を動かしたときの $\|\boldsymbol{v}-\boldsymbol{w}\|$ の最小値

$$d(\boldsymbol{v}, W)=\min_{\boldsymbol{w} \in W}\|\boldsymbol{v}-\boldsymbol{w}\|$$

を $\boldsymbol{v}$ と W の**距離**という．この最小値を与えるベクトル $\boldsymbol{w}$ は “$\boldsymbol{v}$ から W に下ろした垂線の足”であると考えられるが，それは正しい．

定理 4.17. （正射影の性質）
W を V の有限次元部分空間とし，$\boldsymbol{v} \in V$ とする．このとき，$\boldsymbol{v}$ と W の距離について

$$d(\boldsymbol{v}, W)=\min_{\boldsymbol{w} \in W}\|\boldsymbol{v}-\boldsymbol{w}\|=\|\boldsymbol{v}-P_W(\boldsymbol{v})\|$$

が成り立つ．さらに，最小値をとるベクトル $\boldsymbol{w} \in W$ は $\boldsymbol{w}=P_W(\boldsymbol{v})$ のときに限る．

証明. $\boldsymbol{v} \in V$ に対して，V の直交分解を利用して

$$\boldsymbol{u}=P_W(\boldsymbol{v}) \in W, \qquad z=\boldsymbol{v}-\boldsymbol{u} \in W^{\perp}$$

とおく．このとき，任意の $\boldsymbol{w} \in W$ に対して，W は部分空間なので

$$\boldsymbol{u}-\boldsymbol{w} \in W$$

である．よって，$\boldsymbol{u}-\boldsymbol{w} \perp \boldsymbol{z}$ なので

$$\begin{aligned}\|\boldsymbol{v}-\boldsymbol{w}\|^2=\|(\boldsymbol{u}+\boldsymbol{z})-\boldsymbol{w}\|^2 &=\|(\boldsymbol{u}-\boldsymbol{w})+\boldsymbol{z}\|^2 \\ &=\|\boldsymbol{u}-\boldsymbol{w}\|^2+(\boldsymbol{u}-\boldsymbol{w}, \boldsymbol{z})+(\boldsymbol{z}, \boldsymbol{u}-\boldsymbol{w})+\|\boldsymbol{z}\|^2 \\ &=\|\boldsymbol{u}-\boldsymbol{w}\|^2+\|\boldsymbol{z}\|^2\end{aligned}$$

が成り立つ．ゆえに

$$\|\boldsymbol{v}-\boldsymbol{w}\|=\sqrt{\|\boldsymbol{u}-\boldsymbol{w}\|^2+\|\boldsymbol{v}-P_W(\boldsymbol{v})\|^2}$$

である．ここで，右辺で $\boldsymbol{w} \in W$ を動かせば，$\boldsymbol{w}=\boldsymbol{u}=P_W(\boldsymbol{v})$ のときに最小値 $\|\boldsymbol{v}-P_W(\boldsymbol{v})\|$ をとる． □

例題 4.18. $\mathbb{R}^3$ において標準内積を考える．次の部分空間 W とベクトル $\boldsymbol{v}$ に対して，正射影ベクトル $P_W(\boldsymbol{v})$ を求めよ．

(1) $W = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \right\rangle, \quad \boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} -2 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}$　　(2) $W = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle, \quad \boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}$

（解答）

(1)　W の基底は $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ なので，これを正規化した

$$\boldsymbol{u} = \frac{1}{\sqrt{14}} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

が W の正規直交基底である．よって

$$(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{u}) = \frac{-2+10+3}{\sqrt{14}} = \frac{11}{\sqrt{14}}$$

より，求める正射影ベクトルは

$$P_W(\boldsymbol{v}) = (\boldsymbol{v}, \boldsymbol{u})\boldsymbol{u} = \frac{11}{\sqrt{14}} \cdot \frac{1}{\sqrt{14}} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \frac{11}{14} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

(2)　グラム・シュミットの直交化法を用いて W の正規直交基底を構成する．

$$\boldsymbol{w}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$$

とおけば

$$\boldsymbol{w}_2 = \boldsymbol{v}_2 - \frac{(\boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{w}_1)}{(\boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{w}_1)} \boldsymbol{w}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} - \frac{4}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

より

$$\boldsymbol{u}_1 = \frac{\boldsymbol{w}_1}{\|\boldsymbol{w}_1\|} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{u}_2 = \frac{\boldsymbol{w}_2}{\|\boldsymbol{w}_2\|} = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

が W の正規直交基底である．よって

$$P_W(\boldsymbol{v}) = (\boldsymbol{v}, \boldsymbol{u}_1)\boldsymbol{u}_1 + (\boldsymbol{v}, \boldsymbol{u}_2)\boldsymbol{u}_2 = \frac{3}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{2}{\sqrt{3}} \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 5 \\ 13 \\ -4 \end{pmatrix}$$

（解答終）

例題 4.19. W を $\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ が生成する $\mathbb{R}^3$ の部分空間とする．このとき，点 $\mathrm{A}(1,-2,3)$ と W との距離を求めよ．ただし，$\mathbb{R}^3$ には標準内積を考えるものとする．

（解答 1） W の正規直交基底は $\boldsymbol{u} = \dfrac{\boldsymbol{v}}{\|\boldsymbol{v}\|} = \dfrac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ である．このとき，$\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$ とおけば，ベクトル $\boldsymbol{a}$ の W への正射影ベクトルは

$$P_W(\boldsymbol{a}) = (\boldsymbol{a},\boldsymbol{u})\boldsymbol{u} = \frac{6}{\sqrt{3}} \cdot \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

であるから

$$\boldsymbol{a} - P_W(\boldsymbol{a}) = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

となる．よって，求める距離は

$$d(\boldsymbol{a},W) = \|\boldsymbol{a} - P_W(\boldsymbol{a})\| = \sqrt{(-1)^2+0^2+1^2} = \sqrt{2}$$

（解答 1 終）

（解答 2） W は原点 O を通り $\boldsymbol{v}$ を方向ベクトルとする直線である．点 A から直線 U に下ろした垂線の足を H とおくと，$\overrightarrow{\mathrm{OH}} = t\boldsymbol{v}$ となる実数 t が存在する．このとき，$\overrightarrow{\mathrm{AH}} \perp \boldsymbol{v}$ であるから

$$\overrightarrow{\mathrm{AH}} = \overrightarrow{\mathrm{OH}} - \overrightarrow{\mathrm{OA}} = \begin{pmatrix} t \\ -t \\ t \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t-1 \\ -t+2 \\ t-3 \end{pmatrix}$$

より

$$\overrightarrow{\mathrm{AH}} \cdot \boldsymbol{v} = (t-1)-(-t+2)+(t-3) = 3t-6 = 0 \qquad \therefore\ t=2$$

となる．ゆえに，$\overrightarrow{\mathrm{AH}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ であるから，求める距離は

$$\mathrm{AH} = \sqrt{1^2+0^2+(-1)^2} = \sqrt{2}$$

（解答 2 終）

このように成分が少ない場合には，正射影を用いずに求めることも可能であるが，成分が増えてくると文字が増えてくるので大変である．また，正射影を用いると方程式を解く必要がなく，機械的に求めることができることも利点なので，必ず計算に習熟しておくこと．

例題 4.20. ベクトル $\boldsymbol{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{v}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ が生成する $\mathbb{R}^3$ の部分空間を W とする．このとき，点 $\mathrm{A}(3, 8, 2)$ と W との距離を求めよ．ただし，$\mathbb{R}^3$ には標準内積を考えるものとする．

（解答 1） グラム・シュミットの直交化法を用いて W の正規直交基底を構成する．

$$\boldsymbol{w}_1 = \boldsymbol{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{w}_2 = \boldsymbol{v}_2 - \frac{(\boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{w}_1)}{(\boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{w}_1)} \boldsymbol{w}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{4}{5} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 6 \\ -5 \\ -3 \end{pmatrix}$$

とおけば，$\|\boldsymbol{w}_1\| = \sqrt{5}$, $\|\boldsymbol{w}_2\| = \dfrac{\sqrt{70}}{5}$ であるから

$$\boldsymbol{u}_1 = \frac{\boldsymbol{w}_1}{\|\boldsymbol{w}_1\|} = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{u}_2 = \frac{\boldsymbol{w}_2}{\|\boldsymbol{w}_2\|} = \frac{1}{\sqrt{70}} \begin{pmatrix} 6 \\ -5 \\ -3 \end{pmatrix}$$

が W の正規直交基底である．$\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$ とおけば，ベクトル $\boldsymbol{a}$ の W への正射影ベクトルは

$$P_W(\boldsymbol{a}) = (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{u}_1)\boldsymbol{u}_1 + (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{u}_2)\boldsymbol{u}_2 = \frac{7}{\sqrt{5}} \cdot \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + \frac{-28}{\sqrt{70}} \cdot \frac{1}{\sqrt{70}} \begin{pmatrix} 6 \\ -5 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$$

であるから

$$\boldsymbol{a} - P_W(\boldsymbol{a}) = \begin{pmatrix} 3 \\ 8 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \\ -2 \end{pmatrix}$$

となる．よって，求める距離は

$$d(\boldsymbol{a}, W) = \|\boldsymbol{a} - P_W(\boldsymbol{a})\| = \sqrt{4^2 + 6^2 + (-2)^2} = 2\sqrt{14}$$

（**解答 1** 終）

（解答 2） W は原点 O を通り $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2$ が張る平面である．点 A から直線 W に下ろした垂線の足を H とおくと，$\overrightarrow{\mathrm{OH}} = s\boldsymbol{v}_1 + t\boldsymbol{v}_2$ となる実数 s, t が存在する．このとき，$\overrightarrow{\mathrm{AH}} \perp \boldsymbol{v}_1$, $\overrightarrow{\mathrm{AH}} \perp \boldsymbol{v}_2$ であるから

$$\overrightarrow{\mathrm{AH}} = \overrightarrow{\mathrm{OH}} - \overrightarrow{\mathrm{OA}} = s \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 \\ 8 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s + 2t - 3 \\ -t - 8 \\ 2s + t - 2 \end{pmatrix}$$

より

$$\begin{cases} \overrightarrow{\mathrm{AH}} \cdot \boldsymbol{v}_1 = (s + 2t - 3) + 0 + 2(2s + t - 2) = 5s + 4t - 7 = 0 & \therefore\ 5s + 4t = 7 \\ \overrightarrow{\mathrm{AH}} \cdot \boldsymbol{v}_2 = 2(s + 2t - 3) - (-t - 8) + (2s + t - 2) = 4s + 6t = 0 & \therefore\ 2s + 3t = 0 \end{cases}$$

となる．これを解けば $s = 3$, $t = -2$ である．ゆえに，$\overrightarrow{\mathrm{AH}} = \begin{pmatrix} -4 \\ -6 \\ 2 \end{pmatrix}$ であるから，求める距離は

$$\mathrm{AH} = \sqrt{(-4)^2 + (-6)^2 + 2^2} = 2\sqrt{14}$$

（**解答 2** 終）

例題 4.21.　$[-\pi,\pi]$ 上の連続関数全体のなす実ベクトル空間 $C([-\pi,\pi])$ の内積を

$$(f,g)=\int_{-\pi}^{\pi} f(x)g(x)\,dx$$

で定める．n を自然数とし，$C([-\pi,\pi])$ の部分空間を

$$W=\langle 1,\ \cos x,\ \sin x,\ \cos 2x,\ \sin 2x,\ \ldots,\ \cos nx,\ \sin nx\rangle$$

とおく．このとき，$f\in C([-\pi,\pi])$ の W への正射影は，$k=1,2,\ldots,n$ に対して

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx,\qquad a_k=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos kx\,dx,\qquad b_k=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin kx\,dx$$

とおけば

$$P_W(f)=\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{n}(a_k\cos kx+b_k\sin kx)$$

と表せることを示せ．

（解答）　例題 1.13 より

$$f_0(x)=1,\qquad f_k(x)=\cos kx,\qquad g_k(x)=\sin kx\qquad (k=1,2,\ldots,n)$$

は $C([-\pi,\pi])$ の直交系である．また，$k=1,2,\ldots,n$ に対して

$$\|f_0\|^2=\int_{-\pi}^{\pi} 1^2\,dx=2\pi$$

$$\|f_k\|^2=\int_{-\pi}^{\pi}\cos^2 kx\,dx=\int_{-\pi}^{\pi}\frac{1+\cos 2kx}{2}\,dx=\left[\frac{x}{2}+\frac{\sin 2kx}{4k}\right]_{-\pi}^{\pi}=\pi$$

$$\|g_k\|^2=\int_{-\pi}^{\pi}\sin^2 kx\,dx=\int_{-\pi}^{\pi}\frac{1-\cos 2kx}{2}\,dx=\left[\frac{x}{2}-\frac{\sin 2kx}{4k}\right]_{-\pi}^{\pi}=\pi$$

なので，正規化した

$$\frac{f_0}{\|f_0\|}=\frac{1}{\sqrt{2\pi}},\qquad \frac{f_k}{\|f_k\|}=\frac{\cos kx}{\sqrt{\pi}},\qquad \frac{g_k}{\|g_k\|}=\frac{\sin kx}{\sqrt{\pi}}$$

が W の正規直交基底となる．よって，$f\in C([-\pi,\pi])$ の W への正射影は

$$\begin{aligned}
P_W(f)&=\left(f,\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\right)\frac{1}{\sqrt{2\pi}}+\sum_{k=1}^{n}\left\{\left(f,\frac{\cos kx}{\sqrt{\pi}}\right)\frac{\cos kx}{\sqrt{\pi}}+\left(f,\frac{\sin kx}{\sqrt{\pi}}\right)\frac{\sin kx}{\sqrt{\pi}}\right\}\\
&=\int_{-\pi}^{\pi}\frac{f(x)}{\sqrt{2\pi}}\,dx\cdot\frac{1}{\sqrt{2\pi}}+\sum_{k=1}^{n}\left\{\int_{-\pi}^{\pi}\frac{f(x)\cos kx}{\sqrt{\pi}}\,dx\cdot\frac{\cos kx}{\sqrt{\pi}}+\int_{-\pi}^{\pi}\frac{f(x)\sin kx}{\sqrt{\pi}}\,dx\cdot\frac{\sin kx}{\sqrt{\pi}}\right\}\\
&=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx+\sum_{k=1}^{n}\left\{\left(\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos kx\,dx\right)\cos kx+\left(\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin kx\,dx\right)\sin kx\right\}\\
&=\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{n}(a_k\cos kx+b_k\sin kx)
\end{aligned}$$

（解答終）

この正射影で $n\to\infty$ とした無限級数は**フーリエ級数**と呼ばれる．これは正射影の意味から，与えられた内積から定まる距離について関数 $f(x)$ を三角関数の和で最もよく近似したものとなっている．

5　直交行列とユニタリ行列

5.1　直交行列

ここでは後で重要な役割を果たす行列について説明する．まずは行列の成分がすべて実数の場合を考える．特に断りがなければ，$\mathbb{R}^n$ には標準内積を与えるものとする．

定義 5.1.（直交行列）
$P \in M_n(\mathbb{R})$ が

$$ {}^t\!PP = E_n $$

をみたすとき，P を**直交行列**という．

直交行列の定義自体はシンプルである．これは P が実数を成分にもつ正方行列で $P^{-1} = {}^t\!P$ となることと憶えてもよい．例えば

$$ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} $$

は 2 次直交行列である．また，θ を実数とすれば，回転行列

$$ R(\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} $$

も 2 次直交行列である．各自で直交行列の定義をみたすことを確かめてみよ．

例題 5.2.　直交行列に関する次の性質を示せ．

(1) P が n 次直交行列ならば，行列式 $\det P$ の値は 1 または -1 である．

(2) P, Q が n 次直交行列ならば，積 PQ および逆行列 P^{-1} も直交行列である．

（解答）

(1)　行列式の性質より $\det({}^t\!P) = \det P$ であるから，定義式 ${}^t\!PP = E_n$ の両辺の行列式をとれば

$$ \det({}^t\!PP) = (\det {}^t\!P)(\det P) = (\det P)^2 = 1 $$

より，$\det P = 1$ または $\det P = -1$ である．

(2)　$P, Q \in M_n(\mathbb{R})$ が直交行列なので，${}^t\!PP = {}^t\!QQ = E_n$ である．このとき，$A = PQ$ とおけば

$$ {}^t\!A = {}^t(PQ) = {}^t\!Q\,{}^t\!P $$

であるから

$$ {}^t\!AA = ({}^t\!Q\,{}^t\!P)(PQ) = {}^t\!QE_nQ = {}^t\!QQ = E_n $$

が成り立つ．よって，$A = PQ$ も直交行列である．

また，P が直交行列ならば，${}^t\!P = P^{-1}$ であるから

$$ {}^t(P^{-1})P^{-1} = ({}^t\!P)^{-1}P^{-1} = (P\,{}^t\!P)^{-1} = (E_n)^{-1} = E_n $$

