

フロンティア数理物質科学I レポート課題1

- 締め切り：

2017年10月23日（月）17:00

- 提出先：

講義開始前に直接提出，またはリーディング事務局レポートボックス
リーディング事務局宛での学内便で送ってもよい。

宛名：⑨7号館化学部門支援室内 リーディングプログラム事務局

- 様式：

A4サイズのレポート用紙。両面使ってよい。

科目名・名前・LP-ID・提出日を記入した表紙をつけること。

レポート用紙の左上をホッチキスでとめること。

言語は日本語または英語とする。

(注意事項)

レポート課題でわからない問題については担当教員まで質問に来てもよいし，学生間で相談して取り組んでもよい。

- 教員に質問する場合には，メールで約束をとり部屋を訪問すること。基本的にメールのみでの質疑応答には応じません。
- 学生で集まって取り組む場合には，問題ごとに『誰と一緒に考えたか』を明記し，特にお世話になったと感じたときには Acknowledgment をつけること。また，相談後は各自で自分の言葉でレポートをまとめること。当然ながら他人のレポートのコピーは厳禁であり，不正が認められた段階で当該学生の成績は不可とする。
- 問題を解く際に文献やネットなどを参考にした場合には，問題ごとに References をつけること。

(数学専攻以外の学生用)

1. 次の漸化式で定まる数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ がある.

$$a_1 = 2, \quad a_{n+1} = \frac{1}{2} a_n + 3 \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

- (1) 一般項 a_n を求めよ.
- (2) 極限值 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ を求めよ.

2. 次の極限を調べよ.

(1) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x^2 - 3x + 6}{x^2 + 3x + 2}$	(2) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 + x^2 - x - 1}{x^2 - 5x + 4}$
(3) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 5x}{x}$	(4) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{e^x}$

3. 次の関数 y の導関数 y' を求めよ. ($\log z = \log_e z$, つまり \log は自然対数)

(1) $y = x^3 \log x$	(2) $y = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	(3) $y = \sin(e^x)$
----------------------	----------------------------------	---------------------

4. 関数 $f(x) = e^{2x} - 6e^x + 5$ について, 以下の問いに答えよ.

- (1) $f(x) = 0$ となる x を求めよ.
- (2) 極限 $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$ と $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ を調べよ.
- (3) 関数 $f(x)$ の増減を調べ, 極値を求めよ.
- (4) $y = f(x)$ のグラフの概形を描け.

5. 次の関数 $f(x, y)$ の偏導関数 $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y)$, $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y)$ を計算せよ.

$$f(x, y) = 2x^3y^4 + 3xy^2 + x^2 + \cos^2 y$$

6. 次の定積分の値を計算せよ.

(1) $\int_0^3 \sqrt{x+1} dx$	(2) $\int_0^{\pi/2} x \cos x dx$
(3) $\int_1^3 \frac{1}{x(x+2)} dx$	(4) $\int_0^{\sqrt{3}} \frac{1}{x^2+1} dx$ (Hint : $x = \tan \theta$)

7. 行列 $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ について

- (1) A の逆行列 A^{-1} を求めよ.
- (2) A の固有値と固有ベクトルを求めよ.

(数学専攻の学生用)

以下の4問から2問以上選んで答えよ (すべて解答してもよい).

1. $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ を \mathbb{R} 上の実数値連続関数列とし, 実数列 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ は実数 a に収束するとする.

(1) $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ が関数 f に \mathbb{R} 上で一様収束するならば

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x_n) = f(a) \quad \cdots (*)$$

が成り立つことを示せ.

(2) $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ がある連続関数 f に \mathbb{R} 上で各点収束するという仮定の下では, (*) は一般に成り立たない. その事実を示すような反例となる関数列 $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ と数列 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ を具体的に挙げよ. また, それらが反例となっていることを説明せよ.

2. n を2以上の自然数とし, \mathbb{C} 上の二変数有理関数体 $\mathbb{C}(x, y)$ の部分体を

$$K = \mathbb{C}(x^n + y^n, xy)$$

とおく.

(1) $\mathbb{C}(x, y)/K$ はガロア拡大であることを示せ.

(2) ガロア群 $\text{Gal}(\mathbb{C}(x, y)/K)$ は位数 $2n$ の二面体群と同型であることを示せ.

3. 任意の有限生成アーベル群 G に対して, G を (抽象群として) 基本群にもつ弧状連結な位相空間 X が存在することを示せ. X の基本群が G となる説明もつけること.

4. G を位数21の非可換群とする.

(1) G の7-Sylow群は正規部分群であることを示せ.

(2) 自明でない準同型 $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \rightarrow \text{Aut}(\mathbb{Z}/7\mathbb{Z})$ を1つ求めよ.

(3) G の生成元と基本関係式を1つ与えよ.