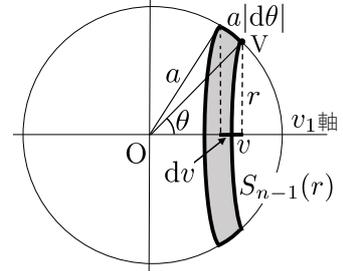


N 個の粒子から成る理想気体の $3N$ 次元運動量空間の等エネルギー球面, あるいは $3N$ 次元速度 $\{v_i = p_i/m\}$ で表した球面

$$\sum_{i=1}^{3N} v_i^2 = \frac{2E}{m} \quad (1)$$

の上に確率が一様に分布¹したミクロカノニカル分布の, 一つの成分 (v_1 軸とする) への射影を考える。簡略化のため当面の間, $n = 3N$, $a^2 = 2E/m$ としておく。半径 a の n 次元球面上の任意の点 V と v_1 軸を含む 2 次元断面内の円で, \overline{OV} と v_1 軸のなす角を θ , $v = a \cos \theta$, $dv = -a \sin \theta d\theta$ とする。 v_1 成分の値が $v-dv$ から v の間の微小区間に入る確率は, 相対する円弧の長さを $a|d\theta|$, また, $r = \sqrt{a^2 - v^2}$ とし, 射影される (図の陰影部の全球面に対する) 面積の比



$$P_1(v) dv = \frac{S_{n-1}(r) a |d\theta|}{S_n(a)} = \frac{S_{n-1}(1)}{S_n(1)} \left(1 - \frac{v^2}{a^2}\right)^{(n-3)/2} \frac{dv}{a} \quad (2)$$

で与えられる。 $S_n(a)$ は半径 a の n 次元球の表面積であり, ガンマ関数 $\Gamma(z)$ を用いて表されるが, $S_n(a) = S_n(1) a^{n-1}$, また $n \gg 1$ のとき, ガンマ関数に対する Stirling の公式を用いれば, 係数は

$$\frac{S_{n-1}(1)}{S_n(1)} = \left(\int_{-1}^1 (1-x^2)^{(n-3)/2} dx\right)^{-1} = \Gamma\left(\frac{n}{2}\right) / \sqrt{\pi} \Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right) \simeq \sqrt{\frac{n}{2\pi}} \quad (3)$$

と評価される。(2) を $v = -a$ から a まで積分すれば, 確率はちゃんと 1 に規格化されている。

粒子数 N (または $n = 3N$) は十分大きいとするから, (2) は $v = 0$ にピークをもつ, 幅が $v^2/a^2 \sim 1/n$ 程度の急激に減少する関数である。公式

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} (1 - \epsilon)^{1/\epsilon} = e^{-1} \quad (\text{e は Napier 数}) \quad (4)$$

を用いると, $n \gg 1$ のとき

$$P_1(v) dv \simeq \sqrt{\frac{n}{2\pi a^2}} \exp\left(-\frac{nv^2}{2a^2}\right) dv \quad (5)$$

あるいは元の変数で書いて

$$P_1(v) dv \simeq \sqrt{\frac{3Nm}{4\pi E}} \exp\left(-\frac{3Nm v^2}{4E}\right) dv \quad (6)$$

となる。これを用いて 1 粒子の運動エネルギーの平均値を計算すれば (注: v は速度の 1 成分の値)

$$3 \times \frac{mv^2}{2} = \frac{E}{N} \quad (7)$$

であり, 気体分子運動論による圧力の表現とボイル-シャルルの法則

$$\text{圧力 } P = \frac{N}{V} \overline{p_x v_x} = \frac{Nm}{V} \overline{v_x^2}, \quad PV = NkT \quad (8)$$

により $E/N = 3kT/2$ と決まる。以上より個々の粒子の速度に関する Maxwell 分布が得られる²:

$$f(v_x, v_y, v_z) dv_x dv_y dv_z = \frac{N}{V} \left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2} \exp\left(-\frac{m(v_x^2 + v_y^2 + v_z^2)}{2kT}\right) dv_x dv_y dv_z \quad (9)$$