より，P^{-1} も直交行列である．

（解答終）

直交行列は $\mathbb{R}^n$ の標準内積と強い関係がある．その説明のために，今後よく用いる公式を紹介する．

例題 5.3. （内積と転置行列）
$(\cdot,\cdot)$ を $\mathbb{R}^n$ の標準内積とする．任意の $\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\in\mathbb{R}^n$, $A\in M_n(\mathbb{R})$ に対して

$$(A\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})=(\boldsymbol{x},{}^t\!A\boldsymbol{y})$$

が成り立つことを示せ．

（解答）　$\mathbb{R}^n$ の標準内積は

$$(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})={}^t\boldsymbol{x}\boldsymbol{y}$$

と表せるから

$$(A\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})={}^t(A\boldsymbol{x})\boldsymbol{y}=({}^t\boldsymbol{x}\,{}^t\!A)\boldsymbol{y}={}^t\boldsymbol{x}({}^t\!A\boldsymbol{y})=(\boldsymbol{x},{}^t\!A\boldsymbol{y})$$

が成り立つ．

（解答終）

直交行列の重要な性質は，次の内積保存性である．

定理 5.4. （直交行列の内積保存性）
P が n 次直交行列ならば，すべての $\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\in\mathbb{R}^n$ に対して

$$(P\boldsymbol{x},P\boldsymbol{y})=(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$$

が成り立つ．特に，$\boldsymbol{x}=\boldsymbol{y}$ とすれば

$$\|P\boldsymbol{x}\|=\|\boldsymbol{x}\|$$

となるので，直交行列 P をかけてもベクトルの長さは変わらない．

証明．　直交行列の定義より ${}^tPP=E_n$ なので

$$(P\boldsymbol{x},P\boldsymbol{y})=(\boldsymbol{x},{}^tPP\boldsymbol{y})=(\boldsymbol{x},E_n\boldsymbol{y})=(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$$

が成り立つ．特に，$\boldsymbol{x}=\boldsymbol{y}$ とすれば

$$(P\boldsymbol{x},P\boldsymbol{x})=(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x})$$

より $\|P\boldsymbol{x}\|^2=\|\boldsymbol{x}\|^2$ となるので，$\|P\boldsymbol{x}\|=\|\boldsymbol{x}\|$ が成り立つ．したがって，$\boldsymbol{x}$ と $P\boldsymbol{x}$ は同じ長さである．　□

直交行列をかけることによるベクトルの変換は内積の値を変えない，つまりベクトルの大きさやなす角を変えないので，実質的には回転または裏返し（およびそれらの合成）だと思ってよい．また，直交行列による変換は長さを変えないので，$\|\boldsymbol{x}\|=1$ という正規化条件を保ちながら $\boldsymbol{x}$ を変化させた場合に，$\boldsymbol{y}=P\boldsymbol{x}$ も同じ正規化条件を満たしている．この事実は後で重要な役割を果たす．

問題に応じて有用な直交行列を構成する際には，次の定理が重要となる．

定理 5.5.（直交行列と正規直交基底の関係）
A を実数を成分にもつ n 次正方行列とし，その列ベクトル分解を

$$A = \begin{pmatrix} \boldsymbol{a}_1 & \boldsymbol{a}_2 & \cdots & \boldsymbol{a}_n \end{pmatrix}$$

とする．このとき，A が直交行列であるための必要十分条件は $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_n$ が $\mathbb{R}^n$ の正規直交基底となることである．

証明. 一般に $A = \begin{pmatrix} \boldsymbol{a}_1 & \boldsymbol{a}_2 & \cdots & \boldsymbol{a}_n \end{pmatrix}$ に対して

$${}^tAA = \begin{pmatrix} {}^t\boldsymbol{a}_1 \\ {}^t\boldsymbol{a}_2 \\ \vdots \\ {}^t\boldsymbol{a}_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{a}_1 & \boldsymbol{a}_2 & \cdots & \boldsymbol{a}_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_1) & (\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2) & \cdots & (\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_n) \\ (\boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_1) & (\boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_2) & \cdots & (\boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_n) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ (\boldsymbol{a}_n, \boldsymbol{a}_1) & (\boldsymbol{a}_n, \boldsymbol{a}_2) & \cdots & (\boldsymbol{a}_n, \boldsymbol{a}_n) \end{pmatrix}$$

となる．よって，積 ${}^tAA$ の (i,j) 成分は列ベクトルの内積 $(\boldsymbol{a}_i, \boldsymbol{a}_j)$ の値である．

ゆえに

$$\begin{aligned} {}^tAA = E_n \quad &\Longleftrightarrow \quad (\boldsymbol{a}_i, \boldsymbol{a}_j) = \delta_{ij} \qquad (i, j = 1, 2, \ldots, n) \\ &\Longleftrightarrow \quad \boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_n \text{ は } \mathbb{R}^n \text{ の正規直交系} \end{aligned}$$

が成り立つ．さらに，$\mathbb{R}^n$ は n 次元ベクトル空間だから，n 個のベクトル $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_n$ が正規直交系ならば，これらは 1 次独立なので正規直交基底である．したがって，${}^tAA = E_n$ であることと，$\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_n$ が $\mathbb{R}^n$ の正規直交基底であることは同値である． □

上の証明中の計算は最初はややわかりにくいかもしれない．具体的に 2 次正方行列の場合を書き下せば

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{a}_1 & \boldsymbol{a}_2 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{a}_1 = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{a}_2 = \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \end{pmatrix}$$

であり

$${}^tAA = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}^2 + a_{21}^2 & a_{11}a_{12} + a_{21}a_{22} \\ a_{12}a_{11} + a_{22}a_{21} & a_{12}^2 + a_{22}^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_1) & (\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2) \\ (\boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_1) & (\boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_2) \end{pmatrix}$$

となる．
また，回転行列

$$\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

については，確かに第 1 列ベクトルと第 2 列ベクトルはともに大きさ 1 で，これらは直交している．

もう一度まとめると，$A \in M_n(\mathbb{R})$ を $A = \begin{pmatrix} \boldsymbol{a}_1 & \boldsymbol{a}_2 & \cdots & \boldsymbol{a}_n \end{pmatrix}$ と列ベクトル分解するとき

$$\begin{aligned} A \text{ が正則} \quad &\Longleftrightarrow \quad \boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_n \text{ が } \mathbb{R}^n \text{ の基底} \\ A \text{ が直交行列} \quad &\Longleftrightarrow \quad \boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_n \text{ が } \mathbb{R}^n \text{ の正規直交基底} \end{aligned}$$

が成り立つ．

例題 5.6. 2 次の直交行列をすべて求めよ．

（解答） $A = \begin{pmatrix} \boldsymbol{a}_1 & \boldsymbol{a}_2 \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$ を 2 次の直交行列とする．このとき，定理 5.5 より A の列ベクトル $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2$ は $\mathbb{R}^2$ の正規直交基底である．よって，$\boldsymbol{a}_1$ は長さが 1 のベクトルなので

$$\boldsymbol{a}_1 = \begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{pmatrix}$$

と表せる．次に，$\boldsymbol{a}_2$ も長さが 1 で $\boldsymbol{a}_1$ に直交するから，$\boldsymbol{a}_2$ は

(1) $\boldsymbol{a}_1$ を 90° 回転したもの

(2) $\boldsymbol{a}_1$ を -90° 回転したもの

のいずれかである．

(1) $\boldsymbol{a}_2$ が $\boldsymbol{a}_1$ を 90° 回転したものの場合

$$\boldsymbol{a}_2 = R\left(\frac{\pi}{2}\right)\boldsymbol{a}_1 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sin\theta \\ \cos\theta \end{pmatrix}$$

より

$$A = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

となる．なお，このとき $\det A = 1$ で，角度 θ の回転行列である．

(2) $\boldsymbol{a}_2$ が $\boldsymbol{a}_1$ を -90° 回転したものの場合

$$\boldsymbol{a}_2 = R\left(-\frac{\pi}{2}\right)\boldsymbol{a}_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin\theta \\ -\cos\theta \end{pmatrix}$$

より

$$A = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

となる．なお，このとき $\det A = -1$ で，角度 θ の回転行列と反転の合成である．

（解答終）

この例題の結果より，2 次直交行列は昔は高校で習った回転行列，またはそれをさらに反転したものしかない．特に $\det A = 1$ となる直交行列は回転変換を表していることがわかる．

直交行列は列ベクトルが正規直交基底をなすことからもわかるように，座標軸の直交性を保ったまま空間全体を回転させるようなイメージである．上の例題で見たように反転（軸の順序の交換）が起こることはあるが，例えば図形の体積が変わるようなことはない．ただし，3 次直交行列による変換を決定することは 2 次と違ってそれほど簡単ではない．それは空間の回転において，まず回転軸を原点を通る空間直線から（傾いたものも）自由に選べるためである．

直交行列の固有値については次が成り立つ．

定理 5.7. （直交行列の固有値）
直交行列の固有値はすべて絶対値が 1 の複素数である．

証明はユニタリ行列の場合とまとめて定理 5.15 で扱う．

注意 5.8. A が直交行列であるとしても，固有値が実数かどうかはわからないことに注意すること．例えば，回転行列

$$R(\theta)=\begin{pmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}$$

は直交行列である．$R(\theta)$ の固有方程式は

$$F_{R(\theta)}(x)=\begin{vmatrix}x-\cos\theta & \sin\theta\\ -\sin\theta & x-\cos\theta\end{vmatrix}=(x-\cos\theta)^2+\sin^2\theta=x^2-(2\cos\theta)x+1=0$$

であり，この 2 次方程式の判別式 D は

$$D/4=\cos^2\theta-1\leqq 0$$

となる．よって，$\cos\theta\fallingdotseq\pm1$ なら $D<0$ となり，固有値 λ は絶対値が 1 の虚数となる．

この結果を幾何学的視点から解釈してみる．例えば

$$A=R(90^\circ)=\begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$$

とすれば，$\mathbf{0}$ でない平面ベクトル $\boldsymbol{v}\in\mathbb{R}^2$ に対して，$A\boldsymbol{v}$ とは $\boldsymbol{v}$ を 90° 回転させたものである．よって，$\boldsymbol{v}$ と $A\boldsymbol{v}$ が平行になることはない．そのため $A\boldsymbol{v}=k\boldsymbol{v}$ となる実数は存在しない．ゆえに A の固有値は虚数となる．実際に計算すれば A の固有値は $\pm\sqrt{-1}$ であることもわかる．同様の考察により，θ が π の整数倍でなければ $\boldsymbol{v}$ と $R(\theta)\boldsymbol{v}$ が平行になることはない．言い換えれば $\boldsymbol{v}$ と $R(\theta)\boldsymbol{v}$ が平行になるのは θ が π の整数倍のときのみで，これは $\cos\theta=\pm1$ に対応している．

なお，3 次直交行列に関しては必ず固有値として 1 か -1 をもつ．それは固有方程式が実数係数の 3 次方程式になるため，必ず実数解をもつからである．これは地球の自転を想像すればわかるように，空間の回転変換はある直線を軸として回転するから，その直線の方向ベクトルは直線上から動かないことを表している．

5.2 ユニタリ行列

次に行列の成分が複素数の場合を考える．特に断りがなければ，$\mathbb{C}^n$ には標準内積を与えるものとする．

$A = (a_{ij}) \in M_{m\times n}(\mathbb{C})$ に対して

$$\overline{A} = (\overline{a_{ij}})$$

とおく．つまり，$\overline{A}$ で A のすべての成分の共役をとったものとする．

定義 5.9. （随伴行列）
$A \in M_{m\times n}(\mathbb{C})$ に対して，$A^* = {}^t\overline{A}$ を A の**随伴行列**という．

例えば

$$\begin{pmatrix} 2-i & 3+i \\ 2+2i & 3 \end{pmatrix}^* = \begin{pmatrix} 2+i & 2-2i \\ 3-i & 3 \end{pmatrix}$$

となる．随伴行列の定義より，もし A の成分がすべて実数ならば，$A^* = {}^tA$ である．

定義 5.10. （ユニタリ行列）
$U \in M_n(\mathbb{C})$ が

$$UU^* = E_n$$

をみたすとき，U を**ユニタリ行列**という．

定義より成分がすべて実数であるユニタリ行列は直交行列である．また，U がユニタリ行列であることは $U^{-1} = U^*$ であることを定義としてもよい．具体的なユニタリ行列の例を挙げるには，直交行列の場合と同様に $\mathbb{C}^n$ の正規直交基底を並べればよいことを後で見る．他にも直交行列と同様に議論が進むので，複素共役を用いて証明のどこを修正すればよいかを考えながら読み進めること．

例題 5.11. ユニタリ行列に関する次の性質を示せ．

(1) U が n 次ユニタリ行列ならば，行列式 $\det U$ の絶対値は 1 である．

(2) U_1, U_2 が n 次ユニタリ行列ならば，積 U_1U_2 および逆行列 U_1^{-1} もユニタリ行列である．

（解答）

(1) 一般に $\det({}^tU) = \det U$ であるから，成分の共役をとれば

$$\det(U^*) = \overline{\det U}$$

が成り立つ．よって，U がユニタリ行列ならば $UU^* = E_n$ であるから，両辺の行列式を考えると

$$\det(UU^*) = (\det U)(\det U^*) = \det U \cdot \overline{\det U} = |\det U|^2 = 1$$

より，$|\det U| = 1$ が成り立つ．

(2)　U_1, U_2 がユニタリ行列なので，$U_1U_1^* = U_2U_2^* = E_n$ である．このとき，$A = U_1U_2$ とおけば

$$A^* = (U_1U_2)^* = U_2^*\,U_1^*$$

であるから

$$AA^* = (U_1U_2)(U_2^*\,U_1^*) = U_1E_nU_1^* = U_1U_1^* = E_n$$

が成り立つ．よって，$A = U_1U_2$ もユニタリ行列である．

また，U がユニタリ行列ならば，$U^* = U^{-1}$ であるから

$$U^{-1}(U^{-1})^* = U^{-1}(U^*)^{-1} = (U^*U)^{-1} = (E_n)^{-1} = E_n$$

より，U^{-1} もユニタリ行列である．

（解答終）

ユニタリ行列は $\mathbb{C}^n$ の標準内積と強い関係がある．言い換えれば複素計量ベクトル空間の内積とうまく対応した行列であることを示す．

例題 5.12. （内積と随伴行列）
$(\cdot,\cdot)$ を $\mathbb{C}^n$ の標準内積とする．任意の $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathbb{C}^n$, $A \in M_n(\mathbb{C})$ に対して

$$(A\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = (\boldsymbol{x}, A^*\boldsymbol{y})$$

が成り立つことを示せ．

（解答）　$\mathbb{C}^n$ の標準内積の定義 $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = {}^t\boldsymbol{x}\overline{\boldsymbol{y}}$ より，任意の $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathbb{C}^n$ に対して

$$(A\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = {}^t(A\boldsymbol{x})\overline{\boldsymbol{y}} = {}^t\boldsymbol{x}\,{}^tA\overline{\boldsymbol{y}} = {}^t\boldsymbol{x}\,\overline{\overline{{}^tA}\boldsymbol{y}} = {}^t\boldsymbol{x}\overline{A^*\boldsymbol{y}} = (\boldsymbol{x}, A^*\boldsymbol{y})$$

が成り立つ．

（解答終）

定理 5.13. （ユニタリ行列の内積保存性）
U が n 次ユニタリ行列ならば，すべての $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathbb{C}^n$ に対して

$$(U\boldsymbol{x}, U\boldsymbol{y}) = (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$$

が成り立つ．特に，$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{y}$ とすれば

$$\|U\boldsymbol{x}\| = \|\boldsymbol{x}\|$$

となるので，ユニタリ行列 U をかけてもベクトルの長さは変わらない．

証明．　ユニタリ行列の定義より $U^{-1} = U^*$ なので

$$(U\boldsymbol{x}, U\boldsymbol{y}) = (\boldsymbol{x}, U^*U\boldsymbol{y}) = (\boldsymbol{x}, E_n\boldsymbol{y}) = (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$$

