電気回路とランダム・ウォーク

確率統計委員会・深川　久（豊中高校）

2002 年 3 月 17 日

1　はじめに

数学では，一見異なる問題が実は同じ仕組みであるという場面がたびたび現れる。はじめのうちは互いの関連がつかめない個別事象の羅列にしか見えないものが，やがてその背景にある仕組みに目が止まるようになり，結局同じことではないか，という見方ができるようになってくる。そのようなとき，何かがわかったような気分になる。

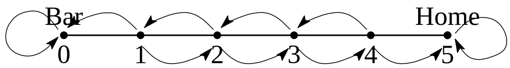
確率統計委員会でこの一年間読んできた [1] は，そのような問題の好例を与えている。ランダム・ウォークとギャンブラーの破産問題は，マルコフ連鎖を扱った確率論の教科書では必ず取り上げられているといってもいい典型的な例だが，同書では，これらと抵抗回路との類似を示し，そのアナロジーを推し進めることによって単純ランダム・ウォークの再帰性に関するポリアの古典的結果を証明している。

本稿では，高校で扱う確率や数列に関する知識との関連に気を配りながら，できるだけやさしく同書の中心的なアイディアを紹介したい。

2　1 次元ランダムウォーク・ギャンブラーの破産・直列抵抗回路

はじめに，次のような問題を考えよう。有限区間のランダム・ウォークである。

例 2.1. 交差点 0〜5 を持つ 5 ブロックの通りがある (0 を Bar，5 を Home とする)。交差点 x（$1 \leqq x \leqq 4$）にいる酔っ払いが各ステップで確率 $\frac{1}{2}$ で $x-1$ または $x+1$ へ移動するものとする。また，Bar か Home にたどり着いたらもう動かないものとしよう。このとき，交差点 x にいる酔っ払いが Home にたどり着く確率 $p(x)$ を求めよ。



x にいる酔っ払いが家に着くという事象を，次の二つの事象に分けて考えよう。

A_1：まず最初のステップで $x-1$ へ移動し，そこから，最終的に家に着く。
A_2：まず最初のステップで $x+1$ へ移動し，そこから，最終的に家に着く。

このとき，これらの事象が背反であることと，その和事象がもとの事象であることから，

$$p(x) = \frac{1}{2}p(x-1) + \frac{1}{2}p(x+1) \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ①$$

という関係式を得る。また，最初に Bar にいれば留まり続けて家には帰れず，最初に Home にいればすでに帰宅しているわけだから，

$$p(0) = 0,\ \ p(5) = 1 \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ②$$

となる。

①は数列 $\{p(x)\}$ が等差数列であることを示しており，②は初項と末項を与えている。これらから $p(x)$ の値は一意的に定まり，$p(x) = \frac{x}{5}$ である。

ここでは，結果よりも，関係式①の元では両端の値で途中の値が決まってしまう，というところに目を留める。この考え方を後に発展させる。

次に，「ギャンブラーの破産」問題をみよう。

例 2.2. ピーターとポールが，あわせて 5 ペニー持っている。硬貨を投げて表が出たらピーターがポールから 1 ペニーもらい，裏が出たらポールがピーターから 1 ペニーもらうものとする。これを，一方が 5 ペニーとも獲得し，他方が所持金 0（破産）となるまで続ける。最初にピーターの所持金が x ペニーから始めたときに，ピーターが 5 ペニーを獲得して終わる確率を $p(x)$ を求めよ。

最終的にピーターが勝って全財産を手にし，ポールが破産するという事象を，次の二つの事象に分けて考えよう。

B_1：最初の勝負でピーターが負けて，そこから，最終的にはピーターが勝つ。
B_2：最初の勝負でピーターが勝って，そこから，最終的にはピーターがかつ。

このとき，これらの事象が背反であることと，その和事象がもとの事象であることから，

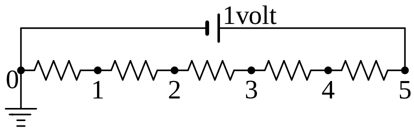
$$p(x) = \frac{1}{2}p(x-1) + \frac{1}{2}p(x+1)$$

という関係式を得る。また，最初の財産が 0 ペニーであればその時点で破産状態で勝負すらできずに負けており，5 ペニーであれば勝ちが確定しているので，

$$p(0) = 0,\ \ p(5) = 1$$

となる。$p(x)$ の満たす条件はランダム・ウォークの場合と全く同じであり，この条件下での解の一意性から，解の形も同じになる。

さて，ここで次のような抵抗回路を考えよう。



抵抗はすべて同じ値 R をとるとする。点 x における電位を v_x とする。1 ボルトの電圧がかけられているとき，点 0 における電位を $v_0 = 0$ とすると，点 5 における電位が $v_5 = 1$ となる。2 点 $x-1$，x 間に流れる電流を i とすると，オームの法則によって，$v_x - v_{x-1} = iR$ が成り立つ。点 x に流れ込む電流と流れ出す電流が同じ大きさである（キルヒホッフの法則）ことから，次の関係式が得られる。

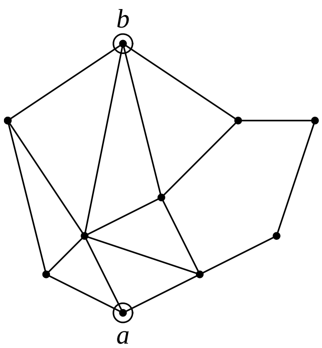
$$v_x - v_{x-1} = v_{x+1} - v_x,\ \text{したがって},\ v_x = \frac{1}{2}v_{x-1} + \frac{1}{2}v_{x+1} \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ③$$

