パスカルの三角形と 2 進法

1　パスカルの三角形の行に奇数がいくつ含まれるか

右図はおなじみのパスカルの三角形です。この数の並びの中にはさまざまな規則性が隠れていることが良く知られています。以下では，特に，各行が含む奇数の個数に注目してみましょう。

第 0 行　1
第 1 行　1　1
第 2 行　1　2　1
第 3 行　1　3　3　1
第 4 行　1　4　6　4　1
第 5 行　1　5　10　10　5　1
第 6 行　1　6　15　20　15　6　1
第 7 行　1　7　21　35　35　21　7　1
第 8 行　1　8　28　56　70　56　28　8　1

問題 1.1. 第 n 行に含まれる奇数の個数と行番号 n との間にどのような関係があるかを調べよ。

しばらく考えてみてください。それから，次へ進みましょう。

2　2 進法

行に含まれる奇数の個数と行番号の関係は，気がつきにくいかもしれません。ヒントを出しましょう。これは行番号 n の 2 進法による表し方と関係があります。そこで，2 進法とは何かを見ておきましょう。

例 2.1. 10 進法で数を表記するには，0,1,2,3,4,5,6,7,8,9 の 10 種類の数字を用いる。10 進法で 234 と書けば，これは $2 \cdot 10^2 + 3 \cdot 10 + 4$ を意味する。

一方，2 進法で数を表記するには，0,1 の 2 種類の数字を用いる。2 進法で 101 と書けば，これば $1 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2 + 1$ を意味する。

一般に，2 進法表記で「$a_n a_{n-1} a_{n-2} \cdots a_1$」と書き表される数は，「$a_n 2^{n-1} + a_{n-1} 2^{n-2} + a_{n-2} 2^{n-3} + \cdots + a_1 2^0$」を意味する。後者を 10 進法表記のもとで計算すれば，2 進法表記を 10 進法表記に書き直すことができる。

逆に，10 進法で書き表された数を 2 進法で書き表すには，次の例のようにすればよい。

例 2.2. 10 進法で表された 234 を 2 進法で表すには，234 を次々と 2 で割って余りを書き出していけばよい。具体的には右図のようにする。その結果，得られた余りを点線の順に並べたものが，234（10 進法）を 2 進法で表記したものである。

すなわち，11101010（2 進法）。

$$
\begin{array}{r|l l}
2 & \underline{234} & \\
2 & \underline{117} & \cdots 0 \\
2 & \underline{58} & \cdots 1 \\
2 & \underline{29} & \cdots 0 \\
2 & \underline{14} & \cdots 1 \\
2 & \underline{7} & \cdots 0 \\
2 & \underline{3} & \cdots 1 \\
 & 1 & \cdots 1
\end{array}
$$

問題 2.1. 11101010（2 進法）を 10 進法に直し，234 に戻ることを確かめよ。

次の入試問題は，実は 10 進法を 2 進法になおせという問題です。

入試問題に現れた 2 進法の考えかた

$a_1, a_2, \cdots, a_n$ は 0 または 1 であるとし，$\displaystyle\sum_{i=1}^{n} a_i 2^{i-1}$ の形に表される数を考える。自然数 n を固定するとき，この形に表される数全体の集合を S_n とする。

(1) $\displaystyle 50 = \sum_{i=1}^{8} a_i 2^{i-1}$ となるような $a_1, a_2, \cdots, a_8$ を求めよ。

（以下，小問が 2 つ続くが略）

2001・名古屋市立大学

前ページの，2 進法をヒントに，最初の問題をもう少し考えてみてください。まず，行番号 0，1，2，3，4，5，$\cdots$ を 2 進法で表して書き並べてみましょう。その列と，最初に調べたパスカルの三角形の各行に含まれる奇数の個数を見比べて，何か関係に気がつかないでしょうか。

次ページでは答を明かし，以後どうやって証明すればよいかを考えていくことにします。

3　偶数・奇数のつくるパターンを調べる

最初の問題に対する解答は,「行番号を 2 進法表記したときの 1 の個数を $\nu(n)$ とすると，パスカルの三角形に現れる奇数の個数は $2^{\nu(n)}$ 個である。」というものです。

