物理学基礎論Ｂ（冨田：2004年度 後期 火１）　2005/2/1

目標：３題で合格。５題すべて解答しても解答用紙１枚で十分に記述できる程度に簡単です。

1. 真空中で無限に広い導体板が電位０に保たれ，導体板から距離 $a/2$ の位置に点電荷 Q が置かれているとき，(1) 電気力線の様子を描け。さらに，(2) 導体板が点電荷から受ける力 (合力)F を求めよ。

2. 大地は一様な電気伝導度 σ をもつ導電媒質であるとして，地面から十分深い位置に半径 a の完全導体球を埋め込んだとき，導体球と無限遠方との間の電気抵抗 (接地抵抗) R を求めよ。

3. 真空中で，断面積が S で単位長あたり巻数 n_1 ，長さ L の円筒状ソレノイドの内部に，同じ長さで断面積が半分，単位長あたり巻数 n_2 の円筒状ソレノイドが，両端を揃え中心軸を共通にしてはめ込まれているとき，両ソレノイドの間の相互インダクタンス M を求めよ。

4. 電気伝導度 σ の円柱状の導体中を，全電流 J の定常電流が一様な密度で軸方向に流れている。このとき，(1) 導体中で発生する円柱の単位長あたり・単位時間あたりのジュール熱 Q_1 と，(2) 単位時間に単位長さ部分の円柱表面から流入する電磁場のエネルギー Q_2 とを求めよ。[**後注**：半径 a を与えるのを忘れていたが，誰も質問しなかった。こういう場合は必要なら自分で導入する。]

5. 任意の連続なベクトル場 $\boldsymbol{a}$ について，以下の等式が成り立つことを示せ。

$$(1)\ \nabla\cdot(\nabla\times\boldsymbol{a}) = 0 \qquad (2)\ \nabla\times(\nabla\times\boldsymbol{a}) = \nabla(\nabla\cdot\boldsymbol{a}) - \nabla^2\boldsymbol{a}$$

［考参］ ヒントの意味については自分で考えてください。無意味かもね？

- $\nabla = \left(\dfrac{\partial}{\partial x}\,,\ \dfrac{\partial}{\partial y}\,,\ \dfrac{\partial}{\partial z}\right) \qquad \nabla^2 = \dfrac{\partial^2}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2}{\partial z^2}$
- ポインティングベクトル $= \boldsymbol{E}\times\boldsymbol{H}$，ただし $(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})_x = a_y b_z - a_z b_y$ etc，$|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}| = ab\ \sin\theta_{ab}$
- 電流系 $\{J_i\}$ の貫通磁束に関する重ね合わせの原理：　$\Phi_i = \sum_k M_{ik} J_k$ （貫通回数を含むとする）
- 半径 a の球の表面から単位時間に総量 J のわりあいで水が湧き出しているとき，これを囲む任意の半径 $r\ (> a)$ の仮想球面を通過する全流水量は J に等しい。（質量の保存則）
- 誘電率 ϵ の媒質中で半径 a の導体球に電荷 Q が与えられているとき，球の中心から距離 $r\ (> a)$ の位置における電束密度はガウスの法則により $D(r) = \ldots$，電場は $E(r) = D(r)/\epsilon = \ldots$，したがって電位は $V = \int_a^\infty E(r)\mathrm{d}r = \ldots$，よって孤立球の電気容量は $Q/V = 4\pi\epsilon a$ となる。（少し勉強した人向き）
- 抵抗体の電気抵抗は，電流が流れる方向の長さに比例し断面積に反比例する。抵抗体が直列につながれているとき，その合成抵抗は各抵抗の和（積分）で与えられる。（高校の知識のままで受験した人向き）
- ニュートンの第三法則とは『作用・反作用の法則』のことである。（「あれ？この先生，いくら忙しいっていっても，物理学基礎論Ａの問題と間違ったら困るんじゃないの？」）
- 帯電した導体表面に働く応力 $= \dfrac{\epsilon_0 E^2}{2}$ ，表面に垂直な成分のみで，向きは表面外向き（実直な人向き）
- ラプラス方程式の解の一意性 『与えられた電荷配置と境界条件を満たす解を探すとき，鏡を使ってみたり裏返ししてみたりして，なんとか一つ見つけ出すことができたら，それが求める解であると安心してよいのだ。』

（解説）クーロンの法則も「忘れた」は論外。よく見てみると**高校物理**だけでも合格できましたね。

1. (1) 電気力線が電荷から出てすべてが導体表面に垂直に入り，反対側には出ていかない（**導体による静電しゃへい＝高校物理IB**）ことが示されておれば，少々下手な絵でも可。（図は省略）

