座標の直交変換（座標軸の回転）： $\boldsymbol{e}'_l = U_{li}\ \boldsymbol{e}_i$ 　（重複添字 i は和をとる。以下同様。）

以下では、添え字 $i, j, k, (p, q)$ は元の座標系、l, m, n は変換後の座標系と使い分けてある。

1. 直交性の保存

$$\boldsymbol{e}_i \cdot \boldsymbol{e}_j = \delta_{ij} \qquad (\text{ただし、} i = j \text{ のとき } \delta_{ij} = 1,\ i \neq j \text{ のとき } \delta_{ij} = 0)$$

$$\boldsymbol{e}'_l \cdot \boldsymbol{e}'_m = U_{li}\ U_{mj}\ \boldsymbol{e}_i \cdot \boldsymbol{e}_j = U_{li}\ U_{mj}\ \delta_{ij} = U_{li}\ U_{mi}$$

したがって、変換行列 U は以下の性質を持つ：

$$U_{li}\ U_{mi} = \delta_{lm} \quad , \quad U_{li}\ U_{lj} = \delta_{ij} \qquad \therefore U^{-1} = \tilde{U} \ \text{（転置行列が逆行列）}$$

2. 右手系の保存

$$(\boldsymbol{e}_i \times \boldsymbol{e}_j) \cdot \boldsymbol{e}_k = \mathcal{E}_{ijk} \qquad \text{または} \qquad \boldsymbol{e}_i \times \boldsymbol{e}_j = \mathcal{E}_{ijk}\ \boldsymbol{e}_k$$

$$\mathcal{E} \text{ は、} \{\mathcal{E}_{123} = \mathcal{E}_{231} = \mathcal{E}_{312} = 1\ ,\ \mathcal{E}_{321} = \mathcal{E}_{213} = \mathcal{E}_{132} = -1\ ,\ \text{他はすべて０}\ \}$$

$$(\boldsymbol{e}'_l \times \boldsymbol{e}'_m) \cdot \boldsymbol{e}'_n = U_{li}\ U_{mj}\ U_{nk}\ (\boldsymbol{e}_i \times \boldsymbol{e}_j) \cdot \boldsymbol{e}_k$$

したがって、$\{U_{li}\}$ は、さらに以下の条件を満たさなければならない：

$$U_{li}\ U_{mj}\ U_{nk}\ \mathcal{E}_{ijk} = \mathcal{E}_{lmn}$$

3. ベクトル量

位置座標 $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, x_3),\ x_i = \boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{e}_i$ の変換

$$x'_l = \boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{e}'_l = \boldsymbol{x} \cdot U_{li}\ \boldsymbol{e}_i = U_{li}\ (\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{e}_i) = U_{li}\ x_i \quad , \quad x_i = (U^{-1})_{il}\ x'_l = U_{li}\ x'_l$$

と同じ変換に従う量を**ベクトル**という。すなわち、$\boldsymbol{a} = (a_1, a_2, a_3)$ として

$$a'_l = U_{li}\ a_i \quad , \quad a_i = (U^{-1})_{il}\ a'_l = U_{li}\ a'_l$$

例：ナブラ演算子

$$\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x_1},\ \frac{\partial}{\partial x_2},\ \frac{\partial}{\partial x_3} \right)$$

はベクトルの変換性を持っている。$x_i = (U^{-1})_{il}\ x'_l = U_{li}\ x'_l$ より

$$\frac{\partial}{\partial x'_l} = \frac{\partial x_i}{\partial x'_l}\ \frac{\partial}{\partial x_i} = U_{li}\ \frac{\partial}{\partial x_i}\ , \quad \text{したがって} \quad \nabla'_l = U_{li} \nabla_i$$

4. テンソル量

$$T'_{lm} = U_{li}\ U_{mj}\ T_{ij}$$

の変換則に従う量を**テンソル**という。座標変換で変換を受けない量が**スカラー**である。

例：分極率テンソル（異方性物質中の電気分極）：　$\boldsymbol{P} = \mathcal{X} \cdot \boldsymbol{E}$　(or　$P_i = \mathcal{X}_{\ ij}\ E_j$)

$$P'_l = U_{li}\ P_i = U_{li}\ \mathcal{X}_{ij}\ E_j = U_{li}\ \mathcal{X}_{ij}\ (U^{-1})_{jm}\ E'_m = (U_{li}\ U_{mj}\ \mathcal{X}_{ij})\ E'_m$$

したがって

$$\mathcal{X}'_{lm} = U_{li}\ U_{mj}\ \mathcal{X}_{\ ij}$$

つまり、２つのベクトルが比例関係（線形関係）にあるとき、その係数は一般にテンソルである。特別な場合として、２つのベクトルが平行のとき、係数は定数（スカラー）になる。

5. ２つのベクトルのスカラー積：　$\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = a_i b_i$

$$(\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b})' = a'_l b'_l = U_{li}\ U_{lj}\ a_i b_j = \delta_{ij} a_i b_j = a_i b_i = \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}$$

6. ２つのベクトルのベクトル積：　$(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b})_i = \mathcal{E}_{ijk}\ a_j b_k$

$$(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b})'_l = \mathcal{E}_{lmn}\ a'_m b'_n = U_{li}\ U_{mj}\ U_{nk}\ \mathcal{E}_{ijk}\ U_{mp}\ U_{nq}\ a_p b_q$$

$$= U_{li}\ \delta_{jp}\ \delta_{kq}\ \mathcal{E}_{ijk}\ a_p b_q = U_{li}\ \mathcal{E}_{ijk}\ a_j b_k = U_{li}\ (\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b})_i$$

7. ２つのベクトルのテンソル積：　$(\boldsymbol{a}\ \boldsymbol{b})_{ij} = a_i b_j$

$$(\boldsymbol{a}\ \boldsymbol{b})'_{lm} = a'_l b'_m = U_{li}\ U_{mj}\ a_i b_j = U_{li}\ U_{mj}\ (\boldsymbol{a}\ \boldsymbol{b})_{ij}$$

例：$|\boldsymbol{s}| = 1$ として、ベクトル $\boldsymbol{a}$ の $\boldsymbol{s}$-方向の平行・垂直成分：

$$\boldsymbol{a}_{||} = (\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{s})\ \boldsymbol{s} = (\boldsymbol{s}\ \boldsymbol{s}) \cdot \boldsymbol{a}\ ,\quad \text{または}\ \ (a_{||})_i = a_j s_j s_i = s_i s_j a_j = (\boldsymbol{s}\ \boldsymbol{s})_{ij}\ a_j$$

$$\boldsymbol{a}_\perp = \boldsymbol{a} - \boldsymbol{a}_{||} = (\mathbf{1} - \boldsymbol{s}\ \boldsymbol{s}) \cdot \boldsymbol{a}\ ,\quad \text{または}\ \ (a_\perp)_i = (\delta_{ij} - s_i s_j)\ a_j$$

すなわち、テンソル $\boldsymbol{s}\ \boldsymbol{s}$ は、$\boldsymbol{s}$ 方向への**射影演算子**になる。