が成り立つ．特に，$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{y}$ とすれば

$$(U\boldsymbol{x}, U\boldsymbol{x}) = (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x})$$

より $\|U\boldsymbol{x}\|^2 = \|\boldsymbol{x}\|^2$ となるので，$\|U\boldsymbol{x}\| = \|\boldsymbol{x}\|$ が成り立つ．したがって，$\boldsymbol{x}$ と $U\boldsymbol{x}$ は同じ長さである．　□

問題に応じて有用なユニタリ行列を構成する際には，次の定理が重要となる．

定理 5.14.（ユニタリ行列と正規直交基底の関係）
A を n 次正方行列とし，その列ベクトル分解を

$$A = \begin{pmatrix} \boldsymbol{a}_1 & \boldsymbol{a}_2 & \cdots & \boldsymbol{a}_n \end{pmatrix}$$

とする．このとき，A がユニタリ行列であるための必要十分条件は $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_n$ が $\mathbb{C}^n$ の正規直交基底となることである．

証明. 一般に $A = \begin{pmatrix} \boldsymbol{a}_1 & \boldsymbol{a}_2 & \cdots & \boldsymbol{a}_n \end{pmatrix}$ に対して

$$A^*A = \begin{pmatrix} \overline{{}^t\boldsymbol{a}_1} \\ \overline{{}^t\boldsymbol{a}_2} \\ \vdots \\ \overline{{}^t\boldsymbol{a}_n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{a}_1 & \boldsymbol{a}_2 & \cdots & \boldsymbol{a}_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \overline{(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_1)} & \overline{(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2)} & \cdots & \overline{(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_n)} \\ \overline{(\boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_1)} & \overline{(\boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_2)} & \cdots & \overline{(\boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_n)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \overline{(\boldsymbol{a}_n, \boldsymbol{a}_1)} & \overline{(\boldsymbol{a}_n, \boldsymbol{a}_2)} & \cdots & \overline{(\boldsymbol{a}_n, \boldsymbol{a}_n)} \end{pmatrix}$$

となる．よって，積 A^*A の (i, j) 成分は $\overline{(\boldsymbol{a}_i, \boldsymbol{a}_j)} = (\boldsymbol{a}_j, \boldsymbol{a}_i)$ である．

ゆえに

$$\begin{aligned} A^*A = E_n \quad &\Longleftrightarrow \quad (\boldsymbol{a}_j, \boldsymbol{a}_i) = \delta_{ij} \qquad (i, j = 1, 2, \ldots, n) \\ &\Longleftrightarrow \quad \boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_n \text{ は } \mathbb{C}^n \text{ の正規直交系} \end{aligned}$$

が成り立つ．さらに，$\mathbb{C}^n$ は n 次元複素ベクトル空間だから，n 個のベクトル $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_n$ が正規直交系ならば，これらは 1 次独立なので正規直交基底である．したがって，$A^*A = E_n$ であることと，$\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_n$ が $\mathbb{C}^n$ の正規直交基底であることは同値である． □

ユニタリ行列の固有値については次が成り立つ．

定理 5.15.（ユニタリ行列の固有値）
ユニタリ行列の固有値はすべて絶対値が 1 の複素数である．

証明. $U \in M_n(\mathbb{C})$ をユニタリ行列とする．$\lambda \in \mathbb{C}$ を U の固有値とし，$\boldsymbol{v} \in \mathbb{C}^n$ を λ に対する U の固有ベクトルとすると

$$\lambda\overline{\lambda}(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{v}) = (\lambda\boldsymbol{v}, \lambda\boldsymbol{v}) = (U\boldsymbol{v}, U\boldsymbol{v}) = (\boldsymbol{v}, U^*U\boldsymbol{v}) = (\boldsymbol{v}, \boldsymbol{v})$$

より，$(|\lambda|^2 - 1)\|\boldsymbol{v}\|^2 = 0$ が成り立つ．よって，$\boldsymbol{v} \neq \boldsymbol{0}$ より $|\lambda| = 1$ である． □

U が直交行列の場合には，$\overline{U} = U$ なので，上の証明で U^* の部分を ${}^tU$ とすれば同様である．固有値や固有ベクトルの成分が実数とは限らないことに注意すること．

6　行列の三角化

第 9 章定義 5.24 より，サイズが等しい 2 つの正方行列 A, B が共役であるとは

$$B = P^{-1}AP$$

となる正則行列 P が存在することであった．よって，行列 A の対角化とは A と共役な対角行列 $D = P^{-1}AP$ を求めることに相当している．

しかし第 10 章でみたように，すべての正方行列が対角化可能，つまり対角行列と共役であるというわけではない．そこで，別の簡単な形の共役な行列を探すことを考えてみる．実は対角化不可能な行列でも，上三角行列とは共役であることは示すことができ，さらに変換行列としてユニタリ行列（成分がすべて実数の範囲で考えるならば直交行列）を選ぶことができる．そのことを述べたのが次の定理である．ここで，上三角行列とは第 2 章定義 1.11 より

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & -7 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 1+i & 4 & -i \\ 0 & 2i & 0 \\ 0 & 0 & -4+3i \end{pmatrix}$$

のように対角成分より左下の成分がすべて 0 となる正方行列のことであった．対角成分および対角成分より右上の成分は何でもよい（別に 0 でも構わない）．

定理 6.1.（行列の三角化可能定理）
$A \in M_n(\mathbb{C})$ とすると，ある n 次ユニタリー行列 U で $U^{-1}AU$ が上三角行列となるものが存在する．さらに，$A \in M_n(\mathbb{R})$ でその固有値がすべて実数ならば，変換行列 U として直交行列がとれる．

証明.　正方行列 A の次数 n に関する帰納法で証明する．

(i) $n = 1$ のときは既に上三角行列であるから $U = E_1$ でよい．

(ii) $n = k-1$ $(k \geqq 2)$ のときに主張が正しいと仮定する．

$n = k$ のときを考えるため，$A \in M_k(\mathbb{C})$ とする．A の固有値 $\lambda \in \mathbb{C}$ を 1 つとる．さらに，固有値 λ に対する長さが 1 の固有ベクトルを 1 つとり，それを $\boldsymbol{u}_1 \in \mathbb{C}^k$ とおく．このとき，$\boldsymbol{u}_1$ を延長して $\mathbb{C}^k$ の基底 $\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_k$ をとり，さらにそれにグラム・シュミットの直交化法を適用することで $\mathbb{C}^k$ の正規直交基底 $\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \ldots, \boldsymbol{u}_k$ をつくる．このとき，正規直交行列を並べた

$$U_1 = \begin{pmatrix} \boldsymbol{u}_1 & \boldsymbol{u}_2 & \cdots & \boldsymbol{u}_k \end{pmatrix}$$

は k 次ユニタリ行列であり

$$\begin{aligned} AU_1 &= \begin{pmatrix} A\boldsymbol{u}_1 & A\boldsymbol{u}_2 & \cdots & A\boldsymbol{u}_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda\boldsymbol{u}_1 & A\boldsymbol{u}_2 & \cdots & A\boldsymbol{u}_k \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \boldsymbol{u}_1 & \boldsymbol{u}_2 & \cdots & \boldsymbol{u}_k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda & * & \cdots & * \\ 0 & * & \cdots & * \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & * & \cdots & * \end{pmatrix} \end{aligned}$$

より

$$U_1^{-1}AU_1 = \left(\begin{array}{c|ccc} \lambda & * & \cdots & * \\ \hline 0 & & & \\ \vdots & & A' & \\ 0 & & & \end{array}\right)$$

とブロック分けされた形で表せる．ただし，A' は $k-1$ 次正方行列で，成分が具体的に必要のない部分は $*$ で表した．

ここで帰納法の仮定より，$k-1$ 次正方行列 A' に対して，$k-1$ 次ユニタリ行列 U_2' で

$$R' = {U_2'}^{-1} A' U_2'$$

が上三角行列となるものが存在する．そこで

$$U_2 = \left(\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \hline 0 & & & \\ \vdots & & U_2' & \\ 0 & & & \end{array}\right)$$

とおけば，これは $U_2 U_2^* = E_k$ をみたすから k 次ユニタリ行列である．さらに

$$U = U_1 U_2$$

とおくと，例題 5.11(2) より U もユニタリ行列で

$$\begin{aligned} U^{-1}AU &= U_2^{-1}(U_1^{-1}AU_1)U_2 \\ &= \left(\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \hline 0 & & & \\ \vdots & & {U_2'}^{-1} & \\ 0 & & & \end{array}\right) \left(\begin{array}{c|ccc} \lambda & * & \cdots & * \\ \hline 0 & & & \\ \vdots & & A_1 & \\ 0 & & & \end{array}\right) \left(\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \hline 0 & & & \\ \vdots & & U_2' & \\ 0 & & & \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|ccc} \lambda & * & \cdots & * \\ \hline 0 & & & \\ \vdots & & R' & \\ 0 & & & \end{array}\right) \end{aligned}$$

となる．R' は $k-1$ 次上三角行列だから，$U^{-1}AU$ は k 次上三角行列である．

(iii) (i), (ii) よりすべての自然数 n に対して定理の主張は成り立つ．

もし $A \in M_n(\mathbb{R})$ でその固有値がすべて実数ならば，上の証明において $\lambda \in \mathbb{R}$, $\boldsymbol{u}_1 \in \mathbb{R}^k$ とできるから，$\mathbb{C}^k$ のかわりに $\mathbb{R}^k$ の正規直交基底を構成とすることで U_1 の成分をすべて実数にとれる．よって，変換行列 U を直交行列とすることができる． □

定理 6.1 よりすべての正方行列 A に対して，ユニタリ行列 U と上三角行列 $U^{-1}AU$ を求めることを A の**上三角化**という．このとき

$$U^{-1}AU = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & * \\ & \ddots & \\ O & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

の両辺の固有多項式を考えると，左辺は第 10 章定理 1.11 より

$$F_{U^{-1}AU}(x) = F_A(x)$$

であり，右辺は

$$\begin{vmatrix} x-\lambda_1 & & * \\ & \ddots & \\ O & & x-\lambda_n \end{vmatrix} = (x-\lambda_1)(x-\lambda_2)\cdots(x-\lambda_n)$$

であるから

$$F_A(x) = (x-\lambda_1)(x-\lambda_2)\cdots(x-\lambda_n)$$

が成り立つ．よって，上三角行列 $U^{-1}AU$ の対角成分には A の n 個の固有値が並んでいることがわかる．

具体的に与えられた行列を三角化するには，定理 6.1 の証明をなぞればよい．ただし対角化の場合と同様に，変換行列 P や上三角行列 $P^{-1}AP$ は一通りだけではない．人によって解答は異なるので注意すること．

例題 6.2.　行列 $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 6 & -2 \end{pmatrix}$ を直交行列で上三角化せよ．

（解答）　A の固有方程式は

$$F_A(x) = \begin{vmatrix} x-3 & -1 \\ -6 & x+2 \end{vmatrix} = x^2 - x - 12 = (x-4)(x+3) = 0$$

より，A の固有値は $\lambda = 4, -3$ である．固有値がすべて実数なので，直交行列で上三角化可能である．

固有値 $\lambda = 4$ に対する固有ベクトルを求める．これは方程式 $(A - 4E_2)\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ の非自明な解であり，係数行列を簡約階段行列に行基本変形すれば

$$A - 4E_2 = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 6 & -6 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 1 行を } (-1) \text{ 倍}]{(1,1) \text{ 成分による第 1 列の掃き出し}} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

より，解は

$$\boldsymbol{x} = t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad (t \in \mathbb{R})$$

と表せる．そこで，固有値 4 に対する長さ 1 の固有ベクトルとして $\boldsymbol{p}_1 = \dfrac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ がとれる．

次に $\boldsymbol{p}_1$ と直交して長さが 1 のベクトルとして

$$\boldsymbol{p}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

とおけば，$\boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{p}_2$ は $\mathbb{R}^2$ の正規直交基底となる．そこで

$$P = (\boldsymbol{p}_1 \quad \boldsymbol{p}_2) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

とおけば，P は直交行列であり

$$P^{-1}AP = {}^tPAP = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 6 & -2 \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -5 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}$$

と上三角化できる．

（解答終）

この例題の行列は対角化可能であるが，対角化の変換行列 P として直交行列を選ぶことはできない．それは固有値 4 に対する固有ベクトルと固有値 -3 に対する固有ベクトルが直交しないため，固有ベクトルを並べても直交行列とはならないからである（固有ベクトルを並べれば $\mathbb{R}^2$ の基底なので正則行列にはなる）．ここでは変換行列が直交行列に限定されているため，対角化ではなく上三角化となっている．

なお，もし $\boldsymbol{p}_1$ と直交する長さ 1 のベクトルを $\boldsymbol{p}_2 = \dfrac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ と選べば

$$P = (\boldsymbol{p}_1 \quad \boldsymbol{p}_2) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \qquad P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}$$

となり，これも正解である．また，$\boldsymbol{p}_1$ として固有値 -3 に対する固有ベクトルを正規化したものとしてもよい．このように対角成分より右上の成分については計算法によって異なるものが現れる．

例題 6.3.　行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$ を直交行列で上三角化せよ．

（解答）　A の固有方程式は

$$F_A(x) = \begin{vmatrix} x-1 & -1 \\ 1 & x-3 \end{vmatrix} = x^2 - 4x + 4 = (x-2)^2 = 0$$

より，A の固有値は $\lambda = 2, 2$ である．固有値がすべて実数なので，直交行列で上三角化可能である．

固有値 $\lambda = 2$ に対する固有ベクトルを求める．これは方程式 $(A - 2E_2)\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ の非自明な解であり，係数行列を簡約階段行列に行基本変形すれば

$$A - 2E_2 = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 1 行を } (-1) \text{ 倍}]{\text{(1,1) 成分による第 1 列の掃き出し}} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

より，解は

$$\boldsymbol{x} = t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad (t \in \mathbb{R})$$

と表せる．そこで，固有値 2 に対する長さ 1 の固有ベクトルとして $\boldsymbol{p}_1 = \dfrac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ がとれる．

次に $\boldsymbol{p}_1$ と直交して長さが 1 のベクトルとして

$$\boldsymbol{p}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

とおけば，$\boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{p}_2$ は $\mathbb{R}^2$ の正規直交基底となる．そこで

$$P = \begin{pmatrix} \boldsymbol{p}_1 & \boldsymbol{p}_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

とおけば，P は直交行列であり

$$P^{-1}AP = {}^tPAP = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

と上三角化できる．

（解答終）

この例題の行列は対角化不可能である．このような場合でも，直交行列により上三角化はできる．

第 12 章　実対称行列の対角化と 2 次形式

1　実対称行列の直交行列による対角化

1.1　実対称行列の固有値・固有ベクトル

この章では成分がすべて実数の対称行列に関する理論を扱う．ここで，正方行列 A が対称行列であるとは，第 2 章定義 6.8 より ${}^tA = A$ となることであった．

定義 1.1.（実対称行列）
実数を成分にもつ正方行列 A が対称行列である，つまり

$${}^tA = A$$

をみたすとき，A を**実対称行列**という．

実対称行列の固有値と固有ベクトルについては，非常に重要な性質がある．

定理 1.2.（実対称行列の固有値）
A を n 次実対称行列とする．このとき，A の n 個の固有値はすべて実数である．

証明.　$\lambda \in \mathbb{C}$ を A の固有値とし，$\boldsymbol{v} \in \mathbb{C}^n$ を λ に対する A の固有ベクトルとする（この時点では固有値や固有ベクトルの成分が実数かはわからない）．このとき，$\mathbb{C}^n$ の標準内積を考えると，$A^* = {}^tA = A$ なので

$$\lambda(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{v}) = (\lambda\boldsymbol{v}, \boldsymbol{v}) = (A\boldsymbol{v}, \boldsymbol{v}) = (\boldsymbol{v}, A^*\boldsymbol{v}) = (\boldsymbol{v}, A\boldsymbol{v}) = (\boldsymbol{v}, \lambda\boldsymbol{v}) = \overline{\lambda}(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{v})$$

より，$(\lambda - \overline{\lambda})\|\boldsymbol{v}\|^2 = 0$ が成り立つ．$\boldsymbol{v} \neq \boldsymbol{0}$ より $\lambda - \overline{\lambda} = 0$ となるので，λ は実数である．　□