問題 3.1. 本当かどうか，最初の 15 行ほどで確かめてみよ。

以下，この証明を考えましょう。そのために，パスカルの三角形に偶数・奇数がどのように表れるかを調べ，負でない整数を 2 進数で書き表した列に現れる 1 の個数と比較します。まず，パスカルの三角形の方から調べることにします。

パスカルの三角形の作り方を思い出します。第 0 行は，1 が 1 つ置かれているだけでした。第 2 行は，2 つの 1 が並んでいました。以下，第 k 行をもとに，第 $k+1$ 行を次のように作っていきました。

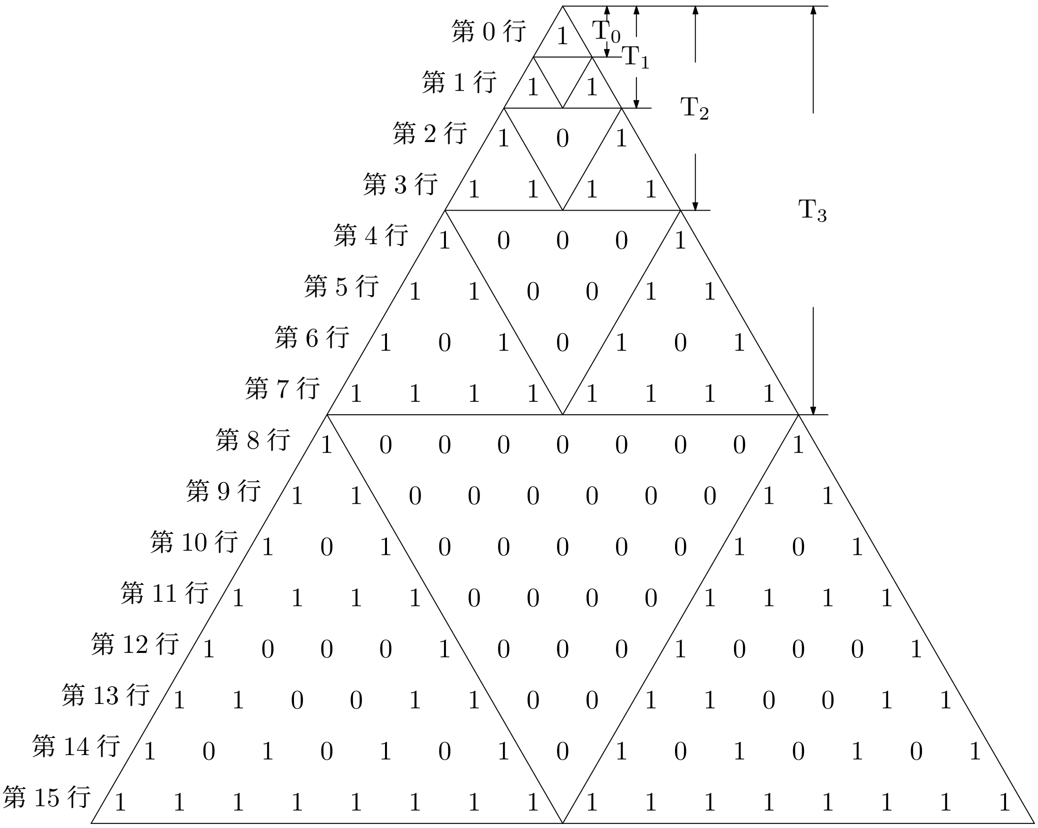
「第 k 行の並んだ 2 個の数に対して，その和を，2 個の数の間の下に書く。また，両端には 1 を置く。」

こうして作ったパスカルの三角形の各行に現れる数が，二項係数 ${}_n\mathrm{C}_r$ と一致したのでした。ここで，最後の一文「また，両端には 1 を置く」が，両端だけ例外的な扱いをしているようで，ちょっといやですね (そう思いませんか?)。次のように考えましょう。「第 0 行には，1 つの 1 と，その両側に無限に続く 0 が並んでいる。ある行から次の行を作るには，隣接する 2 数の和をその 2 数の間の下に書く」。見えているパスカルの三角形の外は書かれていない 0 で埋まっていると見なすことで，前の行から次の行を作る規則が簡明になります。

