

# Chapter 1

## 電磁気学に用いるベクトル公式集

### 1.1 スカラー，ベクトル，テンソル

直角座標  $(x_1, x_2, x_3)$  から  $(x'_1, x'_2, x'_3)$  への，原点を不動点とする座標回転（直交変換）を

$$x'_l = \sum_i U_{li} x_i, \quad x_i = \sum_l (U^{-1})_{il} x'_l \quad \left( \sum_l \text{は} \sum_{l=1}^3 \text{の省略形。以下同様} \right) \quad (1.1)$$

とする。 $\tilde{U}$  を  $U$  の転置行列として，係数行列  $\{U_{li}\}$  は

$$\text{(直交条件)} \quad \sum_l U_{li} U_{lj} = \delta_{ij} \quad \text{したがって} \quad (U^{-1})_{il} = \tilde{U}_{il} = U_{li} \quad (1.2)$$

を満たす。この座標変換で成分が

$$A'_l = \sum_i U_{li} A_i \quad (1.3)$$

のように，座標と同じ形で変換される量をベクトル，<sup>1</sup>

$$T'_{lm} = \sum_{i,j} U_{li} T_{ij} (U^{-1})_{jm} = \sum_{i,j} U_{li} U_{mj} T_{ij} \quad (1.4)$$

のように変換される量をテンソルという。変換を受けない量がスカラーである。

この定義に従えば，あとで出てくるナブラ演算

$$\nabla = \left( \frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \frac{\partial}{\partial x_3} \right) \quad \left( \text{注} \quad x_1 = x, x_2 = y, x_3 = z \text{ である} \right)$$

は以下のようにしてベクトルであることが示される：

$$\frac{\partial}{\partial x'_l} = \sum_i \frac{\partial x_i}{\partial x'_l} \frac{\partial}{\partial x_i} = \sum_i (U^{-1})_{il} \frac{\partial}{\partial x_i} = \sum_i U_{li} \frac{\partial}{\partial x_i}, \quad \text{したがって} \quad \nabla'_l = \sum_i U_{li} \nabla_i$$

また，2つのベクトルのスカラー積は，以下のように座標変換では変換されず，スカラーである：

$$(A \cdot B)' = \sum_l A'_l B'_l = \sum_l \sum_i \sum_j U_{li} U_{lj} A_i B_j = \sum_i \sum_j \delta_{ij} A_i B_j = \sum_i A_i B_i = A \cdot B$$

<sup>1</sup> 直交変換では共変・反変の区別はない。

さらに、2つのベクトル量が比例関係（線形関係）にあるとき、その比例係数は一般にテンソル量である。  
 例えばベクトル  $D, E$  が比例関係にあり、その各成分が比例係数  $\{\epsilon_{ij}\}$  を用いて

$$D_i = \sum_j \epsilon_{ij} E_j$$

で関係づけられているとき、座標変換 (1.1) に対するベクトルの変換公式を用いれば

$$D'_i = \sum_i U_{li} D_i = \sum_i U_{li} \sum_j \epsilon_{ij} E_j = \sum_i \sum_j U_{li} \epsilon_{ij} \sum_m (U^{-1})_{jm} E'_m = \sum_m \left( \sum_{i,j} U_{li} \epsilon_{ij} (U^{-1})_{jm} \right) E'_m$$

となる。( ) が変換後の座標系における比例係数  $\{\epsilon'_{lm}\}$  で、ちゃんとテンソルの変換の約束に従っている：

$$\epsilon'_{lm} = \sum_{i,j} U_{li} \epsilon_{ij} (U^{-1})_{jm} = \sum_{i,j} U_{li} U_{mj} \epsilon_{ij}$$