すなわち，$\{0,1,2,3,4,5\}$ 上の関数として，v_x は①，②と同じ条件を満たしている。解の一意性から，$p(x) = v_x$ となる。

以上より，これらのランダム・ウォーク，ギャンブラーの破産問題，抵抗回路の各点での電位はすべて同じ構造を持っていることがわかる。すなわち，0 から 5 までの 6 つの頂点が線分で一列に結ばれた図形に対して，各頂点に実数が対応しており，両端以外の頂点では関係式 1 を満たしている。このとき，両端の値で他の頂点の値は決まってしまい，上の三つの問題の解は同じ関数で表される。次節で，この状況を一般化していこう。

3　等差数列と調和関数

前節における頂点が一列に並んだ図を，図のような頂点と辺からなるグラフ G に一般化して考えよう。以下で考えるグラフは，頂点の個数が有限であり，任意の 2 頂点 x，y に対してそれらを結ぶ辺の列がとれるようなものだけを考える。このグラフの頂点の集合 $V(G)$ の部分集合 S が指定されているとする。例えば，右図で $S = \{a, b\}$ と考えよう。



$f : V(G) \to \mathbb{R}$ を，このグラフの頂点集合上の実数値関数とする。前節の例における「値 $p(x)$ が，隣接する 2 つの頂点での値 $p(x-1)$，$p(x+1)$ の平均に等しい」という条件①に対応するものとして，次の条件を考える。

$$f(x) = \frac{1}{d(x)} \sum_{y} f(y)$$

ここで，和は x に隣接する頂点 y 全体にわたってとっている。また，$d(x)$ は頂点 x の次数，すなわち辺 x を端点にもつ辺の本数である。この条件がなりたっているとき，頂点集合上の関

数 f は x において調和であるという。また，f が S 以外のすべての点において調和であるとき，S を境界とする調和関数と呼ぶ。

項数が固定されているとき，等差数列が初項と末項の値で決まるように，土台となるグラフおよび境界点の集合 S は固定されているとき，その上の調和関数は境界での値によって決まる。すなわち，頂点集合上の関数 f と g が境界 S における点で同じ値をとるならば，実は $f = g$ である。これを以下に示す。

補題 3.1. 調和関数 $V(G) \to \mathbb{R}$ に対し，最大値・最小値をとる点は境界 S 上に存在する。

証明. 境界以外の頂点 x において最大値をとるとする。このとき，列 $x = x_0$，x_1，$\cdots$，$x_n = y$ で，$x_i (0 \leqq i < n-1)$ は境界点でなく，y が境界点となるものがとれる。もし，$f(x_0) < f(x_1)$ であるとすると，調和性から x_0 に隣接する頂点でそこでの f の値が $f(x_0)$ より大きなものがなければならず，$f(x_0)$ の最大性に反する。従って，$f(x_1) = f(x_0)$。この議論を繰り返せば，$f(x) = f(y)$ が得られ，境界点 y でも最大値をとることが導かれる。最小値に関しても同様。 □

補題 3.2. 2 つの調和関数 f，g が境界点上で一致すれば，$f = g$ である。

証明. 調和関数の差 $f - g$ も調和関数となることは容易に示せる。このとき，f，g は境界点上で一致しているので，差 $f - g$ は境界点上で常に 0 を値にとる。一方，前補題より調和関数は最大値・最小値を境界上でとるので，最大値・最小値ともに 0 となり，定義域全体で $f - g = 0$ が導かれる。すなわち，$f = g$ である。 □

さて，これをもう一段変形してみよう。はじめに挙げた有限区間上のランダム・ウォークの例では，ある頂点から 1 ステップで隣接する 2 頂点に移る確率をともに 1/2 と考えた。これが等確率でなければこれまでの設定はどう変わるだろうか。上でグラフ上の調和関数をある頂点での関数値が隣接頂点での値の単純平均になっているという性質によって定義したが，重みつき平均で置き換えてみよう。

有限グラフ G の頂点の順序対 (x, y) に対して，1 ステップで x から y に移る確率 p_{xy} が与えられているとする。ある時点で頂点 x にいるランダム・ウォーカーは，1 ステップ後にはかならず隣接するいずれかの頂点に移動しているものとする。すなわち，$x \in V \setminus S$ に対して $\sum_y p_{xy} = 1$（y は x に隣接する頂点全体にわたる）が成り立つと仮定する。このような p_{xy} をグラフ上のランダム・ウォークと呼ぶ。

さらに，任意の 2 頂点 x, y に対して，頂点の有限列 $x_0 = x, x_1, \cdots, x_n = y$ があり，$p_{x_i x_{i+1}} \neq 0$ であるものと仮定する。すなわち，一方から他方へ決して到達し得ないような 2 点は存在しないという仮定を置く。

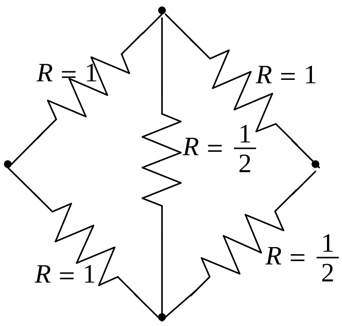
このとき，頂点集合上の関数 f が，上のようなランダム・ウォークに関して頂点 x において調和であるとは，次の関係式が成り立っていることをいう。

$$f(x) = \sum_y p_{xy} f(y)$$

頂点集合の部分集合 $S \subset V$ が与えられており，S に属さないすべての頂点 x で調和であるとき，f はこのランダム・ウォークの境界 S を持つ調和関数であるという。ランダム・ウォーク上の境界を持つ調和関数に関しても，最大値・最小値を境界上でとるという性質（最大値原理）や，境界で一致する二つの調和関数は定義域全体で一致するという性質（一意性）が成り立つことが全く同様に示される。