注意 1.3.　行列 A の成分がすべて実数であることと A の固有値が実数であることには一般に関係性はない．第 11 章注意 5.8 で挙げた例を繰り返せば

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

については，固有方程式を解けば

$$\det(xE - A) = \begin{vmatrix} x & 1 \\ -1 & x \end{vmatrix} = x^2 + 1 = 0$$

より，固有値は $\lambda = \pm\sqrt{-1}$ となり実数ではない．これは図形的には当たり前のことで，A は 90° の回転行列だから，平面ベクトル $\boldsymbol{v}$ を A で変換した $A\boldsymbol{v}$ が $\boldsymbol{v}$ と平行になることはない．よって，$A\boldsymbol{v} = k\boldsymbol{v}$ となる実数は存在しないので，固有値で実数となるものはない．一般的には，実数係数の 2 次方程式でも判別式が負なら虚数解が現れるからと説明できる．

そのため，普通は固有値を複素数の範囲で考える必要があるが，実対称行列の場合にはその心配が不要であることを保証するのが定理 1.2 である．この『実対称行列の固有値は常に実数である』事実は様々な局面で効いている．例えば，統計学で主成分分析を行う際に，分散共分散行列と呼ばれる実対称行列の固有値が分散と対応している．もし固有値が実数という保証がなければ，分散が虚数となりうるので理論として意味をなさない．

定理 1.4. （実対称行列の固有ベクトルの直交性）
A を n 次実対称行列とする．λ と μ を A の異なる固有値とし，$\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^n$ をそれぞれ λ, μ に対する A の固有ベクトルとすれば，$\boldsymbol{x}$ と $\boldsymbol{y}$ は（標準内積について）直交する．

証明. 内積 $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ が 0 となることを示せばよい．ここで，仮定より

$$A\boldsymbol{x} = \lambda\boldsymbol{x}, \qquad A\boldsymbol{y} = \mu\boldsymbol{y}$$

であるから

$$\lambda(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = (\lambda\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = (A\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = (\boldsymbol{x}, {}^tA\boldsymbol{y}) = (\boldsymbol{x}, A\boldsymbol{y}) = (\boldsymbol{x}, \mu\boldsymbol{y}) = \mu(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$$

となり

$$(\lambda - \mu)(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = 0$$

が成り立つ．よって，$\lambda \fallingdotseq \mu$ であるから $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = 0$ が得られるので，$\boldsymbol{x}$ と $\boldsymbol{y}$ は直交する． □

注意 1.5. 既に実対称行列の固有値は実数であることを示したので，固有ベクトルの成分も実数とすることができる．そのため，証明において複素共役などを考える必要はない．

また，第 10 章定理 1.12 より，一般には A の異なる固有値の固有ベクトルについて 1 次独立であることしかわからない．例えば

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 8 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}$$

について，固有値は $\lambda = 7, -5$ で

- $\lambda = 7$ に対する固有ベクトルは $\boldsymbol{v}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$
- $\lambda = -5$ に対する固有ベクトルは $\boldsymbol{v}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

となる．$\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2$ は 1 次独立だが，直交はしていない．このように普段は固有ベクトルが直交するとは限らないが， 実対称行列ならば必ず直交しているというのは非常に強い結果である．

実際に例を考えてみると，実対称行列

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

の固有値は $\lambda = 3, -1$ で

- $\lambda = 3$ に対する固有ベクトルは $\boldsymbol{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$
- $\lambda = -1$ に対する固有ベクトルは $\boldsymbol{v}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

となる．$\boldsymbol{v}_1$ と $\boldsymbol{v}_2$ は確かに直交している．

第 10 章における 1 つの重要なテーマは行列が対角化可能であるための条件であった．特に，実対称行列については次の定理が成り立つ．

定理 1.6. （実対称行列の直交行列による対角化可能性）
実対称行列 A は常に対角化可能である．さらに $P^{-1}AP$ が対角行列となるような変換行列 P として直交行列を選ぶことができる．

証明. A を実対称行列とすると，定理 1.2 より A の固有値はすべて実数である．よって，第 11 章定理 6.1 より直交行列で三角化可能だから，ある直交行列 P を用いて

$$B = P^{-1}AP = {}^t\!PAP$$

が上三角行列となるようにできる．

ここで，転置行列の性質と ${}^t\!A = A$ より

$${}^t\!B = {}^t({}^t\!PAP) = {}^t\!P\,{}^t\!A\,{}^t({}^t\!P) = {}^t\!PAP = B$$

であるから，B は対称行列である．ゆえに，B は上三角行列かつ対称行列なので，対角成分以外は 0 となるから対角行列である．したがって，実対称行列 A は直交行列 P により対角化できる．□

一見するとどこか不思議な証明だが，この定理により実対称行列はいつも直交行列を用いて対角化可能であることになる．

なお，もし行列 A の固有値がすべて実数で，さらに直交行列で対角化可能であるとする．このとき，A は実対称行列となる．実際，ある直交行列 P により

$$D = P^{-1}AP = {}^t\!PAP$$

と対角化すれば

$$A = PD\,{}^t\!P$$

と表せる．対角行列 D および直交行列 P は成分がすべて実数なので A の成分もすべて実数で

$${}^t\!A = {}^t(PD\,{}^t\!P) = {}^t({}^t\!P)\,{}^t\!D\,{}^t\!P = PD\,{}^t\!P = A$$

が成り立つ．よって，A は実対称行列である．

このように，どのような正方行列も直交行列で対角化できるというわけではない．少なくとも固有値がすべて実数ならば直交行列で対角化可能なのは実対称行列の場合のみである．実対称行列ではない場合でも直交行列で対角化しようとしないように注意すること．

1.2　実対称行列の直交行列による対角化の計算例

具体的に与えられた実対称行列 A を直交行列で対角化するためには，通常の対角化と同様に A の固有値と固有空間の基底をすべて求め，さらに各固有空間の基底にグラム・シュミットの直交化法を適用し正規直交基底を構成すればよい．各固有空間の正規直交基底を並べて行列 P をつくれば，P は直交行列であり，$P^{-1}AP$ は固有値が対角成分に並んだ対角行列となる．

例題 1.7.　次の実対称行列を直交行列を用いて対角化せよ．

$$A = \begin{pmatrix} 7 & 6 \\ 6 & -2 \end{pmatrix}$$

（解答）　A の固有方程式は

$$F_A(x) = \begin{vmatrix} x-7 & -6 \\ -6 & x+2 \end{vmatrix} = x^2 - 5x - 50 = (x-10)(x+5) = 0$$

より，A の固有値は $\lambda = 10, -5$ である．

固有値 $\lambda = 10$ に対する固有空間 $V(10)$ を求める．これは方程式 $(A - 10E_2)\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ の解空間であり

$$A - 10E_2 = \begin{pmatrix} -3 & 6 \\ 6 & -12 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 1 行を } (-1/3) \text{ 倍}]{(1,1) \text{ 成分による第 1 列の掃き出し}} \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

より，$V(10)$ の基底として $\boldsymbol{v}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ がとれるから，正規直交基底は $\boldsymbol{p}_1 = \dfrac{\boldsymbol{v}_1}{\|\boldsymbol{v}_1\|} = \dfrac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ である．

固有値 $\lambda = -5$ に対する固有空間 $V(-5)$ を求める．これは方程式 $(A + 5E_2)\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ の解空間であり

$$A + 5E_2 = \begin{pmatrix} 12 & 6 \\ 6 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 1 行を } 1/12 \text{ 倍}]{(1,1) \text{ 成分による第 1 列の掃き出し}} \begin{pmatrix} 1 & 1/2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

より，$V(-5)$ の基底として $\boldsymbol{v}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ がとれるから，正規直交基底は $\boldsymbol{p}_2 = \dfrac{\boldsymbol{v}_2}{\|\boldsymbol{v}_2\|} = \dfrac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ である．

このとき，A は実対称行列なので異なる固有値に対する固有ベクトルは直交するから，$\boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{p}_2$ は $\mathbb{R}^2$ の正規直交基底である．よって

$$P = \begin{pmatrix} \boldsymbol{p}_1 & \boldsymbol{p}_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

とおけば，P は直交行列で

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 10 & 0 \\ 0 & -5 \end{pmatrix}$$

と対角化できる．

（解答終）

固有空間の次元が 1 ならば，基底を正規化するだけで正規直交基底が得られる．固有空間の次元が 2 以上の場合には，基底にグラム・シュミットの直交化法を適用して正規直交基底を求めることになる．

例題 1.8. 次の実対称行列を直交行列を用いて対角化せよ.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

（解答） A の固有方程式は

$$F_A(x) = \begin{vmatrix} x-2 & -1 & -1 \\ -1 & x-2 & -1 \\ -1 & -1 & x-2 \end{vmatrix} = x^3 - 6x^2 + 9x - 4 = (x-1)^2(x-4) = 0$$

より，A の固有値は $\lambda = 1, 1, 4$ である.

固有値 $\lambda = 1$ に対する固有空間 $V(1)$ を求める．これは方程式 $(A - E_3)\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ の解空間であり

$$A - E_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 1 列の掃き出し}]{\text{(1,1) 成分による}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

より，解は

$$\boldsymbol{x} = s \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad (s, t \in \mathbb{R})$$

と表せる．よって，$V(1)$ の基底として $\boldsymbol{v}_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$，$\boldsymbol{v}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ がとれる.

$\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2$ からグラム・シュミットの直交化法により，$V(1)$ の正規直交基底を構成する.

$$\boldsymbol{w}_1 = \boldsymbol{v}_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{w}_2 = \boldsymbol{v}_2 - \frac{(\boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{w}_1)}{(\boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{w}_1)} \boldsymbol{w}_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

より

$$\boldsymbol{p}_1 = \frac{\boldsymbol{w}_1}{\|\boldsymbol{w}_1\|} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{p}_2 = \frac{\boldsymbol{w}_2}{\|\boldsymbol{w}_2\|} = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

は $V(1)$ の正規直交基底である.

固有値 $\lambda = 4$ に対する固有空間 $V(4)$ を求める．これは方程式 $(A - 4E_3)\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ の解空間であり

$$A - 4E_3 = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 1 列の掃き出し}]{\text{(2,1) 成分による}} \begin{pmatrix} 0 & -3 & 3 \\ 1 & -2 & 1 \\ 0 & 3 & -3 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{行基本変形}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

より，$V(4)$ の基底として $\boldsymbol{v}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ がとれるから，正規直交基底は $\boldsymbol{p}_3 = \dfrac{\boldsymbol{v}_3}{\|\boldsymbol{v}_3\|} = \dfrac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ である.

このとき，A は実対称行列なので異なる固有値に対する固有ベクトルは直交するから，$\boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{p}_2, \boldsymbol{p}_3$ は $\mathbb{R}^3$ の正規直交基底である．よって

$$P = \begin{pmatrix} \boldsymbol{p}_1 & \boldsymbol{p}_2 & \boldsymbol{p}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}$$

とおくと，P は直交行列で

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

と対角化できる．

（解答終）

このように実対称行列の直交行列による対角化は計算が煩雑になることが多い．固有値・固有空間の計算に加えてグラム・シュミットの直交化法も必要なため，適宜検算をしながら計算を進めるのがよい．当然ながら固有空間の正規直交基底の選び方は一通りではないので，解答は人によって異なる．自習で答え合わせをする場合には注意すること．例えば，$V(1)$ の正規直交基底を求める際に

$$\boldsymbol{v}_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{v}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

と番号をつけてグラム・シュミットの直交化法を適用すれば，直交行列 P は解答例とは別のものとなる．そのため，検算の際には変換行列 P について

- 列ベクトルが固有ベクトルとなっているか（実際に A にかけてみる）
- 列ベクトルの長さが 1 か
- 列ベクトルが互いに直交しているか

を確認すること．

また，実対称行列は必ず対角化できるので，固有値の重複度と固有空間の次元はすべての固有値について等しくなる．この点に注意しながら計算すればミスに気付きやすいので，先を見通しながら計算をすること．

例題 1.9.　次の実対称行列を直交行列 P を用いて対角化せよ．

(1) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}$　　(2) $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

（解答）

(1)　A の固有方程式は

$$F_A(x) = \begin{vmatrix} x-1 & -2 & 0 \\ -2 & x-2 & -2 \\ 0 & -2 & x-3 \end{vmatrix} = x^3 - 6x^2 + 3x + 10 = (x-2)(x-5)(x+1) = 0$$

より，A の固有値は $\lambda = 2, 5, -1$ である．

固有値 $\lambda = 2$ に対する固有空間 $V(2)$ を求める．これは方程式 $(A - 2E_3)\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ の解空間であり

$$A - 2E_3 = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 1 列の掃き出し}]{\text{(1,1) 成分による}} \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 0 & 4 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{行基本変形}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

より，$V(2)$ の基底として $\boldsymbol{v}_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ がとれ，正規直交基底は $\boldsymbol{p}_1 = \dfrac{\boldsymbol{v}_1}{\|\boldsymbol{v}_1\|} = \dfrac{1}{3}\begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ である．

固有値 $\lambda = 5$ に対する固有空間 $V(5)$ を求める．これは方程式 $(A - 5E_3)\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ の解空間であり

$$A - 5E_3 = \begin{pmatrix} -4 & 2 & 0 \\ 2 & -3 & 2 \\ 0 & 2 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 1 列の掃き出し}]{\text{(2,1) 成分による}} \begin{pmatrix} 0 & -4 & 4 \\ 2 & -3 & 2 \\ 0 & 2 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{行基本変形}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1/2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

より，$V(5)$ の基底として $\boldsymbol{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$ がとれ，正規直交基底は $\boldsymbol{p}_2 = \dfrac{\boldsymbol{v}_2}{\|\boldsymbol{v}_2\|} = \dfrac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$ である．

固有値 $\lambda = -1$ に対する固有空間 $V(-1)$ を求める．これは方程式 $(A + E_3)\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ の解空間であり

$$A + E_3 = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 1 列の掃き出し}]{\text{(1,1) 成分による}} \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{行基本変形}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

より，$V(-1)$ の基底として $\boldsymbol{v}_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ がとれ，正規直交基底は $\boldsymbol{p}_3 = \dfrac{\boldsymbol{v}_3}{\|\boldsymbol{v}_3\|} = \dfrac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ である．

このとき，A は実対称行列なので異なる固有値に対する固有ベクトルは直交するから，$\boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{p}_2, \boldsymbol{p}_3$ は $\mathbb{R}^3$ の正規直交基底である．よって

$$P = \begin{pmatrix} \boldsymbol{p}_1 & \boldsymbol{p}_2 & \boldsymbol{p}_3 \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -2 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & -2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

とおくと，P は直交行列で

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

と対角化できる．

(2)　A の固有方程式は

$$F_A(x) = \begin{vmatrix} x & -1 & 1 \\ -1 & x & -1 \\ 1 & -1 & x \end{vmatrix} = x^3 - 3x + 2 = (x-1)^2(x+2) = 0$$

より，A の固有値は $\lambda = 1, 1, -2$ である．

固有値 $\lambda = 1$ に対する固有空間 $V(1)$ を求める．これは方程式 $(A - E_3)\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ の解空間であり

$$A - E_3 = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 1 行を } (-1) \text{ 倍}]{(1,1) \text{ 成分による第 1 列の掃き出し}} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

より，解は

$$\boldsymbol{x} = s \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad (s, t \in \mathbb{R})$$

と表せる．よって，$V(1)$ の基底として $\boldsymbol{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$，$\boldsymbol{v}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ がとれる．

$\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2$ からグラム・シュミットの直交化法により，$V(1)$ の正規直交基底を構成する．

$$\boldsymbol{w}_1 = \boldsymbol{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{w}_2 = \boldsymbol{v}_2 - \frac{(\boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{w}_1)}{(\boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{w}_1)} \boldsymbol{w}_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{-1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

より

$$\boldsymbol{p}_1 = \frac{\boldsymbol{w}_1}{\|\boldsymbol{w}_1\|} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{p}_2 = \frac{\boldsymbol{w}_2}{\|\boldsymbol{w}_2\|} = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

は $V(1)$ の正規直交基底である．

固有値 $\lambda = -2$ に対する固有空間 $V(-2)$ を求める．これは方程式 $(A + 2E_3)\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ の解空間であり

$$A + 2E_3 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 1 列の掃き出し}]{(2,1) \text{ 成分による}} \begin{pmatrix} 0 & -3 & -3 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{行基本変形}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