さらに単純化します。パスカルの三角形に現れる数を先のほうまで調べようとすると，数値が大きくなって面倒です。偶数・奇数の表れ方を調べたいのだから，現れる数を 2 で割った余りで置きかえて，0 と 1 の現れ方を調べれば十分でしょう。しかし，いったんパスカルの三角形を必要な行まで作ってから 2 で割った余りに置き換えるのでは，少しも手間は減りません。1 行作る毎に，2 で割った余り（0 か 1）に直しながら数を書いていき，次の行を計算するときにはこの 0 か 1 を使って和を計算していけば，ずいぶん計算が楽になります。

問題 3.2. こんなことをしてもいい，という為には，足し算と偶数・奇数の関係について確かめておかなければならない性質があります。それはどのような性質でしょうか。

こうやって，計算を楽にしながらパスカルの三角形に現れる数を 2 で割った余りで置きかえて書いていくと，そこにはあるパターンが見えてきます。2 で割った余りのパスカルの三角形を自分で書いてみてください。それから，次のページの図を見てください。



問題 3.3. 上の図をみて，1 の現れ方にどのような規則性があるかを述べよ。

なお，上では 2 で割った余りを考えていますが，一般に素数 p に対して，パスカルの三角形において第 p 行は両端だけが 1 でその間はすべて p で割り切れます。次の入試問題の (1) はこの事実の証明を問うたものです。（実は，第 p^n 行も同様の性質を持つ）

入試問題に現れたパスカルの三角形の特徴

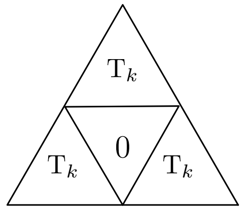
(1) 素数 p と $1 \leqq r \leqq p-1$ なる整数 r に対して，二項係数についての等式 $r\,{}_p\mathrm{C}_r = p\,{}_{p-1}\mathrm{C}_{r-1}$ を証明し，${}_p\mathrm{C}_r$ は p の倍数であることを示せ。

(2) 素数 p に対して，2^p を p で割った余りを求めよ。

1998・奈良女子大学

前ページの 2 で割った余りのパスカルの三角形がもつ規則性を書き表して行きましょう。

前ページの図の中に書き込んであるように，パスカルの三角形から第 0 行から第 2^k-1 行までを取り出したものを T_k と呼ぶことにします。T_0 は第 0 行だけからなり，T_1 は第 0 行から第 1 行までの 2 行分，T_2 は第 0 行から第 3 行までの 4 行分，と続きます。このとき，T_k と T_{k+1} の間には右図のような関係があります。すなわち，T_k のコピーを 2 枚用意して T_k の下に並べ，真中にできた逆三角形の隙間には 0 を並べて埋めたものが T_{k+1} です。



T_{k+1}

前ページの図をよく見て，上の段落の文章が言っていることを確認してください。その上で，次の問いに答えてください。

問題 3.4. T_4 には，第 0 行から第 15 行まで，16 行が含まれている。これを，前半の 8 行（第 0 行から第 7 行まで）と後半の 8 行（第 8 行から第 15 行まで）に分ける。このとき，次の問いに答えよ。

(1) 後半の最初の行（第 8 行）に含まれる 1 の個数をいえ。
(2) 後半の 2 番目の行（第 9 行）に含まれる 1 の個数をいえ。
(3) 一般に，$k \geqq 8$ のとき，第 k 行に含まれる奇数の個数と，第 $k-8$ 行に含まれる奇数の個数との間にはどのような関係があるか。