4　グラフ上のランダムウォークと一般抵抗回路

4.1　記号と設定



グラフ上のランダム・ウォークに関する調和関数の一意性を利用しながら，抵抗回路とランダム・ウォークのアナロジーを追求しよう。

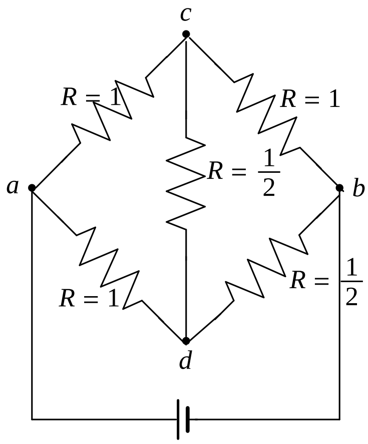
図のような抵抗回路を考える。回路を自然にグラフと考える。各辺 xy の抵抗値を R_{xy} とする。コンダクタンス C_{xy} を $C_{xy} = 1/R_{xy}$ と定義する。$R_{xy} = R_{yx}$ である。また，$C_x = \sum_y C_{xy}$，ただし y は x に隣接する頂点全体にわたる，とおく。これらを用いて，グラフ上のランダム・ウォークを次のように構成しよう。

頂点 x にいるランダム・ウォーカーが, 1 ステップ後に頂点 y に移る確率 p_{xy} を $p_{xy} = C_{xy}/C_x$, ただし $C_x = \sum_y C_{xy}$，と定義する。このとき，この p_{xy} がランダム・ウォークを与えている。

$$\sum_y p_{xy} = \sum_y \frac{C_{xy}}{C_x} = \frac{C_x}{C_x} = 1$$

以上のように，抵抗回路とグラフ上のランダム・ウォークを対応させて考える。回路の 2 頂点間に電圧をかけたとき，各頂点における電圧や各辺を流れる電流，また 2 頂点間の有効抵抗・有効コンダクタンスなどがランダム・ウォークの言葉では何に対応しているのかを見ていこう。

4.2　電圧と確率



抵抗回路上の 2 頂点 $S = \{a, b\}$ を選び，その間に単位電圧をかける。各頂点 x における電位を v_x と表し，$v_a = 1$，$v_b = 0$ とする。

また，隣接する頂点 x，y に対して，x から y へ流れる電流を i_{xy} で表す。$i_{xy} = -i_{yx}$ である。このとき，$x \neq a, b$ において，次の 2 つの関係式が成り立つ。

$$\sum_y i_{xy} = 0 \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \text{④}$$

$$i_{xy} = \frac{v_x - v_y}{R_{xy}} \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \text{⑤}$$

④はキルヒホッフの法則であり，⑤はオームの法則である。a, b においては，回路外から流れ込む電流があるので，はじめに与えた回路上の辺だけを対象とした場合には④が成り立たない。

頂点 $x \neq a, b$ において，上の 2 つの関係式から次が得られる。

$$\sum_y \frac{v_x - v_y}{R_{xy}} = 0$$

$$\sum_y v_x C_{xy} = \sum_y v_y C_{xy}$$

$$v_x C_x = \sum_y v_y C_{xy}$$

$$v_x = \sum_y v_y \frac{C_{xy}}{C_x} = \sum_y v_y p_{xy}$$

つまり，v_x は境界 S を持つ調和関数である。

さて，同じ境界値を持つ調和関数がもうひとつ存在する。前項のように抵抗回路とランダム・ウォークを対応させたとき，頂点 x から出発したランダム・ウォーカーが b に着く前に a に着く確率を $p(x)$ としよう。このとき，「b に着く前に a に着く」という事象を，1 ステップ後に隣接する頂点 y に移動し，その後，y から出発して最終的に a に着く，という事象に分解することにより，次の関係式を得る。

$$p(x) = \sum_y p_{xy} p(y)$$

これは $p(x)$ が $S = \{a, b\}$ を境界にもつ調和関数であることを示している。$p(a) = 1$，$p(b) = 0$ であるので，境界で一致する調和関数の一意性によって，$p(x) = v_x$ である。

結果をまとめておこう。

定理 4.1. 抵抗回路の 2 点 a，b 間に，$v_a = 1$，$v_b = 0$ となるように単位電圧をかけたとき，各頂点 x における電位 v_x は，頂点 x から出発したランダム・ウォーカーが b に着く前に a に着く確率に等しい。

4.3 電流と期待値

次に，電流について調べよう。今度は，ランダム・ウォーク側の見方から始める。頂点 a を出発したランダム・ウォーカーが，頂点 b に到着するまで歩きつづけるものとする。途中，a に立ち寄ることがあっても，そこで停止することなく，b に到達するまで歩きつづける。このとき，b に着くまでに頂点 x を訪れる回数の期待値を u_x で表す。b に始めて到達した時点で停止するので，b に着く前に b を訪れる回数は 0 回だから，$u_b = 0$ である。

さて，「x を訪れる回数」という確率変数を，「どこから x にやってくるか」に注目して分解してみる。x に隣接する頂点 y について「1 ステップ前は y にいて x を訪れる回数」という確率変数を考える。これらの隣接頂点 y にわたる和が「x を訪れる回数」であるから，期待値の加法性によって次の関係式を得る。

$$u_x = \sum_y u_y p_{yx}$$

このとき，$x \neq a, b$ において次が成り立つ。

$$\frac{u_x}{C_x} = \frac{1}{C_x}\sum_y u_y \frac{C_{yx}}{C_y} = \sum_y \frac{u_y}{C_y}\frac{C_{xy}}{C_x} = \sum_y \frac{u_y}{C_y} p_{xy}$$

これは，頂点集合上の関数 u_x/C_x が $S = \{a, b\}$ を境界に持つ調和関数であることを示している。境界値は，a において u_a/C_a，b において $u_b/C_b = 0$ である。

調和関数が得られれば，電圧としての解釈が可能である。$v_a = u_a/C_a$，$v_b = 0$ となる電圧をかければ，そのときの頂点 x における電位 v_x は u_x/C_x と同じ境界値を持つ調和関数になる。従って，一意性により $v_x = u_x/C_x$ である。