より，$V(-2)$ の基底として $\boldsymbol{v}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ がとれ，正規直交基底は $\boldsymbol{p}_3 = \dfrac{\boldsymbol{v}_3}{\|\boldsymbol{v}_3\|} = \dfrac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ である．

このとき，A は実対称行列なので異なる固有値に対する固有ベクトルは直交するから，$\boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{p}_2, \boldsymbol{p}_3$ は $\mathbb{R}^3$ の正規直交基底である．よって

$$P = \begin{pmatrix} \boldsymbol{p}_1 & \boldsymbol{p}_2 & \boldsymbol{p}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}$$

とおくと，P は直交行列で

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

と対角化できる．

（解答終）

例題 1.10.　次の実対称行列を直交行列 P を用いて対角化せよ．

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

（解答）　A の固有方程式は，第 1 列と第 2 列を掃き出せば

$$F_A(x) = \begin{vmatrix} x & 0 & 0 & -1 \\ 0 & x & -1 & 0 \\ 0 & -1 & x & 0 \\ -1 & 0 & 0 & x \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & -1+x^2 \\ 0 & 0 & -1+x^2 & 0 \\ 0 & -1 & x & 0 \\ -1 & 0 & 0 & x \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} x^2-1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & x^2-1 & 0 & 0 \\ 0 & x & -1 & 0 \\ x & 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} = (x^2-1)^2(-1)^2 = (x-1)^2(x+1)^2 = 0$$

より，A の固有値は $\lambda = 1, 1, -1, -1$ である．

固有値 $\lambda = 1$ に対する固有空間 $V(1)$ を求める．これは方程式 $(A - E_4)\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$ の解空間であり

$$A - E_4 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{行基本変形}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

より，解は

$$\boldsymbol{x} = s\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad (s, t \in \mathbb{R})$$

と表せる．よって，$V(1)$ の基底として $\boldsymbol{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$，$\boldsymbol{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ がとれる．$\boldsymbol{v}_1$ と $\boldsymbol{v}_2$ は直交しているから

$$\boldsymbol{p}_1 = \frac{\boldsymbol{v}_1}{\|\boldsymbol{v}_1\|} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{p}_2 = \frac{\boldsymbol{v}_2}{\|\boldsymbol{v}_2\|} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

は $V(1)$ の正規直交基底である．

固有値 $\lambda = -1$ に対する固有空間 $V(-1)$ を求める．これは方程式 $(A + E_4)\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$ の解空間であり

$$A + E_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{行基本変形}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

より，解は

$$\boldsymbol{x} = s\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad (s, t \in \mathbb{R})$$

と表せる．よって，$V(-1)$ の基底として $\boldsymbol{v}_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$，$\boldsymbol{v}_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ がとれる．$\boldsymbol{v}_3$ と $\boldsymbol{v}_4$ は直交しているから

$$\boldsymbol{p}_3 = \frac{\boldsymbol{v}_3}{\|\boldsymbol{v}_3\|} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{p}_4 = \frac{\boldsymbol{v}_4}{\|\boldsymbol{v}_4\|} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

は $V(-1)$ の正規直交基底である．

このとき，A は実対称行列なので異なる固有値に対する固有ベクトルは直交するから，$\boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{p}_2, \boldsymbol{p}_3, \boldsymbol{p}_4$ は $\mathbb{R}^4$ の正規直交基底である．よって

$$P = \begin{pmatrix} \boldsymbol{p}_1 & \boldsymbol{p}_2 & \boldsymbol{p}_3 & \boldsymbol{p}_4 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

とおくと，P は直交行列で

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

と対角化できる．

（解答終）

固有空間の基底を求めたときに既にそれらが直交していれば，正規化するだけで正規直交基底が得られる．慣れてくれば最初から直交するように固有空間の基底を見つけられることもあるが，基本的には解空間の基底を自然に求めてからグラム・シュミットの直交化法を適用する方が確実である．

例題 1.11.　次の実対称行列を直交行列 P を用いて対角化せよ．

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

（解答）　A の固有方程式は，第 2 列から第 4 列をすべて第 1 列に加えれば

$$F_A(x) = \begin{vmatrix} x-3 & -2 & -2 & -2 \\ -2 & x-3 & -2 & -2 \\ -2 & -2 & x-3 & -2 \\ -2 & -2 & -2 & x-3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x-9 & -2 & -2 & -2 \\ x-9 & x-3 & -2 & -2 \\ x-9 & -2 & x-3 & -2 \\ x-9 & -2 & -2 & x-3 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} x-9 & -2 & -2 & -2 \\ 0 & x-1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x-1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & x-1 \end{vmatrix} = (x-9)(x-1)^3 = 0$$

より，A の固有値は $\lambda = 1, 1, 1, 9$ である．

固有値 $\lambda = 1$ に対する固有空間 $V(1)$ を求める．これは方程式 $(A - E_4)\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ の解空間であり

$$A - E_4 = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 1 行を 1/2 倍}]{\text{(1,1) 成分による第 1 列の掃き出し}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

より，解は

$$\boldsymbol{x} = s \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + u \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad (s, t, u \in \mathbb{R})$$

と表せる．よって，$V(1)$ の基底として $\boldsymbol{v}_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$，$\boldsymbol{v}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$，$\boldsymbol{v}_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ がとれる．

$\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3$ からグラム・シュミットの直交化法により，$V(1)$ の正規直交基底を構成する．

$$\boldsymbol{w}_1 = \boldsymbol{v}_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{w}_2 = \boldsymbol{v}_2 - \frac{(\boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{w}_1)}{(\boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{w}_1)} \boldsymbol{w}_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{w}_3 = \boldsymbol{v}_3 - \frac{(\boldsymbol{v}_3, \boldsymbol{w}_1)}{(\boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{w}_1)} \boldsymbol{w}_1 - \frac{(\boldsymbol{v}_3, \boldsymbol{w}_2)}{(\boldsymbol{w}_2, \boldsymbol{w}_2)} \boldsymbol{w}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{1/2}{3/2} \cdot \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

より

$$\boldsymbol{p}_1 = \frac{\boldsymbol{w}_1}{\|\boldsymbol{w}_1\|} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}-1\\1\\0\\0\end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{p}_2 = \frac{\boldsymbol{w}_2}{\|\boldsymbol{w}_2\|} = \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix}-1\\-1\\2\\0\end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{p}_3 = \frac{\boldsymbol{w}_3}{\|\boldsymbol{w}_3\|} = \frac{1}{2\sqrt{3}}\begin{pmatrix}-1\\-1\\-1\\3\end{pmatrix}$$

は $V(1)$ の正規直交基底である．

固有値 $\lambda = 9$ に対する固有空間 $V(9)$ を求める．これは方程式 $(A-9E_4)\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ の解空間であり

$$A - 9E_4 = \begin{pmatrix}-6&2&2&2\\2&-6&2&2\\2&2&-6&2\\2&2&2&-6\end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 1 列の掃き出し}]{\text{(2,1) 成分による}} \begin{pmatrix}0&-16&8&8\\2&-6&2&2\\0&-8&8&0\\0&8&0&-8\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[\text{第 3 行を } (-1/8) \text{ 倍}]{\text{第 2 行を } 1/2 \text{ 倍}} \begin{pmatrix}0&-16&8&8\\1&-3&1&1\\0&1&-1&0\\0&8&0&-8\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[\text{第 2 列の掃き出し}]{\text{(3,2) 成分による}} \begin{pmatrix}0&0&-8&8\\1&0&-2&1\\0&1&-1&0\\0&0&8&-8\end{pmatrix} \xrightarrow{\text{行基本変形}} \begin{pmatrix}1&0&0&-1\\0&1&0&-1\\0&0&1&-1\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

より，$V(9)$ の基底として $\boldsymbol{v}_4 = \begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}$ がとれるから，正規直交基底は $\boldsymbol{p}_4 = \dfrac{\boldsymbol{v}_4}{\|\boldsymbol{v}_4\|} = \dfrac{1}{2}\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}$ である．

このとき，A は実対称行列なので異なる固有値に対する固有ベクトルは直交するから，$\boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{p}_2, \boldsymbol{p}_3, \boldsymbol{p}_4$ は $\mathbb{R}^4$ の正規直交基底である．よって

$$P = \begin{pmatrix}\boldsymbol{p}_1 & \boldsymbol{p}_2 & \boldsymbol{p}_3 & \boldsymbol{p}_4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{2\sqrt{3}} & \frac{1}{2}\\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{2\sqrt{3}} & \frac{1}{2}\\ 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{2\sqrt{3}} & \frac{1}{2}\\ 0 & 0 & \frac{3}{2\sqrt{3}} & \frac{1}{2}\end{pmatrix}$$

とおくと，P は直交行列で

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&9\end{pmatrix}$$

と対角化できる．

（解答終）

繰り返しになるが，実対称行列は必ず対角化できる．固有値の重複度と固有空間の次元が等しいことを意識しながら計算すること．

第 11 章例題 5.2(1) より，直交行列 P の行列式は $\det P = \pm 1$ であった．実対称行列を対角化する変換行列として，特に行列式が 1 の直交行列をとると便利なことがある．それは行列式が 1 の直交行列は回転変換に対応している（第 11 章例題 5.6 参照）からである．

例題 1.12. 次の実対称行列を行列式が 1 である直交行列を用いて対角化せよ．

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 6 \\ 6 & 9 \end{pmatrix}$$

（解答） A の固有方程式は

$$F_A(x) = \begin{vmatrix} x-4 & -6 \\ -6 & x-9 \end{vmatrix} = x^2 - 13x = x(x-13) = 0$$

より，A の固有値は $\lambda = 0, 13$ である．

固有値 $\lambda = 0$ に対する固有空間 $V(0)$ を求める．これは方程式 $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ の解空間であり

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 6 \\ 6 & 9 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 1 行を 1/4 倍}]{\text{(1,1) 成分による第 1 列の掃き出し}} \begin{pmatrix} 1 & 3/2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

より，$V(0)$ の基底として $\boldsymbol{v}_1 = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix}$ がとれるから，正規直交基底は $\boldsymbol{p}_1 = \dfrac{\boldsymbol{v}_1}{\|\boldsymbol{v}_1\|} = \dfrac{1}{\sqrt{13}}\begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix}$ である．

固有値 $\lambda = 13$ に対する固有空間 $V(13)$ を求める．これは方程式 $(A - 13E_2)\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ の解空間であり

$$A - 13E_2 = \begin{pmatrix} -9 & 6 \\ 6 & -4 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 1 行を (−1/9) 倍}]{\text{(1,1) 成分による第 1 列の掃き出し}} \begin{pmatrix} 1 & -2/3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

より，$V(13)$ の基底として $\boldsymbol{v}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ がとれるから，正規直交基底は $\boldsymbol{p}_2 = -\dfrac{\boldsymbol{v}_2}{\|\boldsymbol{v}_2\|} = \dfrac{1}{\sqrt{13}}\begin{pmatrix} -2 \\ -3 \end{pmatrix}$ である．

このとき，A は実対称行列なので異なる固有値に対する固有ベクトルは直交するから，$\boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{p}_2$ は $\mathbb{R}^2$ の正規直交基底である．よって

$$P = \begin{pmatrix} \boldsymbol{p}_1 & \boldsymbol{p}_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{13}}\begin{pmatrix} -3 & -2 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$$

とおけば，P は直交行列で $\det P = 1$ であり

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 13 \end{pmatrix}$$

と対角化できる．

（解答終）

通常のやり方で直交行列 P を作って $\det P = -1$ となる場合には，$\boldsymbol{p}_1$ または $\boldsymbol{p}_2$ を -1 倍すればよい．ここでは

$$P = \frac{1}{\sqrt{13}}\begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$$

とすると $\det P = -1$ なので，上の解答のようにあらかじめ $\boldsymbol{p}_2 = -\dfrac{\boldsymbol{v}_2}{\|\boldsymbol{v}_2\|}$ とした．

どちらかの列を -1 倍するのではなく列を入れ替えても（$\boldsymbol{p}_1$ と $\boldsymbol{p}_2$ の順番を入れ替えても）構わないが，対角行列に並ぶ固有値の順番に気をつけること．

例題 1.13. 次の実対称行列を行列式が 1 である直交行列を用いて対角化せよ．

$$A = \begin{pmatrix} 5 & \sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 3 \end{pmatrix}$$

（解答） A の固有方程式は

$$F_A(x) = \begin{vmatrix} x-5 & -\sqrt{3} \\ -\sqrt{3} & x-3 \end{vmatrix} = x^2 - 8x + 12 = (x-2)(x-6) = 0$$

より，A の固有値は $\lambda = 2, 6$ である．

固有値 $\lambda = 2$ に対する固有空間 $V(2)$ を求める．これは方程式 $(A - 2E_2)\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ の解空間であり

$$A - 2E_2 = \begin{pmatrix} 3 & \sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 1 行を 1/3 倍}]{\text{(1,1) 成分による第 1 列の掃き出し}} \begin{pmatrix} 1 & 1/\sqrt{3} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

より，$V(2)$ の基底として $\boldsymbol{v}_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ \sqrt{3} \end{pmatrix}$ がとれるから，正規直交基底は $\boldsymbol{p}_1 = \dfrac{\boldsymbol{v}_1}{\|\boldsymbol{v}_1\|} = \dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 \\ \sqrt{3} \end{pmatrix}$ である．

固有値 $\lambda = 6$ に対する固有空間 $V(6)$ を求める．これは方程式 $(A - 6E_2)\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ の解空間であり

$$A - 6E_2 = \begin{pmatrix} -1 & \sqrt{3} \\ \sqrt{3} & -3 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 1 行を } (-1) \text{ 倍}]{\text{(1,1) 成分による第 1 列の掃き出し}} \begin{pmatrix} 1 & -\sqrt{3} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

より，$V(6)$ の基底として $\boldsymbol{v}_2 = \begin{pmatrix} \sqrt{3} \\ 1 \end{pmatrix}$ がとれるから，正規直交基底は $\boldsymbol{p}_2 = \dfrac{\boldsymbol{v}_2}{\|\boldsymbol{v}_2\|} = \dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} \sqrt{3} \\ 1 \end{pmatrix}$ である．

このとき，A は実対称行列なので異なる固有値に対する固有ベクトルは直交するから，$\boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{p}_2$ は $\mathbb{R}^2$ の正規直交基底である．よって

$$P = \begin{pmatrix} \boldsymbol{p}_2 & \boldsymbol{p}_1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \sqrt{3} & -1 \\ 1 & \sqrt{3} \end{pmatrix}$$

とおけば，P は直交行列で $\det P = 1$ であり

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

と対角化できる．

（解答終）

この変換行列 P は

$$P = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \sqrt{3} & -1 \\ 1 & \sqrt{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos 30^\circ & -\sin 30^\circ \\ \sin 30^\circ & \cos 30^\circ \end{pmatrix}$$

と表せるから，30° の回転行列 $P = R(30^\circ)$ である．このように行列式 1 の直交行列から回転角度を求められるようにしておくと，次節で非常に役に立つ．

2　2次曲線の標準形

高校数学では楕円・双曲線・放物線などの2次曲線について学習した．例えば，次の方程式

$$\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1, \qquad 9x^2+y^2=1$$

は楕円を表している．次の方程式

$$\frac{x^2}{2}-y^2=1, \qquad x^2-4y^2=-1$$

は双曲線を表しており，また

$$y=2x^2, \qquad x=4y^2$$

は放物線を表している．まずは復習のためにこれらの概形を xy 平面上に描いてみよ．

また，これらに1次の項が加わった場合でも，平方完成すれば概形はわかる．例えば

$$4x^2+9y^2-8x-36y+4=0$$

は平方完成して整理すれば

$$\frac{(x-1)^2}{9}+\frac{(y-2)^2}{4}=1$$

となるので，これは中心が $(1,2)$ の楕円である．

しかし，もし xy という項があると状況は複雑となる．例えば

$$5x^2-6xy+5y^2-8x-8y+8=0$$

という方程式が表す曲線の概形を把握するには高校数学までの知識では難しい．実際，単に平方完成するだけではうまくいかない．そこで，このような場合でも実対称行列の直交行列による対角化を利用して概形がわかることを説明する．まずは一般的な場合を簡単に説明し，後で具体例をいくつか紹介する．

曲線 C を表す方程式が

$$ax^2+2bxy+cy^2+px+qy+r=0 \tag{2.1}$$

であるとする．ただし，x,y 以外の文字は実数の定数とする．

（Step1：方程式を実対称行列を用いて表す）

まず

$$A=\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}, \qquad B=\begin{pmatrix} p & q \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{x}=\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

