物理問題　Ⅱ

次の文章を読んで，$\boxed{}$ に適した式または数値を，{　　} からは適切なものを一つ選びその番号を，それぞれの解答欄に記入せよ。なお，$\boxed{\boxed{}}$ はすでに $\boxed{}$ で与えられたものと同じものを表す。また，**問1**～**問3**では，指示にしたがって，解答をそれぞれの解答欄に記入せよ。ただし，円周率を π とし，以下に登場する物質や気体の透磁率はすべて μ とする。

（1）　**図1**のように，長さ d，半径 r の円筒に抵抗の無視できる導線を一様に N 回巻き付けて作ったソレノイド(以下コイルとよぶ)がある。円筒内部は気体で満たされており，コイルの長さ d は r と比べて十分長く，このコイルに電流を流すと円筒内部には一様な磁束密度ができる。このコイルに外部電源を接続して電流 I を流したときに円筒内部に発生する磁束密度の大きさは $\boxed{\text{イ}}$ である。

次に，微小時間 Δt の間に電流を I から $I+\Delta I$ にゆっくりと変化させると，コイルには誘導起電力 $\boxed{\text{ロ}} \times \dfrac{\Delta I}{\Delta t}$ が発生する(ΔI は微小量であり，起電力の符号は電流の上流側の電位が高い場合を正とする)。このことから，このコイルの自己インダクタンスは $\boxed{\text{ハ}}$ である。また，時間 Δt の間に外部電源がコイルにした仕事は $\boxed{\text{ニ}} \times \Delta I$ である。

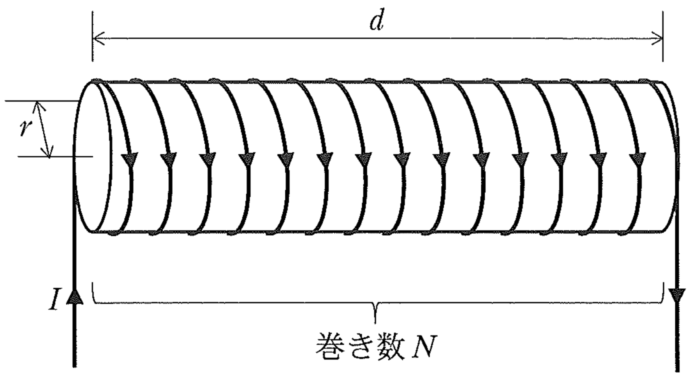

図1

図１のコイルに電流Iが流れているとき，コイルにはエネルギー $\boxed{\quad ホ \quad}$ が蓄えられている。コイルを流れる電流がIから$I + \Delta I$に変化する際のこのエネルギーの増加は，$\Delta x \ll x$を満たす十分小さなΔxに対して成立する近似式

$$(x + \Delta x)^2 - x^2 \fallingdotseq 2x\Delta x \qquad \text{(i)}$$

を使うと $\boxed{\quad ニ \quad}$ $\times \Delta I$となり，外部電源がコイルにした仕事と一致する。つまり，外部電源が行った仕事がコイルのエネルギーとして蓄積される。

(２) 図２のように，バルーンアート用の風船のような細長い円筒形状をした伸縮自在の閉じた膜に，伸縮自在で抵抗の無視できる導線を巻き数密度(円筒軸方向の単位長さ当たりの導線の本数)が一様となるようにN回巻き付けて作ったソレノイド(以下コイルとよぶ)がある。膜内部の気体の量は調整でき，このとき膜は円筒形状を保ったまま半径や長さが変わる。導線は膜に接着されており，膜の半径や長さが変化するとき導線は膜に接したままむらなく伸び縮みし，巻き数密度は一様に保たれるものとする。また，膜は厚みの無視できる絶縁体でできており，膜と導線は容易に伸縮するものとし，膜の面積，導線の長さおよび形状の変化に要する仕事は十分小さく無視できるものとする。