電圧としての解釈ができれば，オームの法則を通して電流との関連がつく。

$$i_{xy} = (v_x - v_y)C_{xy} = \left(\frac{u_x}{C_x} - \frac{u_y}{C_y}\right)C_{xy} = \frac{u_x C_{xy}}{C_x} - \frac{u_x C_{xy}}{C_y} = u_x p_{xy} - u_y p_{yx}$$

ここで，$u_x p_{xy}$ はウォーカーが x から y へ辺 xy を通る回数の期待値である。また，$u_y p_{yx}$ は逆に y から x の方へ通る回数の期待値である。従って，その差 $u_x p_{xy} - u_y p_{yx}$ は，逆向きに通ったときには -1 回とカウントしたときの，辺 xy を x から y へ通過する回数の期待値である。

なお，以上の設定で，a において外部から流れ込む電流 i_a は，$i_a = \sum_y i_{ay}$ であるが，これはウォーカーが a から出る回数と a に入る回数の差の期待値だから，1 である。すなわち，2 点

a, b 間には単位電流が流れている。

定理 4.2. a から b へ単位電流が流れるとき，x から y への辺 xy を流れる電流 i_{xy} は，a から出発したウォーカーが b に着くまでに，辺 xy を x から y へ通過する回数（逆向きに通るときは -1 回と数える）の期待値である。

4.4　有効抵抗と逃走確率

$v_a = v, v_b = 0$ となるように ab 間に電圧がかけられているとしよう。頂点 a において外部から流れ込む電流の総量は $i_a = \sum_y i_{ay}$ である。これは，回路全体の抵抗によって決まる。a と b の間の有効抵抗 R_{eff} を，$R_{eff} = v_a/i_a$ で定義する。また，その逆数 $1/R_{eff} = i_a/v_a$ を有効コンダクタンスと呼び C_{eff} で表す。ab 間の電圧を k 倍すれば電流も k 倍になるので，有効抵抗・有効コンダクタンスは $v_a = v$ の値によらない。

特に，単位電圧 $v_a = 1$ をかけた状態で考えることにしよう。このとき，$C_{eff} = i_a$ となる。オームの法則を使えば，i_a は次のように変形できる。

$$i_a = \sum_y (v_a - v_y)C_{ay} = \sum_y (v_a - v_y)\frac{C_{ay}}{C_a}C_a = C_a(1 - \sum_y p_{ay}v_y)$$

ここで，$1 - \sum_y p_{ay}v_y$ は，a から出発したランダム・ウォーカーが a に戻る前に b に着く確率である。これを逃走確率と呼び p_{esc} で表そう。すると，上の変形から $C_{eff} = C_a p_{esc}$ であり，$p_{esc} = C_{eff}/C_a$ である。すなわち，コンダクタンスから（従って有効抵抗から）逃走確率が求められる。

4.5　再帰性

以上のように，有限グラフ上のランダム・ウォークと抵抗回路の対応によって，電圧，電流，有効抵抗などが確率や期待値として解釈できる。

さらに，これらの対応を推し進めて，ランダム・ウォークの再帰性に関するポリアの古典的結果を示そう。ポリアによる再帰性に関する結果を述べる。

n 次元座標空間において，各成分がすべて整数である点を格子点と呼ぶ。2 つの格子点は，ただ 1 つの成分の値だけが 1 だけ異なるときに隣接しているという。原点から出発し，1 ステップで隣接する格子点のいずれかに等確率で移るようなランダム・ウォークを考えよう。このとき，「原点から出発してランダム・ウォーカーが，やがて再び原点に戻ってくる確率は 1 であるか」という問いを立てよう。1 次元，2 次元に対しては，この答えは Yes であるが，3 次元以上では No である，といのがポリアの結果である。つまり，一本道や平面上で迷った酔っ払いは，交差点ごとにサイコロを振ってさまよえばやがては（とんでもない長時間後にせよ）

出発点に戻れるが，3 次元空間内でさまよう酔っ払いは永遠に戻れないかもしれない，というのである。

回路のアナロジーでこの証明を得るために，次節でエネルギーという概念を導入する。

5　レイリーの単調性定理

5.1　フローとエネルギー損失

抵抗回路が与えられているとする。2 頂点 ab 間に電圧をかける。抵抗 R_{xy} を電流 i_{xy} が流れたとき，$i_{xy}^2 R_{xy}$ の値をエネルギー損失と呼ぶ。x から y への電圧降下を $v_{xy} = i_{xy} R_{xy}$ とすると，$i_{xy}^2 R_{xy} = i_{xy} v_{xy}$ である。

回路全体の全エネルギー損失 E を次式で定義する。

$$E = \frac{1}{2} \sum_{x,y} i_{xy}^2 R_{xy} = \frac{1}{2} \sum_{x,y} i_{xy}(v_x - v_y)$$

ここで，回路における電流の概念を一般化して，グラフ上のフロー j を次のように定義する。グラフ G の辺集合上の関数 $j = \{j_{xy}\}$ が次の性質を持つとき，G 上の a から b へのフローという。

(1) $j_{xy} = -j_{yx}$
(2) $\sum_y j_{xy} = 0$（$x \neq a, b$）
(3) $j_{xy} = 0$ （x と y が隣接していないとき）

ここで $j_x = \sum_y j_{xy}$ とおく。上の性質 (2) より，$x \neq a, b$ のとき $j_x = 0$ である。また，$j_a + j_b = \sum_x j_x = \sum_x \sum_y j_{xy} = 1/2 \sum_{x,y}(j_{xy} + j_{yx}) = 0$ より，$j_a = -j_b$ である。