## 1.2 かけ算公式

ある方向の単位ベクトル（長さ1のベクトル）を  $e$ 、また、 $x, y, z$  方向の単位ベクトルを、それぞれ  $e_x, e_y, e_z$  と書く。（以下共通）

$$\text{スカラー積} \quad \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = \mathbf{B} \cdot \mathbf{A} = AB \cos \theta = A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z \quad (1.5)$$

$$\text{ベクトル積} \quad \mathbf{A} \times \mathbf{B} = (A_y B_z - A_z B_y) \mathbf{e}_x + (A_z B_x - A_x B_z) \mathbf{e}_y + (A_x B_y - A_y B_x) \mathbf{e}_z \quad (1.6)$$

$$\mathbf{A} \times \mathbf{B} = -(\mathbf{B} \times \mathbf{A}), \quad |\mathbf{A} \times \mathbf{B}| = AB \sin \theta \quad (1.7)$$

$$\mathbf{A} \text{ の成分分解} \quad \mathbf{A} = \mathbf{A}_{\parallel} + \mathbf{A}_{\perp}, \quad \mathbf{A}_{\parallel} = (\mathbf{e} \cdot \mathbf{A}) \mathbf{e}, \quad \mathbf{A}_{\perp} = (\mathbf{e} \times \mathbf{A}) \times \mathbf{e} = \mathbf{A} - (\mathbf{e} \cdot \mathbf{A}) \mathbf{e} \quad (1.8)$$

$$\text{スカラー3重積} \quad \mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = \mathbf{B} \cdot (\mathbf{C} \times \mathbf{A}) = \mathbf{C} \cdot (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \quad (1.9)$$

これは、3つの右手系ベクトル  $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}$  で作られる平行6面体の体積を表す。

$$\text{ベクトル3重積} \quad \mathbf{A} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = (\mathbf{A} \cdot \mathbf{C}) \mathbf{B} - (\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) \mathbf{C} \quad (1.10)$$

$$(\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \times \mathbf{C} = (\mathbf{A} \cdot \mathbf{C}) \mathbf{B} - (\mathbf{B} \cdot \mathbf{C}) \mathbf{A} \quad (1.11)$$

$$\text{ヤコビの恒等式} \quad \mathbf{A} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) + \mathbf{B} \times (\mathbf{C} \times \mathbf{A}) + \mathbf{C} \times (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) = 0 \quad (1.12)$$

$$\begin{aligned} \text{4重積} \quad (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \cdot (\mathbf{C} \times \mathbf{D}) &= \{(\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \times \mathbf{C}\} \cdot \mathbf{D} = \mathbf{A} \cdot \{\mathbf{B} \times (\mathbf{C} \times \mathbf{D})\} \\ &= (\mathbf{A} \cdot \mathbf{C})(\mathbf{B} \cdot \mathbf{D}) - (\mathbf{A} \cdot \mathbf{D})(\mathbf{B} \cdot \mathbf{C}) \end{aligned} \quad (1.13)$$

$$\begin{aligned} (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \times (\mathbf{C} \times \mathbf{D}) &= \{(\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \cdot \mathbf{D}\} \mathbf{C} - \{(\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \cdot \mathbf{C}\} \mathbf{D} \\ &= \{\mathbf{A} \cdot (\mathbf{C} \times \mathbf{D})\} \mathbf{B} - \{\mathbf{B} \cdot (\mathbf{C} \times \mathbf{D})\} \mathbf{A} \end{aligned} \quad (1.14)$$

$$\text{平行条件} \quad \mathbf{A} \times \mathbf{B} = 0 \quad (1.15)$$

$$\text{直交条件} \quad \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (1.16)$$

$$\text{同一平面条件} \quad \mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = 0 \quad (1.17)$$

### 1.3 微分公式

$$\text{ナブラベクトル} \quad \nabla = e_x \frac{\partial}{\partial x} + e_y \frac{\partial}{\partial y} + e_z \frac{\partial}{\partial z} \quad (1.18)$$

$$\text{勾配} \quad \nabla \phi = \text{grad } \phi = e_x \frac{\partial \phi}{\partial x} + e_y \frac{\partial \phi}{\partial y} + e_z \frac{\partial \phi}{\partial z} \quad (1.19)$$

$$\text{発散} \quad \nabla \cdot \mathbf{A} = \text{div } \mathbf{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z} \quad (1.20)$$

$$\text{回転} \quad \nabla \times \mathbf{A} = \text{rot } \mathbf{A} = \left( \frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \right) e_x + \left( \frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \right) e_y + \left( \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right) e_z \quad (1.21)$$