なお，以下では必要に応じて近似式(i)を使って$(\Delta t)^2$を無視し，解答欄にはΔtを使わずに解答を記入せよ。

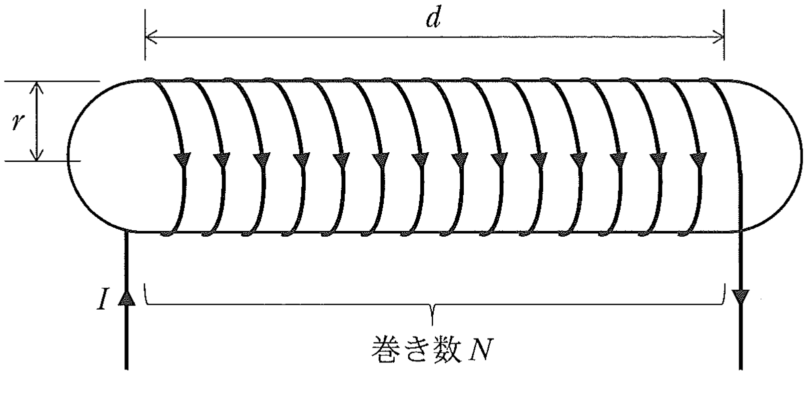

図２

まず，コイルの両端を固定装置で固定して動かないようにし，膜の長さが d に保たれるようにした。この状態でコイルに電流 I を流し，膜内部の気体の量を調整して，**図 2** のようにコイルの半径が r となる状態を作った。このとき，コイル内部には一様な磁束密度 $\boxed{\text{イ}}$ が発生した。この状態から，電流 I を一定に保ったまま膜内部の気体の量をゆっくり増加させたところ，コイルの半径は速さ v で大きくなり，微小時間 Δt ののちに $r + v\Delta t$ になった。このとき，コイル一巻きを貫く磁束は Δt の間に $\Delta\Phi = \boxed{\text{ヘ}} \times \Delta t$ だけ増加するので，コイルには誘導起電力 $\boxed{\text{ト}}$ が発生する(起電力の符号は電流の上流側の電位が高いときを正とする)。また，時間 Δt の間に外部電源がコイルに対して行う仕事は $\boxed{\text{チ}} \times \Delta t$ である。

一方，コイルに蓄えられるエネルギー($\boxed{\text{ホ}}$)は，コイル半径が大きくなったことにより時間 Δt の間に $\boxed{\text{リ}} \times \Delta t$ だけ増加する。このエネルギーの変化は，外部電源が行った仕事 $\boxed{\text{チ}} \times \Delta t$ と，膜内外の気体の圧力差が膜に対して行った仕事の和に等しい。時間 Δt の間にコイルの体積は $\boxed{\text{ヌ}} \times \Delta t$ だけ増加するので，膜内外の気体の圧力差を

$$\delta p = (\text{外部の気体の圧力}) - (\text{内部の気体の圧力})$$

とすると，膜内外の気体の圧力差が時間 Δt の間に膜に対して行う仕事は δp を使って $\boxed{\text{ル}} \times \Delta t$ と書ける。以上のことから膜内外の気体の圧力差 δp を求めることができ，μ と $\boxed{\text{イ}}$ で求めたコイル内部の磁束密度 B のみを用いて表すと $\delta p = \boxed{\text{ヲ}}$ と書ける。

いま，膜には膜内外の気体がもたらす圧力差に加え，電流 I が作り出す圧力が働いている。これらの圧力がつり合いの条件を満たすことから，電流 I が作り出す圧力は，{**ワ**：①コイルを膨らませる方向に働いている，②コイルを収縮させる方向に働いている，③働いていない}。

（3）　コイルを**図 2** の状態に戻してから，コイルの半径を r に固定したうえでコイルの円筒軸方向の長さを自由に変化させられるようにした。コイルの円筒軸方向の長さが d の状態から，電流 I を一定に保ったまま膜の内部の気体量を変化させたところ，円筒軸方向の長さが速さ v でゆっくりと大きくなり，微小時間 Δt ののちに $d + v\Delta t$ になった。このとき，$\Delta x \ll x$ を満たす十分小さな Δx に対して成り立つ近似式

$$\frac{1}{x + \Delta x} - \frac{1}{x} \fallingdotseq -\frac{\Delta x}{x^2} \qquad \text{(ii)}$$

を使って Δt の 2 次以上の項を無視すると，微小時間 Δt の間に外部電源がコイルに対して行う仕事は $\boxed{\text{カ}}$ $\times \Delta t$ であることが分かる。このとき**問 1** ～**問 3** に答えよ。

問 1　膜内外の気体の圧力差を

$$\delta p = (\text{外部の気体の圧力}) - (\text{内部の気体の圧力})$$

とするとき，δp を求めよ。ただし，近似式(ii)を使って Δt の 2 次以上の項を無視し，解答には μ と $\boxed{\text{イ}}$ で求めたコイル内部の磁束密度 B のみを用いよ。

問 2　電流 I がコイルの両端面に作り出す圧力※の向きについて，適切なものを以下から選んで番号を解答欄に記入せよ。

①　コイルが円筒軸方向に伸びようとする圧力が働いている。

②　コイルが円筒軸方向に縮もうとする圧力が働いている。

③　圧力は働いていない。

問 3　**問 2** の結果を，コイルを形成する各一巻きの導線を流れる電流が相互に及ぼす力に基づいて簡潔に説明せよ。

ソレノイドの両端の切り口は、伸縮自在の膜のままでは圧力差を保てません。膨らんでもそれ以上は伸びない素材にするか変形しない板を接着しておかないと、電流に働いている磁気力（※）と空気の圧力差の釣り合いを考えることは不可能です。問題を解くのに支障はないので、受験生は答を計算するのに夢中で試験場では気が付かなかったでしょうが、物理的なメカニズムは正確に理解しておく方がいいでしょう。「マクスウェル応力」という生半可な知識で納得してしまうのは禁物です。