

# フロンティア数理物質科学I レポート課題1

- 締め切り：

2016年10月31日（月）

- 提出先：

講義開始前に直接提出，またはリーディング事務局レポートボックス

- 様式：

A4サイズのレポート用紙。両面使ってよい。

科目名・名前・LP-ID・提出日を記入した表紙をつけること。

レポート用紙の左上をホッチキスでとめること。

言語は日本語または英語とする。

## (注意事項)

レポート課題でわからない問題については担当教員まで質問に来てよいし，学生間で相談して取り組んでもよい。

- 教員に質問する場合には，メールで約束をとり部屋を訪問すること。基本的にメールのみでの質疑応答には応じません。
- 学生で集まって取り組む場合には，問題ごとに『誰と一緒に考えたか』を明記し，特にお世話になったと感じたときには Acknowledgment をつけること。また，相談後は各自で自分の言葉でレポートをまとめること。当然ながら他人のレポートのコピーは厳禁であり，不正が認められた段階で当該学生の成績は不可とする。
- 問題を解く際に文献やネットなどを参考にした場合には，問題ごとに References をつけること。

(数学専攻以外の学生用)

1. 次の関数  $f(x, y)$  の偏導関数  $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y)$ ,  $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y)$  を計算せよ.

(1)  $f(x, y) = 2x^3y^4 + 3xy^2 + x^2 + \cos^2 y$

(2)  $f(x, y) = e^{2x} \sin 3y$

(3)  $f(x, y) = \log(x^2 + y^2)$  ( $\log z = \log_e z$ , つまり  $\log$  は自然対数)

2. 曲面  $z = f(x, y) = \frac{y}{x}$  の点  $A(1, 2, 2)$  における接平面の方程式を求めよ.

3. 次の定積分の値を計算せよ.

(1)  $\int_0^3 \sqrt{x+1} dx$

(2)  $\int_2^3 \frac{1}{x^2-1} dx$

(3)  $\int_0^{\pi/2} \sin^2 x dx$

4. 行列  $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$  の逆行列を求めよ. また,  $A$  の固有値と固有ベクトルを求めよ.

(数学専攻の学生用)

1.  $f(x, y, z)$  を  $\mathbb{R}^3$  上の実数値  $C^2$  級関数とし,  $f$  のヘッセ行列を  $H_f(x, y, z)$  とおく. 点  $(a, b, c)$  が  $f$  の臨界点で, さらに  $H_f(a, b, c)$  の固有値がすべて正ならば,  $f$  は点  $(a, b, c)$  で極小となることを『関数の漸近展開』と『2次形式の標準形』を利用して証明せよ.

2. 行列  $A = \begin{pmatrix} a & 0 & -2a \\ -4 & 3 & 5 \\ a & 0 & -2a \end{pmatrix}$  が対角化不可能となるような実数  $a$  の値を求めよ.

さらに, そのときの  $A$  のジョルダン標準形  $J = P^{-1}AP$  および変換行列  $P$  を求めよ.

3.  $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$  を  $\mathbb{R}$  上の実数値連続関数列とし, 実数列  $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$  は実数  $a$  に収束するとする.

(1)  $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$  が関数  $f$  に  $\mathbb{R}$  上で一様収束するならば

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x_n) = f(a) \quad \cdots (*)$$

が成り立つことを示せ.

(2)  $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$  がある連続関数  $f$  に  $\mathbb{R}$  上で各点収束するという仮定の下では, (\*) は一般に成り立たない. その事実を示すような反例となる関数列  $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$  と数列  $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$  を具体的に挙げよ. また, それらが反例となっていることを説明せよ.

4.  $X$  を位相空間,  $Y$  をハウスドルフ空間とすると, 連続写像  $f: X \rightarrow Y$  のグラフ

$$G := \{(x, f(x)) \in X \times Y \mid x \in X\}$$

は直積位相空間  $X \times Y$  の閉集合であることを証明せよ.