統計物理学（冨田：2005年度 後期 木２）　2006/1/26

※ ４題中，３題を選んで解答せよ。

（参考）スターリングの公式： $\log N! \simeq N(\log N - 1)$　（log は自然対数）
$\log(a+x) = \log a + \log(1+x/a) \simeq \log a + x/a$　（$x \ll a$ のとき）

1. 温度 T，圧力 P の気体中に面積 A の円板がつるされている。円板に衝突した気体分子は，表面では完全反射され，裏面では完全吸収される場合に，円板が受ける力を求めよ。

2. {A 状態 : 長さが a でエネルギー 0}，{B 状態 : 長さが $a+b$ でエネルギー ϵ_0} の２状態のみが実現される分子 N 個が直線鎖状につながった長い高分子がある。ただし，$b>0$ とする。［統計力学の世界で最も簡単な２準位系の問題である。講義ノートの演習問題（解答に誤謬あり）から変形されていることに注意。］

   (1) 温度 T のとき，鎖の長さ L を一定に保った状態（すなわち，B 状態の分子数 n を一定に保った状態）の自由エネルギーを求めよ。

   (2) 温度 T における鎖の自然長 L_0 を求めよ。

   (3) $\epsilon_0 = 0$ のとき，温度 T を一定に保ったまま，鎖を自然長から x ($\ll L_0$) だけ引き延ばした状態を保つのに要する外力 $X(T,x)$ を求めよ。

   (4) $\epsilon_0 = 0$ のときは，内部エネルギーは長さによらず一定（＝０）である。温度を一定に保ったまま鎖を引き延ばすのに力，したがって正の仕事を要するのは何故か？

3. カノニカル分布の分配関数の方法を用いて，定積熱容量 $C_{\rm V}$ とエネルギーの分散の間に成り立つ以下の関係式を導け。$\overline{Q}$ は物理量 Q の平均値を表す。

$$C_{\rm V} = \frac{1}{kT^2}\ \overline{(E-\overline{E}\,)^2}$$

   これを用いて，粒子数 N の大きな系では，一般にエネルギーの揺らぎの大きさ $\sqrt{\overline{(E-\overline{E}\,)^2}}$ は平均値 $\overline{E}$ に比べて無視できることを説明せよ。

4. 子供が V 人おり，同じアメが N 個ある。ただし，$N<V$ である。アメを子供に分けるに際して，(1) それぞれの子供に幾つ配ってもよい（Bose-Einstein 統計），(2) それぞれの子供に２個以上は配らない（Fermi-Dirac 統計），(3) アメに N 種類の絵模様でもつけて区別できるようにし，それぞれの子供に幾つ配ってもよいとして数えたあと，入替え数 $N!$ で割る（Maxwell-Boltzmann 統計），のそれぞれの場合の分け方の数（状態数）W_1，W_2，W_3 を求め，さらに (i) $W_2 < W_3 < W_1$ であること，(ii) $N/V \to 0$ のとき，$W_1/W_2 \to 1$ となること，を示せ。

統計物理学（冨田：2004 年度 後期 木 2）　2005/1/27

1. 地表から上空まで大気の温度 T が一定であるとして，

   (i) 大気圧の高度依存性を求めよ。ただし，地表での大気圧を P_0 とせよ。

   (ii) これを用いて，地球上の大気が地表からおよそどの程度の高さまで存在しているかを特徴づける距離の目安を，数値的に見積もってみよ。必要ならば，気体定数を 8.3 J/K·mol，重力加速度を $9.8\ \mathrm{m/s^2}$，$T = 300$ K，空気の主成分は窒素と酸素で平均分子量はおよそ 0.030 kg/mol とせよ。

   (iii) 地表の大気 $1\ \mathrm{m^3}$ には，およそどれくらいの内部エネルギーが含まれているか？ 必要なら $P_0 = 100,000$ Pa とせよ。

2. エネルギーが並進運動エネルギーだけからなる単原子分子理想気体の状態方程式（ボイルの法則），および比熱比 $\gamma = C_\mathrm{P}/C_\mathrm{V}$ を，統計力学により導け。必要ならば以下の定積分を用いよ。

$$\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-ax^2/2}\ \mathrm{d}x = \sqrt{\frac{2\pi}{a}}$$