補題 5.1 (エネルギー保存). 頂点集合上の任意の関数 w と，a から b へのフロー j に対して，次が成り立つ。

$$(w_a - w_b) j_a = \frac{1}{2} \sum_{x,y} (w_x - w_y) j_{xy}$$

証明.

$$\begin{aligned}
\sum_{x,y}(w_x - w_y) j_{xy} &= \sum_x (w_x \sum_y j_{xy}) - \sum_y (w_y \sum_x j_{xy}) \\
&= w_a \sum_y j_{ay} + w_b \sum_y j_{by} - w_a \sum_x j_{xa} - w_b \sum_x j_{xb} \\
&= w_a j_a + w_b j_b - w_a(-j_a) - w_b(-j_b) \\
&= 2(w_a - w_b) j_a
\end{aligned}$$

□

電流 i はフローの一つである。抵抗回路に対して，一般のフローの中で特に電流フローはどのような性質によって特徴づけられるのかを考えよう。

エネルギー保存補題より，次が成り立つ。

$$v_a i_a = \frac{1}{2}\sum_{x,y}(v_x - v_y)i_{xy} = \frac{1}{2}\sum_{x,y} i_{xy}^2 R_{xy}$$

ここで，$R_{eff} = v_a/i_a$ だったので，次式が得られる。この式の右辺が先に定義したエネルギー損失であった。

$$i_a^2 R_{eff} = \frac{1}{2}\sum_{x,y} i_{xy}^2 R_{xy}$$

$i_a = 1$ となるように電圧 v_a を調整したときの電流 i を単位電流フローという。一般に，フロー j で $j_a = 1$ となるものを単位フローというが，単位電流フローはその中の特別なものである。上の関係式より，単位電流フローのエネルギー損失は R_{eff} である。じつは，あらゆる単位フローの中で，エネルギー損失を最小にするものが単位電流フローである。

定理 5.2 (トンプソンの定理). i をキルヒホッフの法則とオームの法則によって定まる a から b への単位電流フローとすると，そのエネルギー損失 $(\sum_{x,y} i_{xy}^2 R_{xy})/2$ は，他の任意の単位フロー j のエネルギー損失 $(\sum_{x,y} j_{xy}^2 R_{xy})/2$ 以下である。

証明. j を a から b への任意の単位フローとし，$d_{xy} = j_{xy} - i_{xy}$ とおく。このとき，d は a から b へのフローであり，$d_a = \sum_x d_{ax} = j_a - i_a = 1 - 1 = 0$ である。

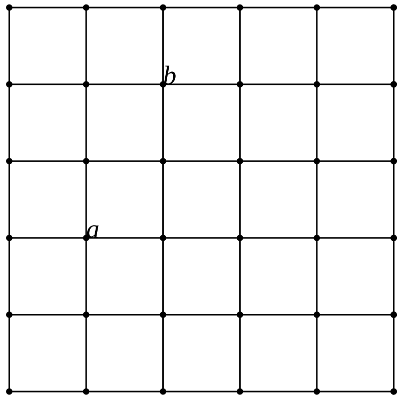
$$\begin{aligned}\sum_{x,y} j_{xy}^2 R_{xy} &= \sum_{x,y}(i_{xy} + d_{xy})^2 R_{xy} \\ &= \sum_{x,y} i_{xy}^2 R_{xy} + 2\sum_{x,y} i_{xy} R_{xy} d_{xy} + \sum_{x,y} d_{xy}^2 R_{xy} \\ &= \sum_{x,y} i_{xy}^2 R_{xy} + 2\sum_{x,y}(v_x - v_y) d_{xy} + \sum_{x,y} d_{xy}^2 R_{xy}\end{aligned}$$

エネルギー保存定理で $w = v$，$j = d$ とおくと，$(v_a - v_b)d_a = (\sum_{x,y}(v_x - v_y)d_{xy})/2$ であり，$d_a = 0$ から $\sum_{x,y}(v_x - v_y)d_{xy} = 0$ である。したがって，

$$\sum_{x,y} j_{xy}^2 R_{xy} = \sum_{x,y} i_{xy}^2 R_{xy} + \sum_{x,y} d_{xy}^2 R_{xy} \geqq \sum_{x,y} i_{xy}^2 R_{xy}$$

□

5.2　レイリーの単調性定理



右図のような街路を a から出発して，各交差点で隣接する交差点へ等確率で移動するランダム・ウォークを考える。a から出発して a に戻る前に b にたどり着く確率を考えよう。ここで，通りの一つが封鎖されたら，b にたどり着く確率はどうなるだろうか。通り道が減るのだから，たどり着きにくくなるだろう，と思う。実際その通りなのだが，もし封鎖された道が a から見て b と正反対の側で，いわば遠ざかる路を断つような形であったとしても，b へたどり着く確率は減るのだろうか。やはり証明が必要なようである。

この問題を電気回路の設定で考えよう。一つの通りを封鎖するとは，ある辺に置かれた抵抗の値を無限大に増加させることと考えられる。このとき，もし ab 間の有効抵抗が増加するのであれば，a から b への逃走確率 $p_{esc} = C_{esc}/C_a = 1/(4R_{esc})$ が減少することになり，たしかに b へたどり着く確率は減る。従って，上の問題は「部分的に抵抗値を増加させたときに，2 点間の有効抵抗は増加するか」という問題に書きなおせる。

定理 5.3 (レイリーの単調性定理). 抵抗回路において，一部の抵抗値を増加させれば，任意の 2 点間の有効抵抗も増加する。逆に，一部の抵抗値を減少させれば，任意の 2 点間の有効抵抗も減少する。

証明. はじめに各辺に置かれている抵抗を R_{xy} とする。このときの単位電流フローを i とする。また，抵抗 $\overline{R}_{xy}$ で $\overline{R}_{xy} \geqq R_{xy}$ なるものをとり，対応する単位電流フローを j とする。このとき，

$$\overline{R}_{eff} = \frac{1}{2}\sum_{x,y} j_{x,y}^2 \overline{R}_{xy} \geqq \frac{1}{2}\sum_{x,y} j_{x,y}^2 R_{xy}$$