$$\nabla(\phi + \psi) = \nabla \phi + \nabla \psi \quad (1.22)$$

$$\nabla(\phi\psi) = \psi \nabla \phi + \phi \nabla \psi \quad (1.23)$$

$$\nabla(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) = (\mathbf{B} \cdot \nabla) \mathbf{A} + (\mathbf{A} \cdot \nabla) \mathbf{B} + \mathbf{A} \times (\nabla \times \mathbf{B}) + \mathbf{B} \times (\nabla \times \mathbf{A}) \quad (1.24)$$

$$\nabla \cdot (\mathbf{A} + \mathbf{B}) = \nabla \cdot \mathbf{A} + \nabla \cdot \mathbf{B} \quad (1.25)$$

$$\nabla \cdot (\phi \mathbf{A}) = \nabla \phi \cdot \mathbf{A} + \phi \nabla \cdot \mathbf{A} \quad (1.26)$$

$$\nabla \cdot (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) = \mathbf{B} \cdot (\nabla \times \mathbf{A}) - \mathbf{A} \cdot (\nabla \times \mathbf{B}) \quad (1.27)$$

$$\nabla \times (\mathbf{A} + \mathbf{B}) = \nabla \times \mathbf{A} + \nabla \times \mathbf{B} \quad (1.28)$$

$$\nabla \times (\phi \mathbf{A}) = \nabla \phi \times \mathbf{A} + \phi \nabla \times \mathbf{A} \quad (1.29)$$

$$\nabla \times (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) = (\mathbf{B} \cdot \nabla) \mathbf{A} - (\mathbf{A} \cdot \nabla) \mathbf{B} + \mathbf{A}(\nabla \cdot \mathbf{B}) - \mathbf{B}(\nabla \cdot \mathbf{A}) \quad (1.30)$$

$$\mathbf{A} \cdot \nabla = A_x \frac{\partial}{\partial x} + A_y \frac{\partial}{\partial y} + A_z \frac{\partial}{\partial z} \quad (\mathbf{A} \cdot \nabla \neq \nabla \cdot \mathbf{A} \text{ に注意}) \quad (1.31)$$

$$(\mathbf{A} \cdot \nabla)\phi = \mathbf{A} \cdot (\nabla\phi) \quad (1.32)$$

$$(\mathbf{A} \cdot \nabla)\mathbf{B} = (\mathbf{A} \cdot \nabla B_x)\mathbf{e}_x + (\mathbf{A} \cdot \nabla B_y)\mathbf{e}_y + (\mathbf{A} \cdot \nabla B_z)\mathbf{e}_z \quad (1.33)$$

$$(\mathbf{A} \cdot \nabla)\phi\mathbf{B} = \phi(\mathbf{A} \cdot \nabla)\mathbf{B} + \mathbf{B}(\mathbf{A} \cdot \nabla\phi) \quad (1.34)$$

$$\text{2階微分 ラプラシアン: } \nabla \cdot \nabla = \nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \quad (1.35)$$

$$\text{これに対して, ベクトル積は } \nabla \times \nabla = 0 \quad (1.36)$$

$$\text{div grad } \phi = \nabla \cdot \nabla\phi = \nabla^2\phi \quad (1.37)$$

$$\text{rot grad } \phi = \nabla \times \nabla\phi = 0 \quad (\text{渦なし場}) \quad (1.38)$$

$$\text{div rot } \mathbf{A} = \nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{A}) = (\nabla \times \nabla) \cdot \mathbf{A} = 0 \quad (\text{湧き出しなし場}) \quad (1.39)$$

$$\text{rot rot } \mathbf{A} = \nabla \times (\nabla \times \mathbf{A}) = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) - \nabla^2\mathbf{A} \quad (1.40)$$

$$\text{grad div } \mathbf{A} = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) = \nabla \times (\nabla \times \mathbf{A}) + \nabla^2\mathbf{A} \quad (1.41)$$