3. カノニカル分布の分配関数の方法を用いて，定積熱容量 C_V とエネルギーの分散の間に成り立つ以下の関係式を導け。$\overline{Q}$ は物理量 Q の平均値を表す。

$$C_\mathrm{V} = \frac{1}{kT^2}\ \overline{(E - \overline{E}\ )^2}$$

   これを用いて，粒子数 N の大きな系では，一般にエネルギーの揺らぎは平均値 $\overline{E}$ に比べて無視できることを説明せよ。これを無視できないのはどういう場合か，いくつか例を挙げよ。

統計物理学（冨田：2003 年度 後期 木 2）　2004/1/22

1. 質量 m の単分子原子からなる理想気体がマクスウェル速度分布則にしたがっているとき，以下の問いに答えよ。

   (1) 温度が T のとき，分子の速さの平均値は $\overline{v} = b\sqrt{T}$ の形で与えられる。係数 b を求めよ。

   (2) ［注：(1) ができていなくても手が付けられます。］この気体を断熱的な壁で 2 つの部分に仕切り，各部分の温度・圧力をそれぞれ (T_1, P_1)，(T_2, P_2) に保っておく。壁にごく小さな穴を開けたとき，両側からの分子流が釣合って正味の分子流を生じないために (T_1, P_1)，(T_2, P_2) の間に成り立つべき関係式を求めよ。このとき，エネルギーの流れはあるか？あるとすればどちらからどちら向きか？

2. カノニカル分布の分配関数の方法を用いて，定積 熱容量 C_{V} と，エネルギーおよびその 2 乗の平均値，$\overline{E}$，$\overline{E^2}$ の間に成り立つ以下の関係式を導け：

$$C_{\mathrm{V}} = \frac{1}{kT^2}\ [\ \overline{E^2} - (\overline{E})^2\ ]$$

   これを用いて，粒子数 N の大きな系では一般にエネルギーの揺らぎは無視できることを説明せよ。これを無視できないのはどういう場合か？

3. 以下の (1)，(2) の中から 1 題を選んで答えよ。

   (1) 長さが a でエネルギーが 0 の状態 A と，長さが $a+l$ でエネルギーが ϵ_0 の状態 B の 2 状態をとる分子 N 個が，直線鎖状に結合した高分子がある。温度 T と鎖の全長 L の関数として自由エネルギー $F(T, L)$ を計算し，張力 $X = (\partial F/\partial L)_T = 0$ から自然長を求めよ。2 状態のエネルギー差が $\epsilon_0 = 0$ の場合でも，鎖を引き延ばすためには仕事が必要であるのは何故か？簡単に説明せよ。

   (2) 電子気体について答えよ。

      a) 金属中の自由電子（原子に束縛されない電子）は，電荷を持っているにもかかわらず，ほぼ相互作用のない理想フェルミ気体として扱うことができるのは何故か？

      b) 電子の運動空間の体積を V，電子の質量を m，プランク定数を h として，エネルギーが $\epsilon \sim \epsilon + \mathrm{d}\epsilon$ の間にある電子の微視状態数は

      $$g(\epsilon)\ \mathrm{d}\epsilon = [4\pi V(2m)^{3/2}/h^3]\ \sqrt{\epsilon}\ \mathrm{d}\epsilon$$

      で与えられることを示せ。［スピン自由度による縮重度 2 を忘れないように！］

      c) 電子の数を N として，この電子系のフェルミ準位 μ_F を求めよ。また，フェルミエネルギー（最小エネルギー，すなわち $T=0$ における全エネルギー）E_0 を μ_F を用いて表せ。

      d) この電子気体では熱力学第三法則「$\lim_{T\to 0} S = 0$」が成りたっていることを一言で説明せよ。

（説明ぬきの公式集）

$$F(v)\mathrm{d}v = 4\pi n\left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2}\ v^2\ \mathrm{e}^{-mv^2/2kT}\mathrm{d}v\ ,\quad \nu = \frac{n}{4}\ \overline{v}\ ,\quad PV = NkT$$

$$\int_0^\infty x^{2N+1}\mathrm{e}^{-ax^2}\mathrm{d}x = \frac{N!}{2a^{N+1}}\ ,\ \int_0^\infty x^{2N}\mathrm{e}^{-ax^2}\mathrm{d}x = \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot \ldots\cdot(2N-1)}{2^{N+1}a^N}\sqrt{\frac{\pi}{a}}$$

$$\epsilon = \frac{p^2}{2m}\ \text{より}\ \ \mathrm{d}p = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{2m}{\epsilon}}\ \mathrm{d}\epsilon$$