とおけば，(2.1)は

$$^t\boldsymbol{x}A\boldsymbol{x}+B\boldsymbol{x}+r=0 \tag{2.2}$$

と実対称行列 A を用いて表せる．実際に計算してみると

$$^t\boldsymbol{x}A\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} ax+by & bx+cy \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=ax^2+2bxy+cy^2$$

と確かに (2.1) の2次の項が現れる．

（Step2：実対称行列を回転行列で対角化する）

次に，回転変換を表す直交行列 P により，A を対角化する．A の固有値を λ_1,λ_2 とすれば，行列式が1である直交行列 P を用いて

$$P^{-1}AP={}^tPAP=\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$$

と対角化できる．

（Step3：回転行列を用いて変数変換し，2 次曲線の標準形を求める）

そこで，$\boldsymbol{X} = \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = P^{-1}\boldsymbol{x}$ と変数変換する．このとき，$\boldsymbol{x} = P\boldsymbol{X}$ であるから

$$
{}^t\boldsymbol{x}A\boldsymbol{x} = {}^t(P\boldsymbol{X})A(P\boldsymbol{X}) = {}^t\boldsymbol{X}({}^tPAP)\boldsymbol{X} = \begin{pmatrix} X & Y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = \lambda_1 X^2 + \lambda_2 Y^2
$$

が成り立つ．また

$$
BP = \begin{pmatrix} p & q \end{pmatrix} P = \begin{pmatrix} p' & q' \end{pmatrix}
$$

とおけば，(2.2)は

$$
\lambda_1 X^2 + \lambda_2 Y^2 + p'X + q'Y + r = 0 \tag{2.3}
$$

と変換される．これは XY の項を含まないから，後は X と Y について平方完成すれば，方程式の表す図形が放物線・楕円・双曲線のいずれかがわかる．このように XY の項を含まない 2 次式 (2.3) を平方完成した式を 2 次曲線の標準形と呼ぶ．

（Step4：回転行列の回転角を求め，元の座標平面での概形を決定する）

行列式が 1 の直交行列 P はある角度 θ を用いて

$$
P = R(\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}
$$

と表せるから，XY 平面上の標準的な 2 次曲線を θ 回転することにより，もとの xy 平面上での 2 次曲線の概形が決定できる．

抽象的な説明では難しいことを行っているように見えるかもしれないので，具体的な例を通して計算方法を確認することにする．

例題 2.1.　2 次曲線 $C\colon 13x^2+6\sqrt{3}\,xy+7y^2=16$ の標準形を求め，その概形を図示せよ．

（解答）　実対称行列 $A=\begin{pmatrix}13 & 3\sqrt{3}\\ 3\sqrt{3} & 7\end{pmatrix}$ とベクトル $\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}$ を用いれば，方程式は

$$13x^2+6\sqrt{3}\,xy+7y^2=\begin{pmatrix}x & y\end{pmatrix}\begin{pmatrix}13 & 3\sqrt{3}\\ 3\sqrt{3} & 7\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}={}^t\boldsymbol{x}A\boldsymbol{x}=16$$

と表せる．そこで，A を直交行列により対角化する．A の固有方程式は

$$F_A(t)=\begin{vmatrix}t-13 & -3\sqrt{3}\\ -3\sqrt{3} & t-7\end{vmatrix}=t^2-20t+64=(t-4)(t-16)=0$$

より，A の固有値は $\lambda=4,16$ である．また

$$A-4E_2=\begin{pmatrix}9 & 3\sqrt{3}\\ 3\sqrt{3} & 3\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}\sqrt{3} & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix},\qquad A-16E_2=\begin{pmatrix}-3 & 3\sqrt{3}\\ 3\sqrt{3} & -9\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1 & -\sqrt{3}\\ 0 & 0\end{pmatrix}$$

より，$V(4),V(16)$ のそれぞれの正規直交基底として $\boldsymbol{p}_1=\dfrac{1}{2}\begin{pmatrix}1\\ -\sqrt{3}\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{p}_2=\dfrac{1}{2}\begin{pmatrix}\sqrt{3}\\ 1\end{pmatrix}$ がとれる．

ゆえに，$P=\begin{pmatrix}\boldsymbol{p}_1 & \boldsymbol{p}_2\end{pmatrix}=\dfrac{1}{2}\begin{pmatrix}1 & \sqrt{3}\\ -\sqrt{3} & 1\end{pmatrix}$ とおけば，P は $\det P=1$ の直交行列で

$$P^{-1}AP={}^tPAP=\begin{pmatrix}4 & 0\\ 0 & 16\end{pmatrix}$$

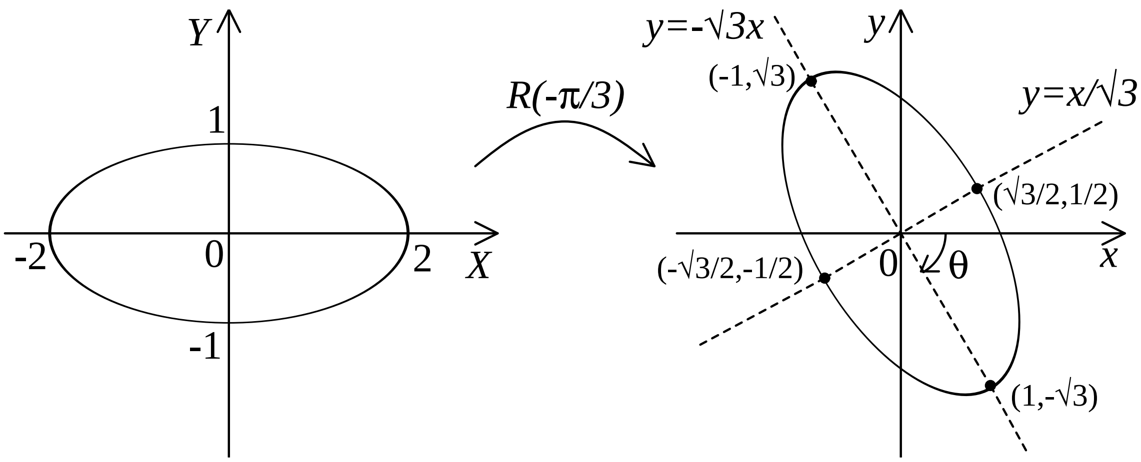
と対角化できる．そこで，$\boldsymbol{X}=\begin{pmatrix}X\\ Y\end{pmatrix}=P^{-1}\boldsymbol{x}$ とおけば，$\boldsymbol{x}=P\boldsymbol{X}$ なので

$${}^t\boldsymbol{x}A\boldsymbol{x}={}^t(P\boldsymbol{X})A(P\boldsymbol{X})={}^t\boldsymbol{X}({}^tPAP)\boldsymbol{X}=\begin{pmatrix}X & Y\end{pmatrix}\begin{pmatrix}4 & 0\\ 0 & 16\end{pmatrix}\begin{pmatrix}X\\ Y\end{pmatrix}=4X^2+16Y^2=16$$

となる．よって，2 次曲線 C の標準形は

$$\frac{X^2}{4}+Y^2=1$$

となるから，C は楕円である．さらに，P は $\theta=-\dfrac{\pi}{3}$ の回転行列であるから，2 次曲線 C は XY 平面上の楕円 $\dfrac{X^2}{4}+Y^2=1$ を原点を中心に $-\dfrac{\pi}{3}$ 回転した曲線である．



（解答終）

例題 2.2. 2次曲線 $C\colon x^2+2\sqrt{3}\,xy-y^2=2$ の標準形を求め，その概形を図示せよ．

（解答） 実対称行列 $A=\begin{pmatrix}1 & \sqrt{3}\\ \sqrt{3} & -1\end{pmatrix}$ とベクトル $\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}$ を用いれば，方程式は

$$x^2+2\sqrt{3}\,xy-y^2=\begin{pmatrix}x & y\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & \sqrt{3}\\ \sqrt{3} & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}={}^t\boldsymbol{x}A\boldsymbol{x}=2$$

と表せる．そこで，A を直交行列により対角化する．A の固有方程式は

$$F_A(t)=\begin{vmatrix}t-1 & -\sqrt{3}\\ -\sqrt{3} & t+1\end{vmatrix}=t^2-4=(t-2)(t+2)=0$$

より，A の固有値は $\lambda=2,-2$ である．また

$$A-2E_2=\begin{pmatrix}-1 & \sqrt{3}\\ \sqrt{3} & -3\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1 & -\sqrt{3}\\ 0 & 0\end{pmatrix},\qquad A+2E_2=\begin{pmatrix}3 & \sqrt{3}\\ \sqrt{3} & 1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}\sqrt{3} & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}$$

より，$V(2),V(-2)$ のそれぞれの正規直交基底として $\boldsymbol{p}_1=\dfrac{1}{2}\begin{pmatrix}\sqrt{3}\\ 1\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{p}_2=\dfrac{1}{2}\begin{pmatrix}-1\\ \sqrt{3}\end{pmatrix}$ がとれる．

ゆえに，$P=\begin{pmatrix}\boldsymbol{p}_1 & \boldsymbol{p}_2\end{pmatrix}=\dfrac{1}{2}\begin{pmatrix}\sqrt{3} & -1\\ 1 & \sqrt{3}\end{pmatrix}$ とおけば，P は $\det P=1$ の直交行列で

$$P^{-1}AP={}^tPAP=\begin{pmatrix}2 & 0\\ 0 & -2\end{pmatrix}$$

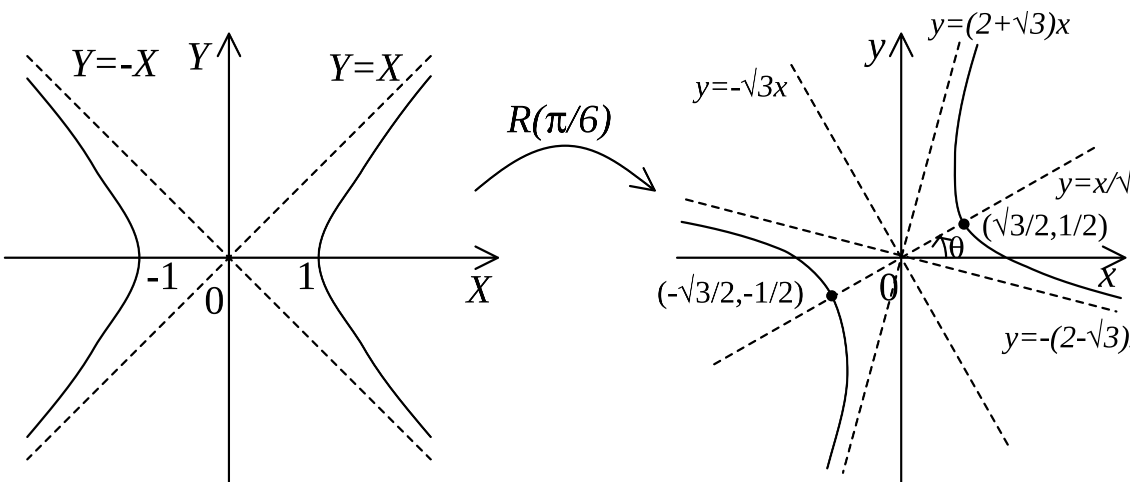
と対角化できる．そこで，$\boldsymbol{X}=\begin{pmatrix}X\\ Y\end{pmatrix}=P^{-1}\boldsymbol{x}$ とおけば，$\boldsymbol{x}=P\boldsymbol{X}$ なので

$${}^t\boldsymbol{x}A\boldsymbol{x}={}^t(P\boldsymbol{X})A(P\boldsymbol{X})={}^t\boldsymbol{X}({}^tPAP)\boldsymbol{X}=\begin{pmatrix}X & Y\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & 0\\ 0 & -2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}X\\ Y\end{pmatrix}=2X^2-2Y^2=2$$

となる．よって，2次曲線 C の標準形は

$$X^2-Y^2=1$$

となるから，C は双曲線である．さらに，P は $\theta=\dfrac{\pi}{6}$ の回転行列であるから，2次曲線 C は XY 平面上の双曲線 $X^2-Y^2=1$ を原点を中心に $\dfrac{\pi}{6}$ 回転した曲線である．



（解答終）

例題 2.3.　2 次曲線 C: $5x^2-6xy+5y^2-8x-8y+8=0$ の標準形を求め，その概形を図示せよ．

（解答）　実対称行列 $A=\begin{pmatrix}5 & -3\\ -3 & 5\end{pmatrix}$，行列 $B=\begin{pmatrix}-8 & -8\end{pmatrix}$ とベクトル $\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}$ を用いれば，方程式は

$$5x^2-6xy+5y^2-8x-8y+8={}^t\boldsymbol{x}A\boldsymbol{x}+B\boldsymbol{x}+8=0$$

と表せる．そこで，A を直交行列により対角化する．A の固有方程式は

$$F_A(t)=\begin{vmatrix}t-5 & 3\\ 3 & t-5\end{vmatrix}=t^2-10t+16=(t-2)(t-8)=0$$

より，A の固有値は $\lambda=2,8$ である．また

$$A-2E_2=\begin{pmatrix}3 & -3\\ -3 & 3\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1 & -1\\ 0 & 0\end{pmatrix},\qquad A-8E_2=\begin{pmatrix}-3 & -3\\ -3 & -3\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}$$

より，$V(2),V(8)$ のそれぞれの正規直交基底として $\boldsymbol{p}_1=\dfrac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\ 1\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{p}_2=\dfrac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}-1\\ 1\end{pmatrix}$ がとれる．

ゆえに，$P=\begin{pmatrix}\boldsymbol{p}_1 & \boldsymbol{p}_2\end{pmatrix}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1 & -1\\ 1 & 1\end{pmatrix}$ とおけば，P は $\det P=1$ の直交行列で

$$P^{-1}AP={}^tPAP=\begin{pmatrix}2 & 0\\ 0 & 8\end{pmatrix},\qquad BP=\begin{pmatrix}-8 & -8\end{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1 & -1\\ 1 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-8\sqrt{2} & 0\end{pmatrix}$$

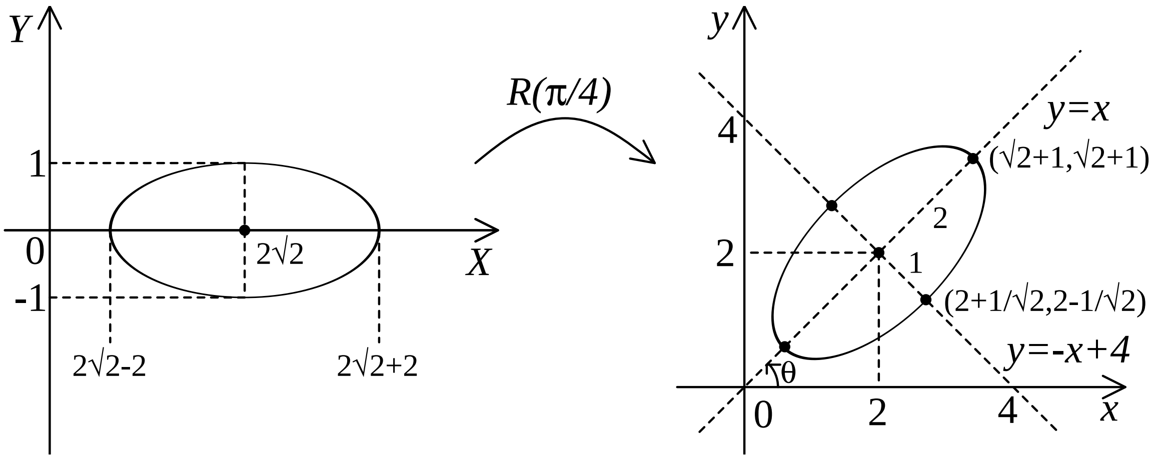
と対角化できる．そこで，$\boldsymbol{X}=\begin{pmatrix}X\\ Y\end{pmatrix}=P^{-1}\boldsymbol{x}$ とおけば，$\boldsymbol{x}=P\boldsymbol{X}$ なので

$${}^t\boldsymbol{x}A\boldsymbol{x}={}^t\boldsymbol{X}({}^tPAP)\boldsymbol{X}=2X^2+8Y^2,\qquad B\boldsymbol{x}=BP\boldsymbol{X}=-8\sqrt{2}\,X$$