#### ヘルムホルツの分解定理

任意のベクトル場  $\mathbf{V}$  は, 渦なし場 ( $\text{rot} = 0$ ) と湧き出しなし場 ( $\text{div} = 0$ ) に一意的に分解される:

$$\mathbf{V} = \text{grad } \phi + \text{rot } \mathbf{A} \quad (1.42)$$

(その他)

$$\nabla \cdot (\phi\nabla\psi) = \nabla\phi \cdot \nabla\psi + \phi\nabla^2\psi \quad (1.43)$$

$$\nabla \cdot (\phi\nabla\psi - \psi\nabla\phi) = \phi\nabla^2\psi - \psi\nabla^2\phi \quad (1.44)$$

( $r, \mathbf{r}$  に対する演算)

$$d\mathbf{r} = \mathbf{e}_x dx + \mathbf{e}_y dy + \mathbf{e}_z dz, \quad r d\mathbf{r} = x dx + y dy + z dz, \quad \frac{\partial r}{\partial x} = \frac{x}{r} \quad \text{etc より}$$

$$\mathbf{r} \cdot d\mathbf{r} = r dr \quad (1.45)$$

$$\nabla r = \text{grad } r = \frac{\mathbf{r}}{r} \quad (1.46)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{r} = \text{div } \mathbf{r} = 3 \quad (1.47)$$

$$\nabla \times \mathbf{r} = \text{rot } \mathbf{r} = 0 \quad (1.48)$$

## 1.4 積分公式

以下では、 $S$  は任意の閉曲面、 $V_S$  は  $S$  で囲まれた空間領域、 $\mathbf{n}$  は  $S$  上の各点で外向きに向かう法線ベクトル（単位ベクトル）とする。 $\phi(\mathbf{r})$  はスカラー場、 $\mathbf{A}(\mathbf{r})$  はベクトル場である。また、 $\oint$  は、閉じた閉曲面（または閉曲線）に沿った積分であることを強調する意味で用いる。

$$\int_{V_S} \nabla \phi \, dV = \oint_S \phi \, \mathbf{n} \, dS \quad (1.49)$$

$$\int_{V_S} \nabla \cdot \mathbf{A} \, dV = \oint_S \mathbf{A} \cdot \mathbf{n} \, dS \quad (\text{ガウスの定理}) \quad (1.50)$$

$$\int_{V_S} \nabla \times \mathbf{A} \, dV = \oint_S \mathbf{n} \times \mathbf{A} \, dS \quad (1.51)$$

$$\int_{V_S} (\phi \nabla^2 \psi - \psi \nabla^2 \phi) \, dV = \oint_S (\phi \nabla \psi - \psi \nabla \phi) \cdot \mathbf{n} \, dS \quad (\text{グリーンの定理}) \quad (1.44) \text{ より} \quad (1.52)$$

以下では、 $C$  は閉曲線、 $S_C$  は  $C$  を境界とする曲面、 $\mathbf{n}$  は  $S_C$  上の各点における法線ベクトルで、 $C$  上の積分方向に対し「右ねじ」の進む方向を正の向きとする。

$$\int_{S_C} \mathbf{n} \times \nabla \phi \, dS = \oint_C \phi \, d\mathbf{r} \quad (1.53)$$

$$\int_{S_C} (\nabla \times \mathbf{A}) \cdot \mathbf{n} \, dS = \oint_C \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r} \quad (\text{ストークスの定理}) \quad (1.54)$$

$$\int_{S_C} (\mathbf{n} \times \nabla) \times \mathbf{A} \, dS = \oint_C d\mathbf{r} \times \mathbf{A} \quad (1.55)$$

## 1.5 曲線座標

以下では、 $f(\mathbf{r})$  はスカラー場、 $\mathbf{A}(\mathbf{r})$  はベクトル場とする。直角座標以外では一般に、 $(\nabla^2 \mathbf{A})_\alpha \neq \nabla^2 A_\alpha$  である。最後の  $\nabla^2 \mathbf{A}$  に対する公式は、見つけにくいので保存しておくとも便利である。