『統計物理学』2002 年度後期（冨田：木１）2003/1/23

受講時限と異なる時限に受験した答案や２重に受験した場合は無効である。
解答に必要な物理定数は適宜，導入せよ。

1. 温度，圧力がそれぞれ (T_1, P_1)，(T_2, P_2) の同じ種類の理想気体を壁で隔てておき，壁にごく微小な穴をあけたとして，以下の問いに答えよ。ただし，小穴の面積を A，分子の質量を m とせよ。T_1，T_2 はそれぞれ常に一定に保たれているとする。

   (1) 穴の両側からの分子流が釣り合って正味の分子流を生じないための条件を求めよ。

   (2) この状態でのエネルギー流はどうなるか，定性的に論じよ。(「エネルギーもつり合っている」「温度の低い方から高い方へ向かって流れる」など，その根拠を述べよ。)

2. 質量 m，振動数 ν（角振動数 $\omega = 2\pi\nu$）の１次元調和振動子について，以下の問いに答えよ。

   (1) 古典的極限（高温）では，１振動子当たりの比熱はどれだけか？

   (2) 量子力学的に分配関数を計算し，温度 T における１振動子のエネルギー平均値を求めよ。

   (3) (2) の結果にもとづき，低温，高温での比熱の振舞いを論じ，全温度域での概形を描け。

［参考資料］すべてが必要な情報とは限らない。間違っていても質問しないこと。

衝突数 $\nu = \dfrac{n\overline{v}}{4}$，$\overline{v} = \sqrt{\dfrac{8kT}{\pi m}}$，ボイルの法則 $PV = NkT$　（こんなもの要らないって？）

$\epsilon_n = (n + \dfrac{1}{2})\ h\nu$，$\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} r^n = \frac{1}{1-r}$　(ただし $|r| < 1$)

微分方程式 $\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = -cx$ の解は $x(t) = x(0)\ \mathrm{e}^{-ct}$

$\displaystyle\int_0^{\infty} W(E)\mathrm{d}E = 2^N = \text{finite}$，$\dfrac{\partial S}{\partial E} = \dfrac{1}{T}$

『統計物理学』2002 年度後期（冨田：木２）2003/1/23

受講登録時限と異なる時限に受験した答案や２重に受験した場合は無効である。
解答に必要な物理定数は適宜，導入せよ。

1. 体積 $2V$ の容器が半分ずつに仕切られ，一方は真空で，他方に温度 T，圧力 P，分子の質量 m の理想気体が入れられている。仕切壁に面積 A の小穴をあけたあと，両側における圧力は時間的にどのように変化するか？ただし壁の両側とも温度 T は常に一定に保たれているとする。噴出により分子数が減る分だけ圧力も減っていくこと，また，噴出すると逆にもどってくる分子流があることに注意せよ。

2. エネルギー値が 0 と ϵ_0 (>0) である２つの状態だけが実現される２準位分子について，以下の問いに答えよ。
   (1) 温度 T における１分子当たりのエネルギー平均値を求めよ。
   (2) 低温と高温における比熱を論じ，全温度域における概形を描け。
   (3) この分子 N 個からなる系では，可能な状態数は 2^N で有限である。状態数 $W(E)$ とエントロピー $S(E)$ の間のボルツマンの関係式から「負温度」について解説せよ。

［参考資料］すべてが必要な情報とは限らない。間違っていても質問しないこと。

衝突数 $\nu = \dfrac{n\overline{v}}{4}$ ， $\overline{v} = \sqrt{\dfrac{8kT}{\pi m}}$ ， ボイルの法則 $PV = NkT$ （こんなもの要らないって？）

$\epsilon_n = (n + \dfrac{1}{2})\, h\nu$ ， $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} r^n = \frac{1}{1-r}$ （ただし $|r| < 1$）

微分方程式 $\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = -cx$ の解は $x(t) = x(0)\mathrm{e}^{-ct}$

$\displaystyle\int_0^{\infty} W(E)\mathrm{d}E = 2^N = \text{finite}$ ， $\dfrac{\partial S}{\partial E} = \dfrac{1}{T}$