となる．よって，2 次曲線 C の標準形は

$$2X^2+8Y^2-8\sqrt{2}\,X+8=0\qquad\therefore\ \frac{(X-2\sqrt{2}\,)^2}{4}+Y^2=1$$

となるから，C は楕円である．さらに，P は $\theta=\frac{\pi}{4}$ の回転行列であるから，2 次曲線 C は XY 平面上の楕円 $\dfrac{(X-2\sqrt{2}\,)^2}{4}+Y^2=1$ を原点を中心に $\frac{\pi}{4}$ 回転した曲線である．



（解答終）

例題 2.4.　2 次曲線 $C: x^2+4xy+4y^2-2\sqrt{5}\,x+\sqrt{5}\,y=0$ の標準形を求め，その概形を図示せよ．

（解答）　実対称行列 $A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 2 & 4\end{pmatrix}$，行列 $B=\begin{pmatrix}-2\sqrt{5} & \sqrt{5}\end{pmatrix}$ とベクトル $\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}$ を用いれば，方程式は

$$x^2+4xy+4y^2-2\sqrt{5}\,x+\sqrt{5}\,y={}^t\boldsymbol{x}A\boldsymbol{x}+B\boldsymbol{x}=0$$

と表せる．そこで，A を直交行列により対角化する．A の固有方程式は

$$F_A(t)=\begin{vmatrix}t-1 & -2\\ -2 & t-4\end{vmatrix}=t^2-5t=t(t-5)=0$$

より，A の固有値は $\lambda=0,5$ である．また

$$A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 2 & 4\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1 & 2\\ 0 & 0\end{pmatrix},\qquad A-5E_2=\begin{pmatrix}-4 & 2\\ 2 & -1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}2 & -1\\ 0 & 0\end{pmatrix}$$

より，$V(0),V(5)$ のそれぞれの正規直交基底として $\boldsymbol{p}_1=\dfrac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix}2\\ -1\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{p}_2=\dfrac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix}1\\ 2\end{pmatrix}$ がとれる．

ゆえに，$P=\begin{pmatrix}\boldsymbol{p}_1 & \boldsymbol{p}_2\end{pmatrix}=\dfrac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix}2 & 1\\ -1 & 2\end{pmatrix}$ とおけば，P は $\det P=1$ の直交行列で

$$P^{-1}AP={}^tPAP=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 5\end{pmatrix}$$

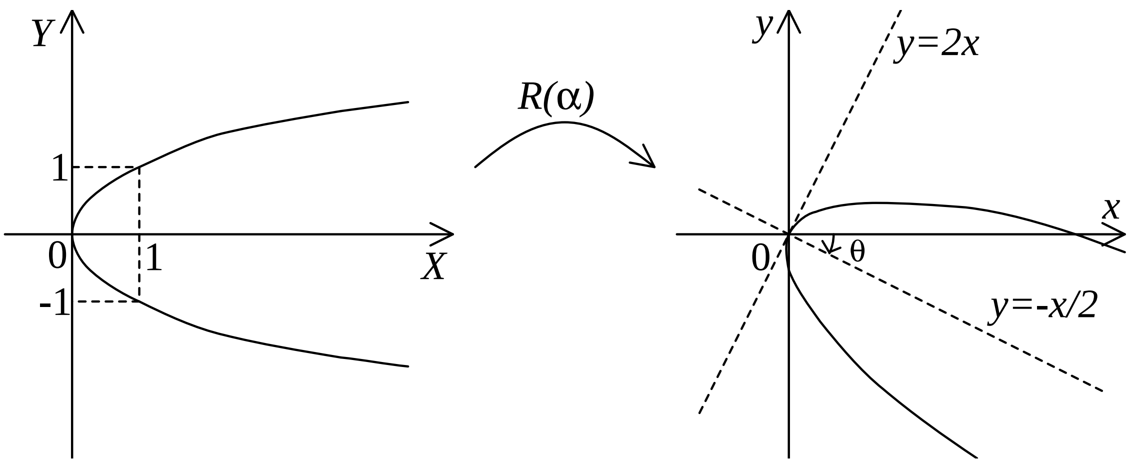
と対角化できる．そこで，$\boldsymbol{X}=\begin{pmatrix}X\\ Y\end{pmatrix}=P^{-1}\boldsymbol{x}$ とおけば，$\boldsymbol{x}=P\boldsymbol{X}$ なので

$${}^t\boldsymbol{x}A\boldsymbol{x}={}^t\boldsymbol{X}({}^tPAP)\boldsymbol{X}=5Y^2,\qquad B\boldsymbol{x}=BP\boldsymbol{X}=-5X$$

となる．よって，2 次曲線 C の標準形は

$$5Y^2-5X=0\qquad\therefore\ X=Y^2$$

となるから，C は放物線である．さらに，P は $\theta=\alpha$ の回転行列（ただし $(\cos\alpha,\sin\alpha)=\left(\dfrac{2}{\sqrt{5}},-\dfrac{1}{\sqrt{5}}\right)$）であるから，2 次曲線 C は XY 平面上の放物線 $X=Y^2$ を原点を中心に α 回転した曲線である．



（解答終）

例題 2.5.　曲線 $C\colon 7x^2-6\sqrt{3}\,xy+13y^2+4\sqrt{3}\,x+4y+a=0$（$a$ は定数）の種類を調べよ．

（解答）　実対称行列 $A=\begin{pmatrix}7 & -3\sqrt{3}\\ -3\sqrt{3} & 13\end{pmatrix}$，行列 $B=\begin{pmatrix}4\sqrt{3} & 4\end{pmatrix}$ とベクトル $\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}$ を用いれば，方程式は

$$7x^2-6\sqrt{3}\,xy+13y^2+4\sqrt{3}\,x+4y+a={}^t\boldsymbol{x}A\boldsymbol{x}+B\boldsymbol{x}+a=0$$

と表せる．そこで，A を直交行列により対角化する．A の固有方程式は

$$F_A(t)=\begin{vmatrix}t-7 & 3\sqrt{3}\\ 3\sqrt{3} & t-13\end{vmatrix}=t^2-20t+64=(t-4)(t-16)=0$$

より，A の固有値は $\lambda=4,16$ である．

固有値 $\lambda=4$ に対する固有空間 $V(4)$ を求める．これは方程式 $(A-4E_2)\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ の解空間であり

$$A-4E_2=\begin{pmatrix}3 & -3\sqrt{3}\\ -3\sqrt{3} & 9\end{pmatrix}\xrightarrow[\text{第 1 行を 1/3 倍}]{\text{(1,1) 成分による第 1 列の掃き出し}}\begin{pmatrix}1 & -\sqrt{3}\\ 0 & 0\end{pmatrix}$$

より，$V(4)$ の基底として $\boldsymbol{v}_1=\begin{pmatrix}\sqrt{3}\\ 1\end{pmatrix}$ がとれ，$V(4)$ の正規直交基底として $\boldsymbol{p}_1=\dfrac{1}{2}\begin{pmatrix}\sqrt{3}\\ 1\end{pmatrix}$ がとれる．

固有値 $\lambda=16$ に対する固有空間 $V(16)$ を求める．これは方程式 $(A-16E_2)\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ の解空間であり

$$A-16E_2=\begin{pmatrix}-9 & -3\sqrt{3}\\ -3\sqrt{3} & -3\end{pmatrix}\xrightarrow[\text{第 1 行を } (-1/3\sqrt{3}) \text{ 倍}]{\text{(1,1) 成分による第 1 列の掃き出し}}\begin{pmatrix}\sqrt{3} & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}$$

より，$V(16)$ の基底として $\boldsymbol{v}_2=\begin{pmatrix}-1\\ \sqrt{3}\end{pmatrix}$ がとれ，$V(16)$ の正規直交基底として $\boldsymbol{p}_2=\dfrac{1}{2}\begin{pmatrix}-1\\ \sqrt{3}\end{pmatrix}$ がとれる．

ゆえに，$P=\begin{pmatrix}\boldsymbol{p}_1 & \boldsymbol{p}_2\end{pmatrix}=\dfrac{1}{2}\begin{pmatrix}\sqrt{3} & -1\\ 1 & \sqrt{3}\end{pmatrix}$ とおけば，P は直交行列で

$$P^{-1}AP={}^tPAP=\begin{pmatrix}4 & 0\\ 0 & 16\end{pmatrix}$$

と対角化できる．そこで，$\boldsymbol{X}=\begin{pmatrix}X\\ Y\end{pmatrix}=P^{-1}\boldsymbol{x}$ とおけば，$\boldsymbol{x}=P\boldsymbol{X}$ なので

$${}^t\boldsymbol{x}A\boldsymbol{x}={}^t\boldsymbol{X}({}^tPAP)\boldsymbol{X}=4X^2+16Y^2,\qquad B\boldsymbol{x}=BP\boldsymbol{X}=8X$$

より，2 次曲線 C の標準形は

$$4X^2+16Y^2+8X+a=0\qquad \therefore\ 4(X+1)^2+16Y^2=4-a$$

となる．よって，a の値で場合分けすれば

$$\begin{cases} a<4 \text{ のとき} & \text{楕円}\quad \dfrac{(X+1)^2}{4}+Y^2=\dfrac{4-a}{16}\\ a=4 \text{ のとき} & 1\text{ 点}\quad (X,Y)=(-1,0)\\ a>4 \text{ のとき} & \text{空集合}\end{cases}$$

である．もとの曲線 C の概形はこれらを $\theta=\dfrac{\pi}{6}$ だけ回転すれば得られる．

（解答終）

例題 2.6.　曲線 $C\colon 2x^2-3xy-2y^2+2\sqrt{10}\,x+\sqrt{10}\,y=0$ の種類を調べよ．

（解答）　実対称行列 $A=\begin{pmatrix}2 & -3/2\\ -3/2 & -2\end{pmatrix}$，行列 $B=\begin{pmatrix}2\sqrt{10} & \sqrt{10}\end{pmatrix}$ とベクトル $\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}$ を用いれば，方程式は

$$2x^2-3xy-2y^2+2\sqrt{10}\,x+\sqrt{10}\,y={}^t\boldsymbol{x}A\boldsymbol{x}+B\boldsymbol{x}=0$$

と表せる．そこで，A を直交行列により対角化する．A の固有方程式は

$$F_A(t)=\begin{vmatrix}t-2 & 3/2\\ 3/2 & t+2\end{vmatrix}=t^2-\frac{25}{4}=\left(t-\frac{5}{2}\right)\left(t+\frac{5}{2}\right)=0$$

より，A の固有値は $\lambda=\pm\dfrac{5}{2}$ である．また

$$A-\frac{5}{2}E_2=\begin{pmatrix}-1/2 & -3/2\\ -3/2 & -9/2\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1 & 3\\ 0 & 0\end{pmatrix},\qquad A+\frac{5}{2}E_2=\begin{pmatrix}9/2 & -3/2\\ -3/2 & 1/2\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}3 & -1\\ 0 & 0\end{pmatrix}$$

より，$V\left(\dfrac{5}{2}\right), V\left(-\dfrac{5}{2}\right)$ のそれぞれの正規直交基底として $\boldsymbol{p}_1=\dfrac{1}{\sqrt{10}}\begin{pmatrix}3\\ -1\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{p}_2=\dfrac{1}{\sqrt{10}}\begin{pmatrix}1\\ 3\end{pmatrix}$ がとれる．

ゆえに，$P=\begin{pmatrix}\boldsymbol{p}_1 & \boldsymbol{p}_2\end{pmatrix}=\dfrac{1}{\sqrt{10}}\begin{pmatrix}3 & 1\\ -1 & 3\end{pmatrix}$ とおけば，P は直交行列で

$$P^{-1}AP={}^tPAP=\begin{pmatrix}5/2 & 0\\ 0 & -5/2\end{pmatrix}$$

と対角化できる．そこで，$\boldsymbol{X}=\begin{pmatrix}X\\ Y\end{pmatrix}=P^{-1}\boldsymbol{x}$ とおけば，$\boldsymbol{x}=P\boldsymbol{X}$ なので

$${}^t\boldsymbol{x}A\boldsymbol{x}={}^t\boldsymbol{X}({}^tPAP)\boldsymbol{X}=\frac{5}{2}X^2-\frac{5}{2}Y^2,\qquad B\boldsymbol{x}=BP\boldsymbol{X}=5X+5Y$$

より，曲線 C の標準形は

$$\frac{5}{2}X^2-\frac{5}{2}Y^2+5X+5Y=0\qquad \therefore\ (X+1)^2-(Y-1)^2=0$$

となる．よって，C は 2 直線 $Y=-X,\ Y=X+2$ である．概形はこれを P でうつせばよい．

なお，C の方程式を因数分解すれば

$$\begin{aligned}2x^2-3xy-2y^2+2\sqrt{10}\,x+\sqrt{10}\,y&=2x^2+(-3y+2\sqrt{10}\,)x-y(2y-\sqrt{10}\,)\\ &=(2x+y)(x-2y+\sqrt{10}\,)=0\end{aligned}$$

となるので，直接的に C が 2 直線 $y=-2x,\ y=\dfrac{x+\sqrt{10}}{2}$ であるともわかる．

（解答終）

このように x,y の 2 次方程式であっても，定まる図形は必ずしも楕円や双曲線などのような曲線とは限らない．

練習問題 2.1.　次の 2 次曲線 C の標準形を求めよ．また，曲線（直線や 1 点，空集合なこともありうる）の概形を描くことを試みよ．

(1) $3x^2 - 2xy + 3y^2 = 4$

(2) $2x^2 + 4xy - y^2 = 1$

(3) $x^2 - 2xy + y^2 - 4\sqrt{2}\,x - 4\sqrt{2}\,y = 0$

(4) $5x^2 + 2xy + 5y^2 - 16x - 8y + 2 = 0$

(5) $5x^2 + 2\sqrt{3}\,xy + 3y^2 - 4x - 17 = 0$

(6) $x^2 + 2\sqrt{3}\,xy + 3y^2 - 2(2+\sqrt{3}\,)x + 2(1-2\sqrt{3}\,)y - 4 = 0$

(7) $5x^2 + 6xy + 5y^2 + 8x + 24y + 24 = 0$

3　多変数関数の極値問題

ここでは多変数関数の極大・極小の判定法を線形代数の知識を利用して見直してみる．まずは主に 2 変数関数 $f(x,y)$ について考える．

定義 3.1. （停留点）
関数 $f(x,y)$ は偏微分可能であるとする．このとき

$$f_x(a,b) = f_y(a,b) = 0$$

となる点 (a,b) を f の停留点（臨界点）という．

定理 3.2.　関数 $f(x,y)$ は点 (a,b) で極値をとり，かつ偏微分可能であるとする．このとき

$$f_x(a,b) = f_y(a,b) = 0$$

が成り立つ．

この定理より停留点が極値をとる点の候補であることがわかる．しかし，これはあくまで必要条件なので極値をとるかの判定法が必要であり，それはヘッセ行列を利用すればよい．

定義 3.3. （**Hesse** 行列）
関数 $f(x,y)$ が C^2 級であるとき，行列 $\begin{pmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{pmatrix}$ を f の**ヘッセ行列 (Hesse 行列)** という．

なお，f が C^2 級ならば $f_{xy} = f_{yx}$ であるから，Hesse 行列は実対称行列となる．

微分積分学では，2 変数関数の極値判定について次の定理を学習した．

定理 3.4. （極値を取るための十分条件）
関数 $f(x,y)$ は点 (a,b) の近傍で C^2 級で，さらに点 (a,b) は f の停留点，すなわち

$$f_x(a,b) = f_y(a,b) = 0$$

とする．f の Hesse 行列の行列式を $H(x,y)$ とおく．つまり

$$H(x,y) = f_{xx}(x,y)f_{yy}(x,y) - f_{xy}(x,y)^2$$

とする．このとき

(1) $H(a,b) > 0$, $f_{xx}(a,b) > 0$ ならば，f は点 (a,b) で極小となる．

(2) $H(a,b) > 0$, $f_{xx}(a,b) < 0$ ならば，f は点 (a,b) で極大となる．

(3) $H(a,b) < 0$ ならば，f は点 (a,b) で極大でも極小でもない．（鞍点である）

この定理について覚えにくいと感じた学生も多いのではないかと思う．実は**この定理の主張はあまり一般的な記述ではなく，2 変数関数でしか通用しない形で書かれている．そのため，3 変数関数（及びそれ以上の変数の関数）ではこの定理は成り立たない．**2 変数関数でしか使えない形で定理を説明する理由は，この定理を学習する際に『実対称行列の直交行列による対角化』をまだ知らないため，線形代数学を用いずに “無理やり” 説明しているからである．そこで，まずはこの定理の証明を線形代数学の知識を利用して試みると次のようになる．