ここで，j は a から b への単位フローだから，トンプソンの定理によって抵抗 R_{xy} を用いたエネルギー損失は，i のエネルギー損失以上でなければならない。

$$\frac{1}{2}\sum_{x,y} j_{xy}^2 R_{xy} \geqq \frac{1}{2}\sum_{x,y} i_{xy}^2 R_{xy} = R_{eff}$$

従って，$\overline{R}_{eff} \geqq R_{eff}$ が得られた。減少の場合も同様。 □

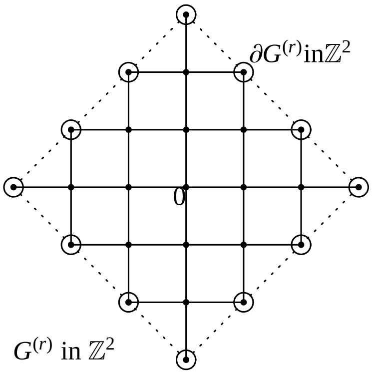
部分的に通りを封鎖すれば，逃走確率は低下する。この事実が次節で利用される。

6　酔っ払いは家に帰り着くか：ポリアの再帰性定理

6.1　設定

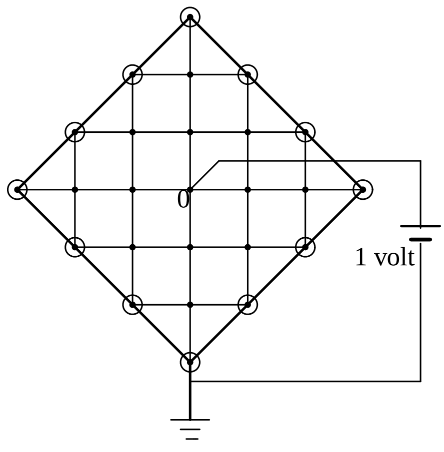
単純ランダムウォークの再帰性に関するポリアの結果を，電気回路の設定で理解することが目的である。

d 次元単純ランダム・ウォークとは，d 次元座標空間内の格子点を座標軸に平行な辺で結んだ無限グラフ $\mathbb{Z}^d$ において，格子点にいるランダム・ウォーカーが隣接する格子点に等確率（従って確率 $1/(2d)$）で移動するようなランダム・ウォークをいう。



このランダム・ウォークが再帰的であるとは，有限の時間内（ただしあらかじめ固定された有限時間ではなく，ランダムに決まる）に再び原点に帰ってくる確率が 1 であることをいう。

d 次元ランダム・ウォークが再帰的がどうかは次元 d に依る。ポリアによれば，$d = 1, 2$ であれば再帰的であり，$d \geqq 3$ では再帰的ではない。以下これを示したい。



無限グラフ上の問題を，有限グラフの設定に帰着させるために，少し記号を準備する。d 次元格子 $\mathbb{Z}^d$ の中で，原点からの格子距離が r 以下の格子点からなる部分グラフを $G^{(r)}$ とする。ここで 2 つの格子点間の格子距離とは，2 点を最小の本数の辺で結んだときの辺の本数のことをいう。また，原点からの格子距離がちょうど r である格子点の全体を $\partial G^{(r)}$ と書く。右図は 2 次元の場合の $G^{(3)}$ とその境界 $\partial G^{(3)}$ である。

$G^{(r)}$ 上のランダム・ウォークを，原点から出発したウォーカーが，$\partial G^{(r)}$ に着くまで $\mathbb{Z}^d$ 上のランダム・ウォークに従って移動し，$\partial G^{(r)}$ にたどり着けばそこに留まる，というものとして定める。$p_{esc}^{(r)}$ を，0 から出発したランダム・ウォーカーが 0 に戻る前に $\partial G^{(r)}$ につく確率とする。p_{esc} は r が増加するにつれて減少する。$p_{esc} = \lim_{x\to\infty} p_{esc}^{(r)}$ が無限グラフに対する逃走確率である。この逃走確率が 0 であれば，無限グラフ上の単純ランダム・ウォークは再帰的であり，正の値を持てば，再帰的ではない。

さて，これを抵抗回路による設定に焼きなおそう。格子グラフのすべての辺には単位抵抗が置かれているとする。逃走確率 p_{esc} を回路の言葉で解釈するため，$\partial G^{(r)}$ の点をすべて接地し，原点を 1volt となるように電圧をかけ，回路を流れる電流 $i^{(r)}$ を測ろう。題 4.4 項で見たように，

$$p_{esc}^{(r)} = \frac{i^{(r)}}{2d} = \frac{1}{2dR_{eff}^{(r)}}$$

である（単位電圧をかけているので $C_{eff} = i_a$，また今の設定では $C_a = 2d$）。原点から無限遠方への逃走確率を R_{esc} を次式で定義する。

