物理学基礎論 B（冨田：2005 年度 後期 火１）　2006/1/24

※「３題完答すれば合格点」の標準的問題です。解答用紙１枚の裏表で十分書けます。決して難しく考えすぎないように。

1. ［大学入試頻出問題］ 辺の長さが a，x の長方形状の２枚の平行導体板が，距離 z を隔てて真空中に向かい合わせで置かれたコンデンサがある。コンデンサの両極板に，それぞれ $+Q$，$-Q$ の電荷が蓄えられているとき，以下の量を求めよ。(1) 極板の間の空間にできる電場 E（一様と見なしてよい），(2) 極板を板に垂直な方向（z の増える方向）に引き離すのに要する力，(3) 極板を長さ x の辺に平行な方向（向かい合う面積の減る方向）にずらすのに要する力。(2)，(3) の力は，Q を消去して (1) の E を用いて表す形で表せ。

2. いずれか１題を選んで抵抗を求めよ。［いずれも講義中に途中まで説明し，宿題にしておいた問題です。レポート提出者がなかったため出題］

    (1) ［過去問］ 半径 a，b $(a < b)$ の同心導体球の間に電気伝導度 σ の媒質をつめたとき，両導体球間の抵抗 R

    (2) 端点から無限に伸びた２本の平行送電線があり，いずれも 1m あたりの抵抗は r である。端から 1m の位置から 1m おきに，両電線の間に抵抗 R（＝リーク抵抗）が存在しているとき，両導線の端点の間の合成抵抗 X

3. ［過去問］ 幅が a の無限に長い２枚の導体板が，距離 b $(\ll a)$ を隔てて平行に向かい合わせに置かれ，それぞれの導体板の中を一様な電流 J が互いに反平行に，板の長さの方向に流れている。両導体板の間の空間にできる磁場の強さと方向を求めよ。磁場は導体板の間の空間で一様としてよい。磁場の方向は図示するか，あるいは導体板は水平面（xy-面）内にあり，電流の方向は上面で $-y$ 方向，下面で $+y$ 方向とし，例えば「$+z$ 方向」のように答えよ。

    （参考）アンペールの法則：$\oint_{\mathrm{C}} \boldsymbol{H}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{s} =$ 閉曲線 C を貫く全電流 J,　　磁束密度：$\boldsymbol{B} = \mu_0 \boldsymbol{H}$

4. ［≒過去問］半径 a の２枚の円形導体板が，真空中で距離 b を隔てて向かい合わせに固定されている。両導体板をつなぐ導線に交流電流 $J = J_0 \sin\omega t$ が流れているとき，導体板の間の空間にできる磁場 $H(r,t)$ を求めよ。r は中心軸からの距離である。また，導体板の間の空間にできる電場は常に一様としてよい。［ヒント： $\mathrm{d}Q/\mathrm{d}t = J$，電束電流密度 $\boldsymbol{i}_D = \partial \boldsymbol{D}/\partial t$，$\nabla\times\boldsymbol{H} = \boldsymbol{i} + \boldsymbol{i}_D$ ］

    （参考）ガウスの法則：$\oint_{\mathrm{S}} \boldsymbol{D}\cdot\boldsymbol{n}\,\mathrm{d}S =$ 閉曲面 S に囲まれる全電荷 Q

5. いずれか１題を選んで簡潔に説明（解答）せよ。(1) 電気鏡像法の根拠，(2) 電荷に関する連続の方程式，(3) 高圧送電が有利な理由と変圧器の原理，(4) 電磁調理器の原理，(5) 任意のベクトル場について成り立つ公式 $\nabla\times(\nabla\times\boldsymbol{a}) = \nabla(\nabla\cdot\boldsymbol{a}) - \nabla^2\boldsymbol{a}$

（解答例）

1. 導体表面での電場は，表面電荷密度を σ としてガウスの法則により，$E=\sigma/\epsilon_0$ であることを用いる。

   (1) 電荷密度は Q/ax だから，(あるいは直接ガウスの法則を用いて，$axE=Q/\epsilon_0$ より)，$E=Q/\epsilon_0 ax$。（電気容量 C を先に求めた人が多かったが，電気容量はこの結果を用いて，電位差 $V=Ez=Qz/\epsilon_0 ax$ より，$C=\epsilon_0 ax/z$ となるが，これは必要としない。）

   (2) コンデンサに蓄えられたエネルギーは $U=QV/2=QEz/2$ より（あるいは，エネルギー密度 $\epsilon_0 E^2/2$ に一様な電場の存在する空間＝コンデンサの両極板の間の空間）の体積 axz をかけることにより），$U=axz\epsilon_0 E^2/2=Q^2z/2\epsilon_0 ax$ である。Q を一定に保ったまま極板間の距離 z を微少に増やすときのエネルギー増加率は，$\partial U/\partial z=Q^2/2\epsilon_0 ax=(\epsilon_0 E^2/2)\times ax$。これが引き離すのに要する力である。[こちらは，導体表面に働く力＝ $QE/2$（＝引力）から求めてもよいが，1/2 を忘れた人が多かった。]

   (3) 同様にして $\partial U/\partial x=-Q^2z/2\epsilon_0 ax^2=-(\epsilon_0 E^2/2)\times az$，これは重なり x が増えるときのエネルギー変化率だから，横にずらせて重なり x が減るときにはエネルギーは増える。したがって，要する力は正で，$(\epsilon_0 E^2/2)\times az$。

2. (1) 電流は等方的に流れる。全電流を J とすると，半径 r の球面を通過する電流密度 $i(r)$ は $i(r)=J/4\pi r^2$，$E(r)=i(r)/\sigma=J/4\pi\sigma r^2$，これを a から b まで積分して

   $$\text{電位差 } V=\int_a^b E(r)\mathrm{d}r=J(b-a)/4\pi\sigma ab\text{。したがって } R=(b-a)/4\pi\sigma ab$$