問題 3.5. 2 で割った余りのパスカルの三角形において，第 2^k 行は 2 個の 1 の間に 2^k-1 個の 0 が並んでいることを証明せよ。

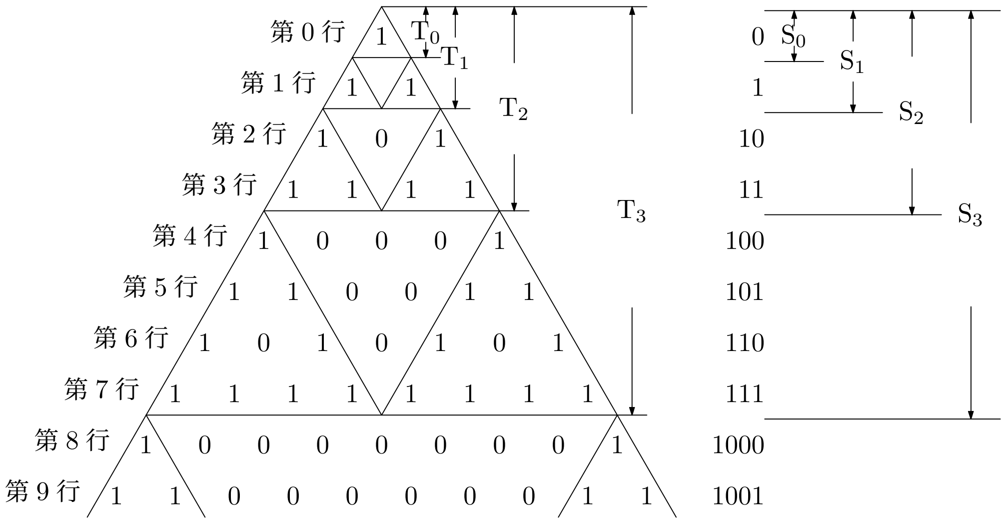
問題 3.6. 「T_k のコピーを 2 枚用意して T_k の下に並べ，真中にできた逆三角形の隙間には 0 を並べて埋めたものが T_{k+1}」であることを証明せよ。（ヒント：第 0 行を 1 つの 1 とその両側に無限に続く 0 とみなした考え方を思い出せ。隣接した n 個の 0 または 1 の並びを与えれば，それを底辺とする逆三角形の数の並びが決まってしまうことを用いよ。パスカルの三角形の異なる部分に同じ数の並びが現れたなら，それらの並びを底辺とする逆三角形部分の数はすべて一致することが使える。）

4　パスカルの三角形の行に含まれる奇数の個数

いよいよ，結果を示すところまで来ました。

定理 4.1. 行番号 n を 2 進法表記したときの 1 の個数を $\nu(n)$ とする*1と，パスカルの三角形に現れる奇数の個数は $2^{\nu(n)}$ 個である。

これを示す為に，前節までに観察した 2 で割った余りのパスカルの三角形の持つ規則性と，行番号を 2 進法で表したものとの関係を調べてみましょう。並べてみれば，次のようになっています。



パスカルの三角形の T_k の最後の行の位置が，行番号を 2 進法表記したものの桁が上がる直前の位置に対応しています。2 進法で表した 0 以上の整数列において，桁数が k 以下の部分を S_k と表すと，T_k の行数と S_k に含まれる数の個数が一致します。

さて，定理 4.1 を，幾つかのステップに分けて示しましょう。次の二つの問題に答えれば，それらを合わせて，パスカルの三角形全体について定理 4.1 が成り立つことが示せたことになります（数学的帰納法）。

問題 4.1. T_0 と S_0 の間では，定理 4.1 の主張が成り立っていることを確かめよ。

---

*1 ν はギリシャ文字で，ニューと読みます。

問題 4.2. T_k と S_k の間で定理 4.1 の主張が成り立っていることを仮定して，T_{k+1} と S_{k+1} の間でも定理 4.1 の主張が成り立っていることを導け。（ヒント：T_{k+1} と S_{k+1} の前半分の行については T_k と S_k そのものであるから仮定により成り立っている。ここから，後半の行に対しても成り立っていることを引き出せばよい。）

5　さいごに

「パスカルの三角形の行に含まれる奇数の個数」という話題は，次の本で知ったものです。

G. ポリア，R.E. タージャン，D.R. ウッズ「組合せ論入門」近代科学社，1986.

この本では，二項係数の式変形によって偶奇性を調べ，厳密だがめんどうな方法で証明が与えられています。その後，2 で割った余りのパスカルの三角形の図を挙げて，「読者の中には，(a) 一般的にこの複製パターンの証明，および (b) 行 n に $2^{\nu(n)}$ 個の奇数が含まれることの証明に使うこと，をいかにできるかについて考えたいという人がいるかもしれない。パスカルの三角形についてはもう十分である！ 講義を続けよう」（同書 p.24）と述べて他の話題に転じています。このテキストでは，この部分を考えてみました。

（深川久　最終更新日：2003 年 8 月 17 日）