¹ $N \gg 1$ のときは球の内部で一様分布としても (5) 以降の結論は同じで, (2) の計算はもっと簡単。体積比 $V_{n-1}(r)dv/V_n(a)$ とすればよい。(2) で n を $n+2$ としたのと同じ結果になる。 n 次元球の表面積は $S_n(r) = 2\pi^{n/2} r^{n-1} / \Gamma(n/2)$, 体積は $V_n(r) = 2\pi^{n/2} r^n / n \Gamma(n/2)$ 。また, ガンマ関数の漸化式 $z\Gamma(z) = \Gamma(z+1)$ より, $V_n(1) = S_{n+2}(1)/2\pi$ の関係がある。

² 3次元空間への射影で考える必要があるが, 結果的には, $n \gg 1$ のとき 3成分は確率的に独立 (積の形) になる。→ p.2

μ 次元部分空間への射影 ($\mu < n$)

$$v^2 = v_1^2 + v_2^2 + \cdots + v_\mu^2, \quad r^2 = a^2 - v^2 \quad (10)$$

とする。射影のあとも等方的であるから、体積要素を

$$dv_1 \cdots dv_\mu = d^\mu v = S_\mu(v) dv \quad (11)$$

とする。このとき、半径 $v - dv$ と v の間の μ 次元空間に射影された確率分布は、p.1 の図に倣えば

$$\begin{aligned} P_\mu(v) S_\mu(v) dv &= \frac{S_{n-\mu}(r)}{S_n(a)} \frac{a}{r} S_\mu(v) dv \\ &= \frac{S_{n-\mu}(1)}{S_n(1)} \left(1 - \frac{v^2}{a^2}\right)^{(n-\mu-2)/2} \frac{S_\mu(v) dv}{a^\mu} \end{aligned} \quad (12)$$

となるだろう³。— (12) の 1 行目の adv/r は p.1 の $a|d\theta|$ と同じである。半径 v の μ 次元球面上の点の一つ、例えば v_1 軸上の $(v, 0, \dots, 0)$ に固定すると、残りの $n - \mu$ 個の変数は半径 a の n 次元球面上に、この点を中心とする半径 $r = \sqrt{a^2 - v^2}$ の $n - \mu$ 次元球面を描く。 v の値が dv だけ異なる 2 つのこの $n - \mu$ 次元球面の、 n 次元球面上での間隔 (幅) が

$$\sqrt{(dr)^2 + (dv)^2} = \frac{a}{r} dv \quad (13)$$

である。今の場合にはこれに $n - \mu$ 次元球の表面積 $S_{n-\mu}(r)$ が掛かる。これを半径 v の μ 次元球面上で積分、すなわち面積 $S_\mu(v)$ ($\mu = 1$ の場合は $2 \rightarrow$ 脚注) を掛ければ、半径 $v - dv$ と v の間の μ 次元球の間の微小空間に射影される、元の半径 a の n 次元球面上の面積になる。

以上より、 $\mu \ll n$ である限り は、まず係数に Stirling の公式を適用して

$$\frac{S_{n-\mu}(1)}{S_n(1)} = \Gamma\left(\frac{n}{2}\right) / \pi^{\mu/2} \Gamma\left(\frac{n-\mu}{2}\right) \simeq \left(\frac{n}{2\pi}\right)^{\mu/2} \quad (14)$$

あとは p.1 と全く同様にして

$$P_\mu(v) d^\mu v \simeq \left(\frac{n}{2\pi a^2}\right)^{\mu/2} \exp\left(-\frac{nv^2}{2a^2}\right) d^\mu v \quad (15)$$

と評価され、 v^2 に (10) を代入すれば μ 個の成分は確率的に独立 (各成分の確率の積になる) とみなせることが分かる。ここで $\mu = 3$ とすれば Maxwell 分布が得られる。

³ ここでは $v > 0$ だから、 $\mu = 1$ の場合には (2) と比べると係数 $S_1(1) = 2$ がかかっている。