共変ベクトルと反変ベクトルの添え字の付け方が、世間と逆になってるかもしれません。

共変ベクトルと反変ベクトル　一般的な空間（曲面）の座標変換 $\{x'_i = f_i(x_1, x_2, \ldots)\}$ で**基底**（基底ベクトルの**組**）が $\{\boldsymbol{e}_i\} \to \{\boldsymbol{e}'_i\}$ と変換されるとき，位置ベクトル $\boldsymbol{r}$ そのものは不変として

$$\mathrm{d}\boldsymbol{r} = \sum_i \boldsymbol{e}_i \mathrm{d}x_i = \sum_i \boldsymbol{e}'_i \mathrm{d}x'_i \tag{1}$$

である。したがって，座標が拡がれば基底が縮むなど，一般に基底は座標と**逆の変換**を受けることにより変換を相殺する。そこで，基底と同じ変換に従うか，その反対かで**共変**，**反変**と名付けるのであるが，基底のことは保留しておき，座標変換から出発する方が分かりやすい。座標変換が局所的に

$$\mathrm{d}x'_i = \sum_j \frac{\partial x'_i}{\partial x_j}\, \mathrm{d}x_j \tag{2}$$

で与えられるとして，同じ変換（紛らわしいが「座標と共変」な変換）

$$V'_i = \sum_j X_{ij} V_j \;, \quad X_{ij} = \frac{\partial x'_i}{\partial x_j} \tag{3}$$

に従うベクトルを**反変ベクトル**という。物理で出てくる「ベクトル量」とは微妙にちがい，正確には「ベクトル量を反変ベクトル形式で表す」と言うべきだろう。これに対して

$$\Lambda'_i = \sum_j \frac{\partial x_j}{\partial x'_i}\, \Lambda_j \tag{4}$$

に従うベクトルを**共変ベクトル**という。空間（一般には曲面の局所的接平面）を決める**基底**は，(1) により位置ベクトル $\boldsymbol{r}(x_1, x_2, \ldots)$ から定義され，

$$\boldsymbol{e}'_i = \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial x'_i} = \sum_j \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial x_j} \frac{\partial x_j}{\partial x'_i} = \sum_j \frac{\partial x_j}{\partial x'_i}\, \boldsymbol{e}_j \tag{5}$$

を満たすから，確かに組 $\{\boldsymbol{e}_i\}$ として共変の定義の規範になっている。ここで（上で既に用いた）偏微分の推移則から

$$\frac{\partial x_i}{\partial y_j} = \sum_k \frac{\partial x_i}{\partial x'_k} \frac{\partial x'_k}{\partial y_j} \quad \Rightarrow \quad \sum_k \frac{\partial x_i}{\partial x'_k} \frac{\partial x'_k}{\partial x_j} = \frac{\partial x_i}{\partial x_j} = \delta_{ij} \tag{6}$$

が成り立つから，(3) と (4) の変換の係数は互いに**逆行列**の関係にあり，(4) は

$$\Lambda'_i = \sum_j \Lambda_j (X^{-1})_{ji} \quad \Big(= \sum_j (X^{-1})^T_{ij}\ \Lambda_j \quad \leftarrow\ T\ \text{は転置}\Big) \tag{7}$$

と書く[1]ことができる。行列の言い方をすれば，反変ベクトルは**列ベクトル**（1 列行列），共変ベクトルは**行ベクトル**（1 行行列）の変換規則

$$\mathrm{V}' = \mathrm{XV} \;, \quad \Lambda' = \Lambda \mathrm{X}^{-1} \tag{8}$$

に従っている。（**逆の対応**も可能）この 2 種類のベクトルを区別するため，共変ベクトルの成分は $\{\Lambda_i\}$，反変ベクトルは $\{V^i\}$ と，（ここまでの部分や行列も含めて）添え字の位置で書き分ける約束になっている。（私はこの憂鬱な記号に出くわしたら，我流で「行ベクトル」「列ベクトル」と気楽に読むことにしている。）

以上により，共変ベクトルと反変ベクトルの積 $\Lambda_i V^i$ （ダブル添え字に対する和の記号 $\sum$ は慣例的には省略される）は，1 行行列 Λ と 1 列行列 V の（行列計算の）積に対応させることができて，

$$\Big(\ \sum_i \Lambda_i V^i =\ \Big) \quad \Lambda_i V^i = \Lambda \mathrm{V} \quad \Rightarrow \quad \Lambda' \mathrm{V}' = \Lambda \mathrm{X}^{-1} \mathrm{XV} = \Lambda \mathrm{V} \tag{9}$$

[1] （　）の中の書き方から分かるように，**ユークリッド空間**の直角座標の回転（**直交変換**）では $\mathrm{X}^{-1} = \mathrm{X}^T$ により基底と座標で変換行列は同じになり，共変・反変の区別は意味をもたない。後で出てくる記号で言えば G が単位行列である。

これを**内積**といい，座標変換で不変な**スカラ量**である。同様に (1) も予定通り座標変換で不変である。基底の変換を「逆変換」ではなく「逆の変換」と書いたのは，逆行列で右から[2]変換されるためである。

ローレンツ変換は 4 次元座標の線形変換であり，**逆変換**は相対速度 v の符号を変えれば得られる。相対速度 $\boldsymbol{v}$ の方向が一般の場合の形を（後の共変の結論が一般的であることを確かめておくため）最初だけ書いておく。ct を変数とするローレンツ変換，変換行列 X，およびその逆行列 X^{-1} は，記号

$$\beta = \frac{v}{c}\ ,\quad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}\ ,\quad \mathrm{G} = \mathrm{G}^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{10}$$