   (2) 導体表面に関して電荷Qの鏡像の位置に負電荷$-Q$を置き，導体板を取り去って考えてみると，2つの電荷を結ぶ線分の垂直2等分面である導体板のあった平面上でちょうど電位＝0となり，このときできる電場の電荷Qの側だけを採用すれば，要求されている接地導体境界条件を満たす解になる（鏡像法）。したがって，導体板上に静電誘導されて連続分布している負電荷から電荷Qが受ける力は，電気力線を眺めれば鏡像電荷$-Q$から受けるクーロン力$Q^2/4\pi\epsilon_0 a^2$と同じであることがわかる。この力の反作用として，導体板は電荷Qから同じ大きさで反対向きの力を受ける。

   （別） もちろん，2つの電荷から作られる電位

$$\phi(x,y,z)=\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\left[\frac{Q}{\sqrt{x^2+y^2+(z-a/2)^2}}-\frac{Q}{\sqrt{x^2+y^2+(z+a/2)^2}}\right]\qquad(\text{ただし},z\geq 0)$$

   をzで微分して導体板位置（$z=0$）での電場$E(x,y)$を求めてから，静電応力（面積当たりの力）$\epsilon_0 E(x,y)^2/2$を導体板全域にわたって足しあわせても同じものが得られるが，最後まで正確に計算を完遂するのはたいへんだ。そのため「作用反作用の法則を使え」とヒントが出してある。

2. **昨年度の問題1.(2)** とほとんど同じ。全電流をJとして，これが等方的に流れ出ているとすれば（このため，導体球は十分深く埋めてある），球の中心から距離rの位置での電流密度は$j(r)=J/4\pi r^2$，したがって電場は$E(r)=j(r)/\sigma=J/4\pi\sigma r^2$，この電場を$r=a$から$r=\infty$まで積分して球の電位（＝無限遠方との電位差）は$V=J/4\pi\sigma a$，したがって電気抵抗は$R=V/J=1/4\pi\sigma a$。

   高校数学型：半径r〜$r+\mathrm{d}r$の球殻部分の抵抗＝長さ／σ断面積から，$\mathrm{d}R=\mathrm{d}r/4\pi r^2\sigma$，この抵抗が直列につながっているから，これを$r=a$から$r=\infty$まで足しあわせれば同じ結果が得られる。

3. 外側のソレノイドに電流J_1が流れているとき，その内部には一様な磁場$H=n_1J_1$ができる。したがって内部の磁束密度は$B=\mu_0H=\mu_0n_1J_1$，内側の断面積$S/2$のソレノイドを貫く磁束（**ここまでは高校物理II**）は，貫通回数Ln_2を計算に入れて，$\Phi_2=Ln_2\times BS/2=(\mu_0Ln_1n_2S/2)J_1$，ヒントに書かれた公式$\Phi_2=M_{21}J_1$により，この比例係数が相互インダクタンス：起電力$V_2=-\mathrm{d}\Phi_2/\mathrm{d}t=-M_{21}(\mathrm{d}J_1/\mathrm{d}t)$。

4. (1) 単位長さ部分の抵抗は，$R=1/\pi a^2\sigma$，したがってジュール熱は$Q_1=RJ^2=J^2/\pi\sigma a^2$。**［ここまで高校物理IB］** (2) 円柱内部での電流密度は$j=J/\pi a^2$，したがって電場は強さ$E=j/\sigma=J/\pi\sigma a^2$で方向は中心軸方向，円柱表面での磁場はアンペールの法則より強さ$H=J/2\pi a$で方向は円周方向，したがって電場と磁場は直交しており，エネルギー流ポインティングベクトルは大きさ$J^2/2\pi^2\sigma a^3$で，方向は円柱表面から垂直に内向き。これに単位長さ当たりの表面積$2\pi a$をかけて，$Q_2=J^2/\pi\sigma a^2(=Q_1)$。

5. **「将来電磁気学の必要ない人も，これくらいのスキルは」と最後の時間に予告しておいた問題。**

   (1)
$$\nabla\cdot(\nabla\times\boldsymbol{a})=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial}{\partial y}a_z-\frac{\partial}{\partial z}a_y\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial}{\partial z}a_x-\frac{\partial}{\partial x}a_z\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial}{\partial x}a_y-\frac{\partial}{\partial y}a_x\right)=0$$

   (2)
$$[\nabla\times(\nabla\times\boldsymbol{a})]_x=\frac{\partial}{\partial y}(\nabla\times\boldsymbol{a})_z-\frac{\partial}{\partial z}(\nabla\times\boldsymbol{a})_y=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial}{\partial x}a_y-\frac{\partial}{\partial y}a_x\right)-\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial}{\partial z}a_x-\frac{\partial}{\partial x}a_z\right)$$

$$=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial}{\partial y}a_y+\frac{\partial}{\partial z}a_z\right)-\left(\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)a_x$$

$$=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial}{\partial x}a_x+\frac{\partial}{\partial y}a_y+\frac{\partial}{\partial z}a_z\right)-\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)a_x$$

$$=\nabla_x(\nabla\cdot\boldsymbol{a})-\nabla^2a_x=[\nabla(\nabla\cdot\boldsymbol{a})-\nabla^2\boldsymbol{a}]_x,\quad\text{他の成分も同様}$$