簡単のために停留点 (a,b) が原点の場合を考える．

証明． $r=\sqrt{x^2+y^2}$ とおく．Taylor の定理より，$r\to 0$ のとき

$$f(x,y)=f(0,0)+f_x(0,0)x+f_y(0,0)y+\frac{1}{2}\left\{f_{xx}(0,0)x^2+2f_{xy}(0,0)xy+f_{yy}(0,0)y^2\right\}+o(r^2)$$

と表せるから，$(0,0)$ が f の停留点なので

$$f(x,y)-f(0,0)=\frac{1}{2}\left\{f_{xx}(0,0)x^2+2f_{xy}(0,0)xy+f_{yy}(0,0)y^2\right\}+o(r^2)$$

が成り立つ．これは，実対称行列 $A=\begin{pmatrix} f_{xx}(0,0) & f_{xy}(0,0) \\ f_{yx}(0,0) & f_{yy}(0,0) \end{pmatrix}$ とベクトル $\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ を用いて

$$f(x,y)-f(0,0)=\frac{1}{2}\begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix}\begin{pmatrix} f_{xx}(0,0) & f_{xy}(0,0) \\ f_{yx}(0,0) & f_{yy}(0,0) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}+o(r^2)=\frac{1}{2}\,{}^t\boldsymbol{x}A\boldsymbol{x}+o(r^2)$$

と表せる．

実対称行列は直交行列で対角化可能なので，A の固有値を λ_1,λ_2 $(\lambda_1\geqq\lambda_2)$ とし，それぞれの固有値に対する固有ベクトルからなる $\mathbb{R}^2$ の正規直交基底を $\boldsymbol{p}_1,\boldsymbol{p}_2$ とすれば，$P=\begin{pmatrix}\boldsymbol{p}_1 & \boldsymbol{p}_2\end{pmatrix}$ は直交行列であり

$$P^{-1}AP={}^tPAP=\begin{pmatrix}\lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2\end{pmatrix}$$

となる．そこで，$\boldsymbol{y}=\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}=P^{-1}\boldsymbol{x}$ とおけば

$$\begin{aligned} f(x,y)-f(0,0)=\frac{1}{2}\,{}^t\boldsymbol{x}A\boldsymbol{x}+o(r^2)&=\frac{1}{2}\,{}^t(P\boldsymbol{y})A(P\boldsymbol{y})+o(r^2) \\ &=\frac{1}{2}\,{}^t\boldsymbol{y}({}^tPAP)\boldsymbol{y}+o(r^2)=\frac{1}{2}\left(\lambda_1X^2+\lambda_2Y^2\right)+o(r^2) \end{aligned}$$

が成り立つ．

直交行列による変換は長さを変えないので

$$r=\sqrt{x^2+y^2}=\sqrt{X^2+Y^2}$$

であるから，$(x,y)\fallingdotseq(0,0)$ が十分 $(0,0)$ に近ければ，$o(r^2)$ は $r^2=X^2+Y^2$ よりも小さいので符号は r^2 の係数で決まり

(i) $0<\lambda_2\leqq\lambda_1$ のとき（固有値が 2 個とも正のとき）

$$f(x,y)-f(0,0)\geqq\frac{1}{2}\left(\lambda_2X^2+\lambda_2Y^2\right)+o(r^2)=\frac{\lambda_2}{2}r^2+o(r^2)>0$$

なので，$(0,0)$ で極小となる．

(ii) $\lambda_2\leqq\lambda_1<0$ のとき（固有値が 2 個とも負のとき）

$$f(x,y)-f(0,0)\leqq\frac{1}{2}\left(\lambda_1X^2+\lambda_1Y^2\right)+o(r^2)=\frac{\lambda_1}{2}r^2+o(r^2)<0$$

なので，$(0,0)$ で極大となる．

(iii) $\lambda_2<0<\lambda_1$ のとき（固有値が正と負のとき）

$$f(x,y)-f(0,0)=\frac{1}{2}\left(\lambda_1X^2+\lambda_2Y^2\right)+o(r^2)$$

の右辺は X 軸上では正，Y 軸上では負であるから，原点の近傍で正の値と負の値の両方をとる．よって，極大でも極小でもなく鞍点である．

このようにヘッセ行列の固有値を求めれば極値かどうかの判定ができる．以下では見やすさのために

$$A = \begin{pmatrix} f_{xx}(0,0) & f_{xy}(0,0) \\ f_{yx}(0,0) & f_{yy}(0,0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p & q \\ q & r \end{pmatrix}$$

とおく．このとき，A の固有方程式は

$$F_A(t) = \begin{vmatrix} t-p & -q \\ -q & t-r \end{vmatrix} = t^2 - (p+r)t + pr - q^2 = 0$$

である．この 2 次方程式の解が固有値 $t = \lambda_1, \lambda_2$ なので，解と係数の関係より

$$\lambda_1 + \lambda_2 = p + r, \qquad \lambda_1\lambda_2 = pr - q^2$$

が成り立つ．よって

$$H(0,0) = \det A = pr - q^2 = \lambda_1\lambda_2$$

となる．

(I) $H(0,0) > 0$ のとき

このとき，$H(0,0) = pr - q^2 > 0$ より $pr > 0$ となるから，p と r は同符号である．ゆえに，$p+r$ と p も同符号となる．

(I-1) $H(0,0) > 0$ かつ $f_{xx}(0,0) > 0$ のとき

$p = f_{xx}(0,0) > 0$ なので $p + r > 0$ である．よって

$$\lambda_1 + \lambda_2 = p + r > 0, \qquad \lambda_1\lambda_2 = H(0,0) > 0$$

であるから，λ_1, λ_2 はともに正である．よって，$(0,0)$ で極小となる．

(I-2) $H(0,0) > 0$ かつ $f_{xx}(0,0) < 0$ のとき

$p = f_{xx}(0,0) < 0$ なので $p + r < 0$ である．よって

$$\lambda_1 + \lambda_2 = p + r < 0, \qquad \lambda_1\lambda_2 = H(0,0) > 0$$

であるから，λ_1, λ_2 はともに負である．よって，$(0,0)$ で極大となる．

(II) $H(0,0) < 0$ のとき

このとき

$$\lambda_1\lambda_2 = H(0,0) < 0$$

より，λ_1 と λ_2 は異符号である．よって，$(0,0)$ で鞍点となる．

□

このように 2 変数関数が停留点で極値をとるかどうかは，ヘッセ行列の固有値の符号が大きく影響している．これが本質的な条件であるが，固有値を用いずに解と係数の関係などを利用して何とか説明を試みたものが微分積分学で学習する定理である．

n 変数関数の場合にも，点 $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ が $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ の停留点であるとは

$$f_{x_1}(a_1, a_2, \ldots, a_n) = f_{x_2}(a_1, a_2, \ldots, a_n) = \cdots = f_{x_n}(a_1, a_2, \ldots, a_n) = 0$$

となることであり，f の Hesse 行列を

$$M(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \begin{pmatrix} f_{x_1x_1} & f_{x_1x_2} & \cdots & f_{x_1x_n} \\ f_{x_2x_1} & f_{x_2x_2} & \cdots & f_{x_2x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f_{x_nx_1} & f_{x_nx_2} & \cdots & f_{x_nx_n} \end{pmatrix}$$

で定義する．

3 変数以上の関数に対しても，前に述べた『実対称行列の直交行列による対角化』を利用した証明は有効である．実際，n 変数関数でも Taylor の定理は適用でき，2 次の項までを実対称行列を用いて表現して直交行列で対角化すればよい．行列のサイズが変わっても同様に議論できることを各自で確認してみよ．

その結果をまとめると，次のようになる．

定理 3.5. （極値を取るための十分条件）

関数 $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ は点 $\mathrm{A}(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ の近傍で C^2 級で，さらに点 A は f の停留点とする．このとき，f の Hesse 行列 $M(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ について

(1) $M(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ の n 個の固有値がすべて正ならば，f は点 A で極小となる．

(2) $M(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ の n 個の固有値がすべて負ならば，f は点 A で極大となる．

(3) $M(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ が 正の固有値と負の固有値をもつならば，f は点 A で極大でも極小でもない．

このように固有値がすべて正の実対称行列は応用上重要なので，そのような行列を**正定値**であるという．同様に固有値がすべて負の実対称行列を**負定値**であるという．

例えば 3 変数関数 $f(x, y, z)$ の極値について考えてみる．停留点 (a, b, c) におけるヘッセ行列は 3 次実対称行列であり，その固有値を $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ とする．このとき，ヘッセ行列の行列式 $H(a, b, c)$ は固有値の積

$$H(a, b, c) = \lambda_1\lambda_2\lambda_3$$

である．よって

(i) $H(a, b, c) > 0$ のときは次のどちらか

- $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ がすべて正（極小）
- $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ のうち 1 個が正で 2 個が負（鞍点）

(ii) $H(a, b, c) < 0$ のときは次のどちらか

- $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ がすべて負（極大）
- $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ のうち 2 個が正で 1 個が負（鞍点）

となる．したがって，ヘッシアンが $H(a, b, c) > 0$ でも極値をとらないことがあるし，$H(a, b, c) < 0$ でも極値をとることがある．ヘッシアンの符号だけで極値をとるかどうか判定できるのは 2 変数関数のときだけで，これが特殊な状況である．そのため，2 変数関数の場合の極値判定法を暗記しても適用範囲が狭いため，上で述べた定理で理解しておいた方がよい．

例題 3.6. 関数 $f(x,y,z)=x^3+y^2+z^3-3xz-4y$ の極値を求めよ．

（解答） まず，停留点を求める．

$$f_x(x,y,z)=3x^2-3z,\qquad f_y(x,y,z)=2y-4,\qquad f_z(x,y,z)=3z^2-3x$$

より，$f_x=f_y=f_z=0$ から得られる次の連立方程式

$$\begin{cases} x^2-z=0 \\ y-2=0 \\ z^2-x=0 \end{cases}$$

を解けばよい．これより $z=x^2=z^4$ であるから，f の停留点は $(x,y,z)=(0,2,0),\,(1,2,1)$ の 2 個．

また，2 次偏導関数を計算すれば

$$M(x,y,z)=\begin{pmatrix} f_{xx} & f_{xy} & f_{xz} \\ f_{yx} & f_{yy} & f_{yz} \\ f_{zx} & f_{zy} & f_{zz} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 6x & 0 & -3 \\ 0 & 2 & 0 \\ -3 & 0 & 6z \end{pmatrix}$$

である．

点 $(1,2,1)$ では $M=\begin{pmatrix} 6 & 0 & -3 \\ 0 & 2 & 0 \\ -3 & 0 & 6 \end{pmatrix}$ なので，M の固有方程式は

$$F_M(t)=\begin{vmatrix} t-6 & 0 & 3 \\ 0 & t-2 & 0 \\ 3 & 0 & t-6 \end{vmatrix}=(t-2)\begin{vmatrix} t-6 & 3 \\ 3 & t-6 \end{vmatrix}=(t-2)(t-3)(t-9)=0$$

より，固有値は $2,3,9$ ですべて正なのでヘッセ行列は正定値である．よって，f は $(1,2,1)$ で極小となり，極小値 $f(1,2,1)=-5$ をとる．

点 $(0,2,0)$ では $M=\begin{pmatrix} 0 & 0 & -3 \\ 0 & 2 & 0 \\ -3 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ なので，M の固有方程式は

$$F_M(t)=\begin{vmatrix} t & 0 & 3 \\ 0 & t-2 & 0 \\ 3 & 0 & t \end{vmatrix}=(t-2)\begin{vmatrix} t & 3 \\ 3 & t \end{vmatrix}=(t-2)(t-3)(t+3)=0$$

より，固有値は $2,3,-3$ で正と負の両方がある．よって，$(0,2,0)$ で鞍点となり，極値はとらない．

（解答終）

この例題からも 3 変数関数の場合にはヘッセ行列の行列式だけでは極値をもつかどうかの判定はできないことがわかる．また，実は上の解答は最良なものではない．**極大・極小の判定には固有値の具体的な値ではなく，その符号だけがわかればよい**からである．高次方程式を具体的に解かなくてもその解の符号が「すべて正」か「すべて負」か「正と負の両方がある」かが決定できる方法（小行列式の理論）が知られているので，詳しくは各自で調べてみて欲しい．

例題 3.7. $0 < a < b < c$ とする．関数 $f(x,y,z) = (ax^2 + by^2 + cz^2)e^{-x^2-y^2-z^2}$ の極値を求めよ．

（解答） まず，停留点を求めると

$$\begin{aligned} f_x(x,y,z) &= \{2ax - 2x(ax^2 + by^2 + cz^2)\}e^{-x^2-y^2-z^2} \\ f_y(x,y,z) &= \{2by - 2y(ax^2 + by^2 + cz^2)\}e^{-x^2-y^2-z^2} \\ f_z(x,y,z) &= \{2cz - 2z(ax^2 + by^2 + cz^2)\}e^{-x^2-y^2-z^2} \end{aligned}$$

より，$f_x = f_y = f_z = 0$ から得られる次の連立方程式

$$\begin{cases} x(ax^2 + by^2 + cz^2 - a) = 0 \\ y(ax^2 + by^2 + cz^2 - b) = 0 \\ z(ax^2 + by^2 + cz^2 - c) = 0 \end{cases}$$

を解けばよい．

$(x,y,z) = (0,0,0)$ は明らかに停留点である．また，どれかの成分が 0 でない，例えば $x \neq 0$ とすれば，第 1 式より $ax^2 + by^2 + cz^2 = a$ となるので，$a < b < c$ と第 2 式および第 3 式より $y = z = 0$ となる．よって，$ax^2 + by^2 + cz^2 = ax^2 = a$ より，$(x,y,z) = (\pm 1, 0, 0)$ が停留点となる．同様にして，$(x,y,z) = (0,\pm 1,0)$, $(x,y,z) = (0,0,\pm 1)$ も停留点であることがわかる．

また，2 次偏導関数を計算すれば

$$\begin{aligned} f_{xx}(x,y,z) &= (2a - 6ax^2 - 2by^2 - 2cz^2)e^{-x^2-y^2-z^2} - 2xf_x(x,y,z) \\ f_{yy}(x,y,z) &= (2b - 2ax^2 - 6by^2 - 2cz^2)e^{-x^2-y^2-z^2} - 2yf_y(x,y,z) \\ f_{zz}(x,y,z) &= (2c - 2ax^2 - 2by^2 - 6cz^2)e^{-x^2-y^2-z^2} - 2zf_z(x,y,z) \\ f_{xy}(x,y,z) &= -4bxye^{-x^2-y^2-z^2} - 2yf_x(x,y,z) \\ f_{yz}(x,y,z) &= -4cyze^{-x^2-y^2-z^2} - 2zf_y(x,y,z) \\ f_{zx}(x,y,z) &= -4axze^{-x^2-y^2-z^2} - 2xf_z(x,y,z) \end{aligned}$$

となる．これより，ヘッセ行列 M は停留点で対角行列となり，その対角成分が固有値となる．

点 $(0,0,0)$ では $M = \begin{pmatrix} 2a & 0 & 0 \\ 0 & 2b & 0 \\ 0 & 0 & 2c \end{pmatrix}$ より，固有値はすべて正なのでヘッセ行列は正定値である．よって，f は $(0,0,0)$ で極小となり，極小値 $f(0,0,0) = 0$ をとる．

点 $(\pm 1,0,0)$ では $M = \begin{pmatrix} -4ae^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & 2(b-a)e^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & 2(c-a)e^{-1} \end{pmatrix}$ より，固有値は正と負の両方がある．よって，$(\pm 1,0,0)$ で鞍点となり，極値はとらない．

点 $(0,\pm 1,0)$ では $M = \begin{pmatrix} 2(a-b)e^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & -4be^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & 2(c-b)e^{-1} \end{pmatrix}$ より，固有値は正と負の両方がある．よって，$(0,\pm 1,0)$ で鞍点となり，極値はとらない．

点 $(0,0,\pm 1)$ では $M = \begin{pmatrix} 2(a-c)e^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & 2(b-c)e^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & -4ce^{-1} \end{pmatrix}$ より，固有値はすべて負なのでヘッセ行列は負定値である．よって，f は $(0,0,\pm 1)$ で極大となり，極大値 $f(0,0,\pm 1) = \dfrac{c}{e}$ をとる．

（解答終）