まず，(x,t) から (x',t') への変換が１次式

$$x' = Ax + Bt \tag{1}$$

$$t' = Cx + Dt \tag{2}$$

であるとします。時刻 $t = t' = 0$ で両方の原点 $x = 0$，$x' = 0$ が一致していたと両者の関係を取り決めた以上，これが最も一般的な形であって右辺に余分な定数項は不要です。これは，(x,t) を未知数と見れば中学校で出てくる連立１次方程式ですから，すぐに解くことができて

$$x = \frac{1}{AD - BC}(Dx' - Bt') \tag{3}$$

$$t = \frac{1}{AD - BC}(-Cx' + At') \tag{4}$$

となります。この２組の式が同じ形であるためには，$AD - BC = 1$，$D = A$ でなければならないということが，見てすぐにわかります。さらに，列車の原点 $x' = 0$ は地面から見れば常に $x = Vt$ の形で進んでいますから，最初の式 (1) は１次式なら

$$x' = A(x - Vt)$$

という形，つまり $B = -AV$ です。そこで $D = A$，$B = -AV$，$C = (AD - 1)/B = (1 - A^2)/AV$ を用いて関係式 (1)，(2) を書き直せば

$$x' = A(x - Vt) \tag{5}$$

$$t' = A\left(t + \frac{1 - A^2}{A^2V}x\right) \tag{6}$$

となり，あと係数 A だけが未定のまま残ります。

そこで,「光速不変の原理」を適用します。時刻 0 に原点を出た光の，時刻 t における位置 $x = ct$（c は光速）を (5) と (6) 式に代入すれば

$$x' = A(c - V)t \tag{7}$$

$$t' = A\left(1 + \frac{(1 - A^2)c}{A^2V}\right)t \tag{8}$$

です。列車にとっても光は同じ速さ c で進むのであれば，列車内での光の位置はやはり $x' = ct'$ で表されます。今求めた式でこれが成り立つためには，２つの式の右辺の係数が $c : 1$，すなわち

$$c - V = c\left(1 + \frac{(1-A^2)c}{A^2 V}\right)\ ,\quad \text{よって}\quad A^2 = \frac{c^2}{c^2 - V^2} \tag{9}$$

でなければならず，これで最後の A が決定されます。

　これから，$(x,t) \to (x',t')$ の関係は

$$x' = \frac{1}{\sqrt{1-\dfrac{V^2}{c^2}}}\ (x - V\ t) \tag{10}$$

$$t' = \frac{1}{\sqrt{1-\dfrac{V^2}{c^2}}}\ \left(t - \frac{V}{c^2}\ x\right) \tag{11}$$

逆の $(x',t') \to (x,t)$ の関係は

$$x = \frac{1}{\sqrt{1-\dfrac{V^2}{c^2}}}\ (x' + V\ t') \tag{12}$$

$$t = \frac{1}{\sqrt{1-\dfrac{V^2}{c^2}}}\ \left(t' + \frac{V}{c^2}\ x'\right) \tag{13}$$

となり，予定どおり V が $-V$ になる以外は 全く同形の一次関係式 です。そして，あたりまえのことですが，列車の速さ V が光速 c に比べて小さいときには，以下のようになり普通のガリレイの相対性に一致します：

$$x' \simeq x - Vt \tag{14}$$

$$t' \simeq t \tag{15}$$

　以上で得られた (x,t) と (x',t') の関係式は，座標軸の回転による変換と似ています。直角座標の回転とは少し違うのですが，１次式で表されるという点では本質は同じです。

　座標軸の回転という意味では，時間を t で表す代わりに $u = ct$ という，距離に対応する変数で表しておく方が見えやすくなります。遠方の星までの距離を「何万光年」というふうに時間で表すのとちょうど逆です。このとき，(10)〜(11) の変換式は，速さの方も $\beta = V/c$ という，光速を単位にした換算量を使って

$$x' = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}\,(x - \beta u) \tag{16}$$

$$u' = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}\,(-\beta x + u) \tag{17}$$

と書くことができます。直角座標の角度 θ-回転 $(x,u) \to (x',u')$ では

$$x' = x\cos\theta + u\sin\theta \tag{18}$$

$$u' = -x\sin\theta + u\cos\theta \tag{19}$$

ですが，$\beta = \tan\theta$ とおくと

$$x' = \frac{1}{\sqrt{1+\beta^2}}\,(x + \beta u) \tag{20}$$

$$u' = \frac{1}{\sqrt{1+\beta^2}}\,(-\beta x + u) \tag{21}$$

となります。この場合，ピタゴラスの定理で与えられる原点からの距離

$$x'^2 + u'^2 = x^2 + u^2 \tag{22}$$

は，座標軸をいくら回転しても変わらない不変量です。

(16)，(17) 式で，u の代わりに iu，β の代わりに $i\beta$ と書けば，(20)，(21) と全く同じ式になります。よく「時間が虚数」と言われるのはこの意味です。したがって今の場合には

$$x'^2 + (ict')^2 = x^2 + (ict)^2 \tag{23}$$

したがって

$$x'^2 - (ct')^2 = x^2 - (ct)^2 \tag{24}$$

が不変量になります。あるいは列車の運動方向に関係ない y, z 座標

$$y' = y\ , \quad z' = z \tag{25}$$

を含めて，

$$x^2 + y^2 + z^2 - (ct)^2 = {x'}^2 + {y'}^2 + {z'}^2 - (ct')^2 \tag{26}$$

が成り立っています。これが「４次元不変量」（原点からの４次元距離）です。光速が共通であるということとともに，これだけは地面の４次元座標系でも列車の４次元座標系でも変わらない「固有の長さ」になるのです。