を用い，$\boldsymbol{v} = (v_1, v_2, v_3)$，$\boldsymbol{\beta} = \boldsymbol{v}/c\ \ (\beta_i = v_i/c)$ として，以下のように書くことができる：

$$ct' = \gamma(ct - \boldsymbol{\beta}\cdot\boldsymbol{r})\ ,\quad \boldsymbol{r}' = \gamma(\boldsymbol{r}_\parallel - \boldsymbol{\beta}ct) + \boldsymbol{r}_\perp \qquad \Big(\boldsymbol{r}_\parallel = (\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{r})\boldsymbol{v}/v^2\ ,\ \ \boldsymbol{r}_\perp = \boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_\parallel\Big) \tag{11}$$

$$\mathrm{X} = \begin{pmatrix} \gamma & -\gamma\beta_1 & -\gamma\beta_2 & -\gamma\beta_3 \\ -\gamma\beta_1 & 1+(\gamma-1)\beta_1^2/\beta^2 & (\gamma-1)\beta_1\beta_2/\beta^2 & (\gamma-1)\beta_1\beta_3/\beta^2 \\ -\gamma\beta_2 & (\gamma-1)\beta_2\beta_1/\beta^2 & 1+(\gamma-1)\beta_2^2/\beta^2 & (\gamma-1)\beta_2\beta_3/\beta^2 \\ -\gamma\beta_3 & (\gamma-1)\beta_3\beta_1/\beta^2 & (\gamma-1)\beta_3\beta_2/\beta^2 & 1+(\gamma-1)\beta_3^2/\beta^2 \end{pmatrix},\quad \mathrm{X}^{-1} = \mathrm{G}^{-1}\mathrm{X}^T\mathrm{G} \tag{12}$$

ここでは $\mathrm{X}^T = \mathrm{X}$（対称行列）である。行列 G は，左から掛かれば 1 行目の，右から掛かれば 1 列目の符号，すなわち相対速度（β_i）の符号を変える作用をもつ。

$\mathrm{V} = (q^0, q^1, q^2, q^3)^T$ がこのローレンツ変換に従う反変ベクトル（列ベクトル），

$$\mathrm{V}' = \mathrm{XV} \tag{13}$$

とするとき，転置行ベクトル V'^T の先頭だけ符号を変えた $\mathrm{V}'^T\mathrm{G}$ は，

$$\mathrm{V}'^T\mathrm{G} = (\mathrm{XV})^T\mathrm{G} = \mathrm{V}^T\mathrm{X}^T\mathrm{G} = \mathrm{V}^T\mathrm{G}\mathrm{G}^{-1}\mathrm{X}^T\mathrm{G} = (\mathrm{V}^T\mathrm{G})\mathrm{X}^{-1} \tag{14}$$

を満たす。つまり第 0 物理量だけ符号を変えて $q_0 = -q^0$，$q_1 = q^1$，$q_2 = q^2$，$q_3 = q^3$ とした $\mathrm{V}^T\mathrm{G}$ が，**逆の変換**に従う共変ベクトルであることが分かる[3]。以上より，2 つの反変ベクトル V_1 と V_2 の内積を ${\mathrm{V}_1}^T\mathrm{G}\mathrm{V}_2$ と定義することでローレンツ変換に対して**不変量**になる。

これに対して ict を変数にする複素ベクトルの流儀では，同じ意味での（簡単化した[4]）変換行列は

$$\mathrm{X} = \begin{pmatrix} \gamma & -i\gamma\beta & 0 & 0 \\ i\gamma\beta & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},\quad \mathrm{X}^{-1} = \begin{pmatrix} \gamma & i\gamma\beta & 0 & 0 \\ -i\gamma\beta & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{15}$$

である。この場合は $\mathrm{X}^{-1} = \mathrm{X}^T$（G が単位行列）であるから，(13) の転置が

$$\mathrm{V}'^T = \mathrm{V}^T\mathrm{X}^T = \mathrm{V}^T\mathrm{X}^{-1} \tag{16}$$

となる。したがって転置しただけの行ベクトル V^T が共変ベクトルであり，内積は ${\mathrm{V}_1}^T\mathrm{V}_2$ である。

変換がユニタリの場合は $\mathrm{X}^{-1} = \mathrm{X}^\dagger$ だから，(13) のエルミート共役（転置と複素共役）をとって

$$\mathrm{V}'^\dagger = \mathrm{V}^\dagger\mathrm{X}^\dagger = \mathrm{V}^\dagger\mathrm{X}^{-1} \tag{17}$$

となるから，$\mathrm{V}^\dagger$ が共変ベクトルであり，V_1 と V_2 の内積は見慣れた ${\mathrm{V}_1}^\dagger\mathrm{V}_2$ の形で与えられる。

複素ベクトル空間のユニタリ変換（実ベクトル空間の直交変換を含む）では，同一ベクトルの内積は**非負**（正または 0）であるが，一般にはそうとは限らない。

---

[2] 基底ベクトル $\boldsymbol{e}_i$ を列ベクトルとして縦に書いて，$i = 1, 2, 3, \ldots$ と横に並べた行列 E は，$\mathrm{E}' = \mathrm{EX}^{-1}$ と変換される。
[3] 逆に代表的な共変ベクトル $\{\partial/\partial x_i\} = (\partial/c\partial t, \nabla)$ に対して，$(-\partial/c\partial t, \nabla)$ が反変ベクトルである。
[4] 一般形の必要がなくなれば**簡単化**して標準的な設定，$\beta_1 = \beta$，$\beta_2 = \beta_3 = 0$ とすればよい。