

フロンティア数理物質科学II レポート課題2

- 締め切り：
2017年9月11日(月) 17:00 **必着**
- 提出先：
リーディング事務局レポートボックス
リーディング事務局宛での学内便で送ってもよい。
宛名：⑨ 7号館化学部門支援室内 リーディングプログラム事務局
- 様式：
A4サイズのレポート用紙．両面使ってよい．
科目名・名前・LP-ID・提出日を記入した表紙をつけること．
レポート用紙の左上をホッチキスでとめること．
使用言語は日本語または英語とする．

(注意事項)

レポート課題でわからない問題については担当教員まで質問に来てもよいし、学生間で相談して取り組んでもよい。

- 教員に質問する場合には、メールで約束をとり部屋を訪問すること．基本的にメールのみでの質疑応答には応じません．
- 学生で集まって取り組む場合には、問題ごとに『誰と一緒に考えたか』を明記し、特にお世話になったと感じたときには Acknowledgment をつけること．また、相談後は各自で自分の言葉でレポートをまとめること．当然ながら他人のレポートのコピーは厳禁であり、不正が認められた段階で当該学生の成績は不可とする．
- 問題を解く際に文献やネットなどを参考にした場合には、問題ごとに References をつけること．
- **レポートの内容によっては再提出となることもある．**

1. 弦の振動の数値モデルとして、弦の各点 x における時間 t における変位を $u(x, t)$ とおくと、次の波動方程式

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x, t) = v^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t)$$

がよく知られている。ここで、 $v > 0$ は位相速度と呼ばれる。

適切な仮定の下で、この数値モデルを導出せよ。導出方法は数多く知られているためどのような方法でもよい。1つの参考資料としてスライドを添付するのでこの導出方法でもよいし、知っている別の導出方法でもよい。ただし、スライドでは意図的に計算過程を省略した部分があるので、適宜説明を加えること。

2. 以下の2問のうち、どちらかを1問を選択し解答せよ。

- (1) $U(x)$ を周期 2π の実数値連続関数とし、その最小値を m とする。このとき、実数 E と2階微分可能な関数 $\psi(x)$ が

$$\begin{cases} -\psi''(x) + U(x)\psi(x) = E\psi(x) & (0 < x < 2\pi), \\ \psi(0) = \psi(2\pi), \quad \psi'(0) = \psi'(2\pi), \quad \psi \not\equiv 0 \end{cases}$$

をみたすならば、 $E \geq m$ であることを示せ。

この事実はシュレディンガー方程式に従う現象について、エネルギー E が相互作用や外力などを意味する項であるポテンシャル関数 $U(x)$ の最小値よりも下がらないことを示唆している。

- (2) $a > 0, L > 0$ とする。 $u(0) = 0, u(L) = a$ をみたす $0 \leq x \leq L$ で滑らかな関数 $u(x)$ に対して

$$E[u] = \frac{1}{2} \int_0^L |u'(x)|^2 dx$$

とおく。このとき、 $E[u]$ のこの Dirichlet 条件下での第1変分は

$$\frac{\delta E}{\delta u}[u] = -u''$$

であることを示せ。

これより今回の $E[u]$ を最小にする u は直線であることが具体的にわかる。