$$R_{esc} = \lim_{x\to\infty} R_{eff}^{(r)}$$

このとき，$R_{eff}^{(r)}$ は r に関して増加関数だから，この極限は有限確定値を持つかまたは正の無限大に発散する。これを用いると，

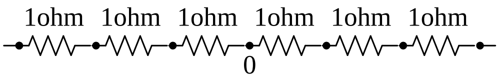
$$p_{esc} = \frac{1}{2dR_{esc}}$$

となる。R_{esc} が無限大の時には $p_{esc} = 0$ である。

以上の設定のもとでは，「**単純ランダムウォークが再帰的であるための必要十分条件は無限遠方への有効抵抗が無限大になることである**」と言い表せる。

6.2　1 次元の場合

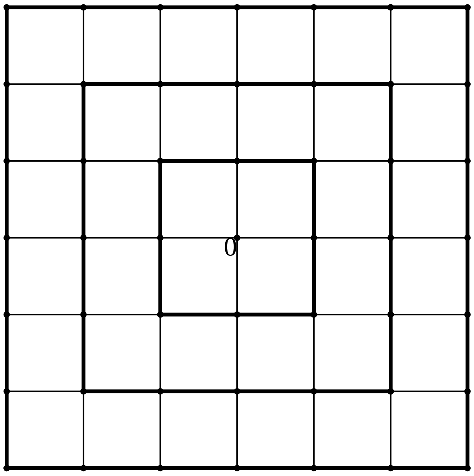
前節までの設定が終われば，1 次元の場合は自明である。格子点を結ぶ各辺上に単位抵抗が置かれていれば，抵抗を直列につないだときの全抵抗は，各抵抗の和であることから，無限遠方への有効抵抗は無限大であることがわかる。従って，1 次元単純ランダム・ウォークは再帰的である。



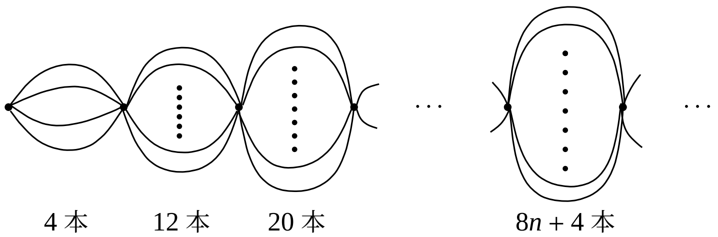
6.3　2 次元の場合

2 次元の場合を考える。目的は無限遠方への有効抵抗が無限大になることを示すことである。レイリーの単調性定理から，回路の中の抵抗を部分的に減少させれば，有効抵抗は減少する。もっとも極端な場合として，抵抗を 0 にする，すなわちショートさせれば，無限遠方への有効抵抗も下がるはずである。そこで，うまく選んだ辺をショートさせて 0 抵抗にし，無限遠方への有効抵抗を計算しやすい形に作り変える。オリジナルの回路よりも減少したはずの有効抵抗がなお無限大であるということが示せれば，それより大きかったはずの元の回路の有効抵抗は当然無限大である。これが方針。あとは，どの辺をショートさせるのかを考えればよい。

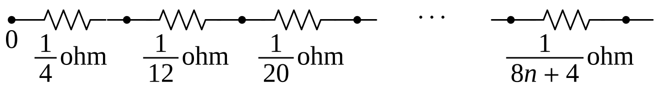
右図のように，原点を中心とする正方形上の頂点同士をショートさせる。太線部分を 1 点につぶすと考えてもよい。



このとき，原点から最初の正方形までは 4 本の単位抵抗で結ばれ，そこから次の正方形までは 12 本の単位抵抗で結ばれ，そこから次の正方形までは 20 本の単位抵抗で結ばれ，というように広がっているので，下図のような抵抗回路と考えることができる。正方形をつぶした点に $1, 2, 3, \cdots$ と番号をふれば，n と $n+1$ の間には $4(2n+1) = 8n+4$ 本の抵抗が並列につながれていることになる。



ここで，抵抗が並列につながれているときの全抵抗の計算を思い出してみれば，単位抵抗が k 本並列につながれているときの全抵抗は $1/k$ であることがわかる。従って，正方形をつぶした点 n と点 $n+1$ の間の抵抗は $1/(8n+4)$ である。



この回路において，無限遠方への有効抵抗は,

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{8n+1} = \infty$$

となる（分母が n の 1 次式だからこの無限級数は正の無限大に発散する)。ゆえに，もとの回路での無限遠方への有効抵抗も無限大であり，2 次元の単純ランダム・ウォークは再帰的であることがわかる。

6.4　3 次元の場合

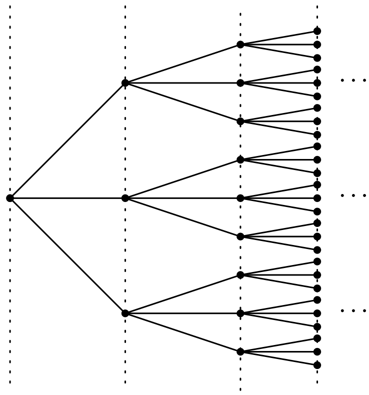
3 次元の場合には，結論から言うと，再帰的ではない。これを示すためには，無限遠方への有効抵抗が有限の値を持つことを示せばよい。ここで再びレイリーの単調性定理を使う。今度

は，抵抗値を増加させよう。そうすれば，無限遠方への有効抵抗も増加する。増加した状態でなお有限の値に収束するのであれば，もとの回路での無限遠方への有効抵抗はもちろん有限である。

もっとも極端に抵抗値を増加させる方法として，2 頂点間の辺を切断しよう。これはその部分の抵抗を無限大にしたと考えられる。うまく選んだ辺を切断して，無限遠方への有効抵抗を計算しやすい形にし，それでもなお有効抵抗が有限の値であることが示せれば目的を達する。

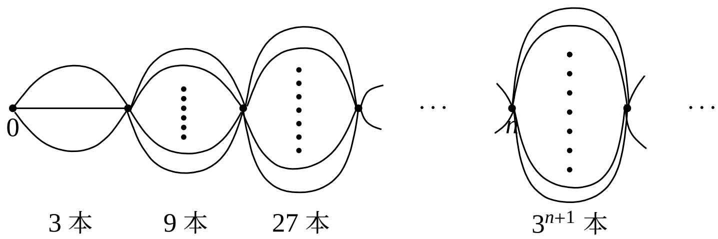
辺を切断するとは，すなわり取り除くことだから，残った部分はもとのグラフの部分グラフである。よい性質を持つ部分グラフを $\mathbb{Z}^3$ の中にとることができれば，目的を達する。