（円柱座標）  $(r, \varphi, z)$

$$\text{体積要素} \quad dV = r \, dr \, d\varphi \, dz \quad \text{線分要素} \quad ds^2 = dr^2 + r^2 d\varphi^2 + dz^2 \quad (1.56)$$

$$(\nabla f)_r = \frac{\partial f}{\partial r}, \quad (\nabla f)_\varphi = \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \varphi}, \quad (\nabla f)_z = \frac{\partial f}{\partial z} \quad (1.57)$$

$$\nabla^2 f = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial f}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 f}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} \quad (1.58)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}(rA_r) + \frac{1}{r} \frac{\partial A_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial A_z}{\partial z} \quad (1.59)$$

$$\begin{aligned} (\nabla \times \mathbf{A})_r &= \frac{1}{r} \frac{\partial A_z}{\partial \varphi} - \frac{\partial A_\varphi}{\partial z} \\ (\nabla \times \mathbf{A})_\varphi &= \frac{\partial A_r}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial r} \\ (\nabla \times \mathbf{A})_z &= \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}(rA_\varphi) - \frac{1}{r} \frac{\partial A_r}{\partial \varphi} \end{aligned} \quad (1.60)$$

$$\begin{aligned} (\nabla^2 \mathbf{A})_r &= \nabla^2 A_r - \frac{A_r}{r^2} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial A_\varphi}{\partial \varphi} \\ (\nabla^2 \mathbf{A})_\varphi &= \nabla^2 A_\varphi - \frac{A_\varphi}{r^2} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial A_r}{\partial \varphi} \\ (\nabla^2 \mathbf{A})_z &= \nabla^2 A_z \end{aligned} \quad (1.61)$$

(球座標)  $(r, \theta, \varphi)$

$$\text{体積要素 } dV = r^2 \sin \theta \, dr \, d\theta \, d\varphi \quad \text{線分要素 } ds^2 = dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta \, d\varphi^2 \quad (1.62)$$

$$(\nabla f)_r = \frac{\partial f}{\partial r}, \quad (\nabla f)_\theta = \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \theta}, \quad (\nabla f)_\varphi = \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial f}{\partial \varphi} \quad (1.63)$$

$$\nabla^2 f = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial f}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial f}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 f}{\partial \varphi^2} \quad (1.64)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r}(r^2 A_r) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta}(A_\theta \sin \theta) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial A_\varphi}{\partial \varphi} \quad (1.65)$$

$$\begin{aligned} (\nabla \times \mathbf{A})_r &= \frac{1}{r \sin \theta} \left[ \frac{\partial}{\partial \theta}(A_\varphi \sin \theta) - \frac{\partial A_\theta}{\partial \varphi} \right] \\ (\nabla \times \mathbf{A})_\theta &= \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial A_r}{\partial \varphi} - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}(rA_\varphi) \\ (\nabla \times \mathbf{A})_\varphi &= \frac{1}{r} \left[ \frac{\partial}{\partial r}(rA_\theta) - \frac{\partial A_r}{\partial \theta} \right] \end{aligned} \quad (1.66)$$

$$\begin{aligned} (\nabla^2 \mathbf{A})_r &= \nabla^2 A_r - \frac{2}{r^2} \left[ A_r + \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta}(A_\theta \sin \theta) + \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial A_\varphi}{\partial \varphi} \right] \\ (\nabla^2 \mathbf{A})_\theta &= \nabla^2 A_\theta + \frac{2}{r^2} \left[ \frac{\partial A_r}{\partial \theta} - \frac{A_\theta}{2 \sin^2 \theta} - \frac{\cos \theta}{\sin^2 \theta} \frac{\partial A_\varphi}{\partial \varphi} \right] \\ (\nabla^2 \mathbf{A})_\varphi &= \nabla^2 A_\varphi + \frac{2}{r^2 \sin \theta} \left[ \frac{\partial A_r}{\partial \varphi} + \cot \theta \frac{\partial A_\theta}{\partial \varphi} - \frac{A_\varphi}{2 \sin \theta} \right] \end{aligned} \quad (1.67)$$

(楕円体座標)  $(\xi, \eta, \zeta)$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \quad (a > b > c) \quad (1.68)$$