   あるいは，半径 r，厚さ $\mathrm{d}r$ の球殻状部分の抵抗は，$\mathrm{d}R=(1/\sigma)\mathrm{d}r/4\pi r^2$，これが直列に重なりあっているとして足しあわせて（＝積分して）も得られる。

   (2) 講義で説明したように「頭の体操」の問題である。この半無限回路の端子間の全抵抗を X とすると，1m から先の半無限部分の全抵抗も X であるから

   $$X=r+[R\text{ と }X\text{ の並列抵抗}]+r=r+\frac{1}{1/R+1/X}+r=\frac{RX}{R+X}+2r$$

   分母を払えば X の二次方程式

   $$X^2-2rX-2Rr=0$$

   になり，これを解いて正の解のみ採用すれば

   $$X=r+\sqrt{r^2+2Rr}$$

3. １枚の導体板電流では，板をとり囲む長方形に沿ってアンペールの積分法則を適用して $2aH=J$ より，$H=J/2a$（板の上下で反対向き）。２枚の反平行電流板では，両板の間の空間では足しあって $H=J/a$，外側では±打ち消しあって０。方向は右ねじの法則により「$+x$ 方向」。

4. 両円板の間で電場は一様であれば，$D=\epsilon_0 E=Q/\pi a^2$ で

   $$\text{電束電流密度 } i_\mathrm{D}=\frac{\partial D}{\partial t}=\frac{1}{\pi a^2}\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t}=\frac{J_0}{\pi a^2}\sin\omega t \qquad (\pi a^2 i_\mathrm{D}=J_0\sin\omega t\quad\text{である})$$

   極板間で，極板と同軸の半径 r の円周 C に沿ってアンペールの法則（積分形）を適用して

   $$2\pi rH(r,t)=\text{C を貫く全電流}=\pi r^2\, i_\mathrm{D}\text{（極板間では電束電流のみ）}$$

したがって

$$H(r,t) = \frac{J_0\, r}{2\pi a^2} \sin \omega t$$

4. (1) ラプラス方程式の解の一意性により，何らかの手段で境界条件を満たす解を見つけることができればよい。例えば接地された広い導体板（xy-面とする）の前 $z=a$ に点電荷 Q が置かれているとき，さらに鏡像位置 $z=-a$ に点電荷 $-Q$ が置かれ，導体板のない真空中の問題を考えれば，xy 面上で電位 0 となるから，この解の $z>0$ 部分だけ採用すれば，これが元の問題の解となる。

(2) 電荷は生成消滅しない（電荷の保存）ことから，任意の仮想的・固定閉曲面 S の中に含まれる総電荷量の時間的変化は，表面からの出入りだけ考えればよい。すなわち

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_{\mathrm{S}\,内} \rho\, \mathrm{d}V = -\oint_{\mathrm{S}} \boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{n}\, \mathrm{d}S \quad (\boldsymbol{n}\ は表面外向きの放線ベクトル)$$

閉曲面 S が変形せず，かつ動かなければ

$$左辺の時間的変化\ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_{\mathrm{S}\,内} \rho\, \mathrm{d}V = \int_{\mathrm{S}\,内} \frac{\partial \rho}{\partial t}\, \mathrm{d}V$$

また，ガウスの積分定理を用いれば

$$右辺\ \ -\oint_{\mathrm{S}} \boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{n}\, \mathrm{d}S = -\int_{\mathrm{S}\,内} \nabla\cdot\boldsymbol{i}\, \mathrm{d}V$$

任意の閉曲面について，積分領域が同じこの二式の右辺が等しいためには，積分の中身，すなわち空間の各点で以下の等式『電荷についての連続方程式』が成り立たなければならない：

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\nabla\cdot\boldsymbol{i}$$

(3) 送電線の抵抗を R として，発電所から供給される電力 $P=VI$ 一定の条件で，送電線部におけるジュール熱発生率は，$RI^2 = RP^2/V^2$ となり，V が大きいほど電力エネルギーの散逸（浪費）は小さくてすむ。変圧器は，２つのコイルを用いて相互誘導現象により，交流電圧を変える装置である。磁束が外に逃げていかない理想的な変圧器における変圧比は，磁束がコイルを貫く回数の比，したがってコイルの巻数の比に等しい。

(4) 電熱線に直接電流を流すのではなく，鉄板に時間的に変化する交流磁場をかけて鉄板内に誘導電流を流すことにより，ジュール熱を発生させる仕組みである。（マイクロ波により食品の中の水分子（電気双極子）の共鳴振動を引き起こすことにより過熱する電子レンジの仕組みを説明したものも可。）

(5) x 成分を見ると，ベクトル積の約束を繰り返し用いて

$$[\nabla\times(\nabla\times\boldsymbol{a})]_x = \frac{\partial}{\partial y}(\nabla\times\boldsymbol{a})_z - \frac{\partial}{\partial z}(\nabla\times\boldsymbol{a})_y = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial}{\partial x}a_y - \frac{\partial}{\partial y}a_x\right) - \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial}{\partial z}a_x - \frac{\partial}{\partial x}a_z\right)$$

$$= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial}{\partial y}a_y + \frac{\partial}{\partial z}a_z\right) - \left(\frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)a_x$$

$$= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial}{\partial x}a_x + \frac{\partial}{\partial y}a_y + \frac{\partial}{\partial z}a_z\right) - \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)a_x$$

$$= \nabla_x(\nabla\cdot\boldsymbol{a}) - \nabla^2 a_x = [\nabla(\nabla\cdot\boldsymbol{a}) - \nabla^2\boldsymbol{a}]_x,\ \ 他の成分も同様$$