では，よい部分グラフとはどのようなものか。無限遠方までの有効抵抗を計算しやすいグラフとして，ツリーがある。

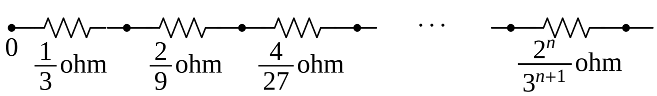


右図のように，1 つの頂点から始まり，各段階で 3 本に分岐するツリーを考えよう。第 1 段階の 3 本の枝には 1ohm の抵抗が，第 2 段階の 9 本の枝には 2ohm の抵抗が，第 3 段階の 27 本の枝には 4ohm の抵抗が，というように，第 n 段階の 3^n 本の枝には 2^{n-1}ohm の抵抗が置かれているとする。このとき，このツリーにおける無限遠方までの有効抵抗を計算してみよう。図において，点線で結んだ頂点どうしは，点 0 から同じ抵抗の辺で隔てられているため，等電位の状態にある。従って，これらの頂点どうしをショートさせて 1 点に接着しても，流れる電流や電位には影響が無い。

このようなショートを行うと，次のような抵抗回路が得られる。



並列につないだ抵抗の計算をすると，これは次のような直列抵抗回路とみなせる。

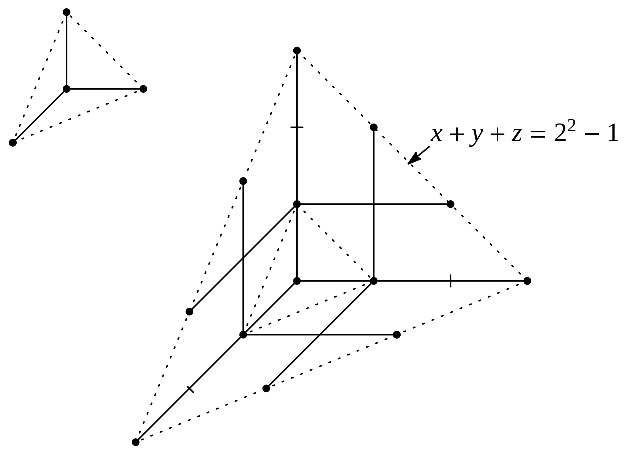


直列抵抗の全抵抗は各抵抗値の和を取ればよいので，この回路の無限遠方への有効抵抗は次のようになる。

$$\frac{1}{3}+\frac{2}{9}+\frac{4}{27}+\cdots=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^k=\frac{1}{3}\frac{1}{1-\frac{2}{3}}=1$$

有効抵抗は有限の値 1 となった。あとは，このツリーを $\mathbb{Z}^3$ の中に埋め込むことができればよい。一段階進むごとに，各枝が 3 本に分かれることと，各段階での枝に置かれる抵抗が 2^n であることから，これは次のように実現できる。

まず, 原点から x 軸, y 軸, z 軸の正の方向に 3 本の枝を伸ばす。これらが平面 $x+y+z=2^1-1$ に達したら，その点から再び x 軸，y 軸，z 軸の正の方向に 3 本の枝を伸ばす。これらが平面 $x+y+z=2^2-1$ に達したら，その点から再び x 軸，y 軸，z 軸の正の方向に 3 本の枝を伸ばす。これを繰り返す。



ここで，埋め込みたいツリーの頂点ではないはずのところで辺が交わっているが，その交点はもともと等電位である 2 点が重なっている（すなわち，原点からの格子距離が同じ点が重なっている）ので，そこでショートさせても有効抵抗には影響しない。従って，3 次元単純ランダム・ウォークは再帰的でないことが示された。

7　おわりに

ランダム・ウォークは確率の問題として入試問題でもしばしば取り上げられるが，このように周辺を膨らませることのできる題材である。

数列や級数は，規則性を利用しながら既知のものから未知のものへと迫っていく方法・手段としての側面をもっている。それ自体の扱いに習熟するだけではなく，どのように使われるかを知ることは大切な事だと思う。また,「等差中項」を表す関係式は，ある種の数列の問題を

要領よく解くためのテクニックの一つとしてのみとらえられがちだが，ある項の値がその項に隣接する 2 項の値の平均になっているという関係は自然に格子やグラフ上で，ある点での値が隣接する点での値の平均値になっているという性質に一般化されて，調和関数というより広いものの見方へとつながっている。このような背景や展望を持つことは，教材の捉え方を広げることにつながるだろう。

計算のみでポリアの再帰性に関する結果を導くとすれば，級数を上から・下から評価して収束・発散を示すところだが，ここでは，その部分を具体的に抵抗回路においてショートさせたり切断したりしながら工作でもするように不等式を作り出している。このあたりの発想は面白い。一般に，級数を評価して収束・発散を示す際の技巧は，慣れないうちは，言われればそうなることは追いかけられてもどうして思いついたのかが見えないことが多いものだが，回路の工作という視点に立つと，なんとか直列抵抗の全抵抗の計算に持ち込もうという方向性が捉えやすい。式変形と直観との橋渡しという視点は参考になる。

文献 [1] ではマルコフ・チェインにも触れながら解説されているが，ここではできるだけやさしく扱うことを第一の目的とし，多くを割愛した。それでも，同書のもっとも中心的なアイディアの部分は紹介できたと思う。確率統計委員会では，毎回行きつ戻りつしながら行き着く先の見えない話を繰り返した。付き合ってくださったメンバーの皆さんに感謝します。

参考文献

[1] Peter G. Doyle, J.Laurie Snell,Random walks and electric networks, Version 3.02, 5 January 2000. （http://front.math.ucdavis.edu/math.PR/0001057）

[2] R.B. シナジ『マルコフ連鎖から格子確率モデルへ』シュプリンガーフェアラーク東京，2001[原著 1999].