に対して, 付随するパラメータ曲面族

$$\frac{x^2}{a^2+s} + \frac{y^2}{b^2+s} + \frac{z^2}{c^2+s} = 1 \quad (1.69)$$

を定義する。分母をはらって

$$F(s) = (s+a^2)(s+b^2)(s+c^2) - x^2(s+b^2)(s+c^2) - y^2(s+c^2)(s+a^2) - z^2(s+a^2)(s+b^2) \quad (1.70)$$

と置けば,  $F(-a^2) < 0$ ,  $F(-b^2) > 0$ ,  $F(-c^2) < 0$  だから, 3次方程式  $F(s) = 0$  は3つの実数解

$$\xi > -c^2 > \eta > -b^2 > \zeta > -a^2 \quad (1.71)$$

をもつ。このとき,  $\xi$  は楕円体面族 ( $\xi = 0$  が元の楕円体),  $\eta, \zeta$  はこれに直交する2種類の双曲面族を表し,  $(\xi, \eta, \zeta)$  が新たな直交座標系になる。元の座標系との関係は

$$x^2 = \frac{(\xi+a^2)(\eta+a^2)(\zeta+a^2)}{(a^2-b^2)(a^2-c^2)}, \quad y^2 = \frac{(\xi+b^2)(\eta+b^2)(\zeta+b^2)}{(b^2-c^2)(b^2-a^2)}, \quad z^2 = \frac{(\xi+c^2)(\eta+c^2)(\zeta+c^2)}{(c^2-a^2)(c^2-b^2)} \quad (1.72)$$

である。分かりやすいよう対称形に書いているが,  $y^2$  では分母・分子が負であることに注意。ここで

$$H(s) = (s+a^2)(s+b^2)(s+c^2), \quad H(\xi) > 0, \quad H(\eta) < 0, \quad H(\zeta) > 0 \quad (1.73)$$

を定義しておく。以下では係数はすべて正になるようにしてあり, こうしておく間違えない。

$$\nabla f = 2\sqrt{\frac{H(\xi)}{(\xi-\eta)(\xi-\zeta)}} \frac{\partial f}{\partial \xi} e_\xi + 2\sqrt{\frac{-H(\eta)}{(\xi-\eta)(\eta-\zeta)}} \frac{\partial f}{\partial \eta} e_\eta + 2\sqrt{\frac{H(\zeta)}{(\xi-\zeta)(\eta-\zeta)}} \frac{\partial f}{\partial \zeta} e_\zeta \quad (1.74)$$

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{A} = & \frac{2\sqrt{H(\xi)}}{(\xi-\eta)(\xi-\zeta)} \frac{\partial}{\partial \xi} \sqrt{(\xi-\eta)(\xi-\zeta)} A_\xi + \frac{2\sqrt{-H(\eta)}}{(\xi-\eta)(\eta-\zeta)} \frac{\partial}{\partial \eta} \sqrt{(\eta-\zeta)(\xi-\eta)} A_\eta \\ & + \frac{2\sqrt{H(\zeta)}}{(\xi-\zeta)(\eta-\zeta)} \frac{\partial}{\partial \zeta} \sqrt{(\xi-\zeta)(\eta-\zeta)} A_\zeta \end{aligned} \quad (1.75)$$

$$\begin{aligned} \nabla^2 f = & \frac{4}{(\xi-\eta)(\xi-\zeta)(\eta-\zeta)} \left[ (\eta-\zeta) \left( \sqrt{H(\xi)} \frac{\partial}{\partial \xi} \right)^2 + (\xi-\zeta) \left( \sqrt{-H(\eta)} \frac{\partial}{\partial \eta} \right)^2 \right. \\ & \left. + (\xi-\eta) \left( \sqrt{H(\zeta)} \frac{\partial}{\partial \zeta} \right)^2 \right] f \end{aligned} \quad (1.76)$$

$$(\nabla \times \mathbf{A})_\xi = \sqrt{\frac{-H(\eta)}{\xi-\eta}} \frac{2}{\eta-\zeta} \frac{\partial}{\partial \eta} \sqrt{\eta-\zeta} A_\zeta - \sqrt{\frac{H(\zeta)}{\xi-\zeta}} \frac{2}{\eta-\zeta} \frac{\partial}{\partial \zeta} \sqrt{\eta-\zeta} A_\eta \quad \text{etc.} \quad (1.77)$$