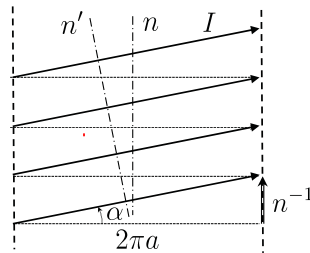


無限に長いソレノイドの外には磁場はできないのか？

「ソレノイドが十分に長ければ外には磁場はできない」と言う。それなら，ごく細いコイル状の導線を円筒に巻き付けて2重コイルにしたとき，円筒の中には磁場はできないのか？ — コイルと言えど遠方から見れば1本の直線電流である。逆に詳細に見れば，コイルのピッチが有限な限り内部にはらせん状の磁場の横成分が現れる。



コイルの展開図

$$\begin{aligned} \text{ピッチ} \quad 2\pi a \tan \alpha &= n^{-1} \\ \text{実効巻き数密度} \quad n' &= \frac{n}{\cos \alpha} \\ \text{電流密度} \quad j &= n'I = \frac{nI}{\cos \alpha} \\ j_z &= j \sin \alpha = nI \tan \alpha \\ j_\varphi &= j \cos \alpha = nI \end{aligned}$$

コイルのピッチ角度を α とすると，ソレノイドの半径 a ，巻き数密度 n との間に

$$2\pi a \tan \alpha = n^{-1} \quad (1)$$

つまり，「1周すると n^{-1} だけ進む」という関係がある。したがって，図で明らかなように電流密度の成分は，円筒上で一様に

$$j_z = \frac{I}{2\pi a}, \quad j_\varphi = nI, \quad j_r = 0 \quad (2)$$

となる。この結論は ピッチ角 α に関係なく， j_z がある限りソレノイドを取り巻く磁場ができる。ベクトルポテンシャル ($\nabla^2 \mathbf{A} = -\mu \mathbf{j}$) の z 成分は

$$A_z(r) = \begin{cases} -\frac{\mu I}{2\pi} \log r & (r > a) \\ -\frac{\mu I}{2\pi} \log a & (r \leq a) \end{cases} \quad (3)$$

$j_r = 0$ だから $A_r = 0$ である。したがって磁束密度 $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$ の φ 成分は円柱座標で¹

$$B_\varphi = -\frac{\partial A_z}{\partial r} = \frac{\mu I}{2\pi r} \quad (r > a) \quad (4)$$

となり，内部では0である。コイルがいかに密に巻かれていても 軸方向に都合 I の電流 が流れており，ちゃんとアンペールの法則を満たしている。したがって，ごく細いコイルを円筒に巻き付けた2重コイルを作っても，この取り巻き磁場により円筒の内部には一様な平行磁場ができるわけだ。

このような磁場の微細 ($\sim j_z/j_\varphi = \tan \alpha$) なもれを防ぐには，コイルを端まで達したら同じ向きに巻きながらピッチ角 $-\alpha$ でもどってくるようにすればよい。軸方向の実効的な電流は往復でキャンセルし，外側に磁場が生じることはない。もちろん，巻き数密度が2倍になるから j_φ は2倍になる。

同様に φ 成分が求まる：

$$A_\varphi(r) = \begin{cases} \frac{\mu a^2 n I}{2} \frac{1}{r} & (r > a) \\ \frac{\mu n I}{2} r & (r \leq a) \end{cases}, \quad B_z = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r A_\varphi = \begin{cases} 0 & (r > a) \\ \mu n I & (r \leq a) \end{cases} \quad (5)$$

(たとえ上のような細工をしたとしても，これは残る。この場合，外側では $B_z = 0$ であるが， $A_\varphi \neq 0$ である。)

¹ $A_r = 0$ ，また A_z, A_φ ともに r だけの関数のとき， $\nabla^2 \mathbf{A} = -\mu \mathbf{j}$ ， $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$ に必要な公式：

$$\begin{aligned} (\nabla^2 \mathbf{A})_z &= \nabla^2 A_z = \frac{1}{r} \frac{d}{dr} r \frac{dA_z}{dr}, \quad (\nabla^2 \mathbf{A})_\varphi = \nabla^2 A_\varphi - \frac{A_\varphi}{r^2} = \frac{1}{r} \frac{d}{dr} r \frac{dA_\varphi}{dr} - \frac{A_\varphi}{r^2} \\ (\nabla \times \mathbf{A})_z &= \frac{1}{r} \frac{d}{dr} r A_\varphi, \quad (\nabla \times \mathbf{A})_\varphi = -\frac{dA_z}{dr} \end{aligned}$$

(詳細) ここまでは電流密度を用いた連続体近似であり, コイルの離散的な周期構造の効果は無視している。そこで, Biot-Savart の法則

$$d\mathbf{B} = \frac{\mu I}{4\pi} \frac{d\mathbf{s} \times (\mathbf{r}/r)}{r^2} \quad (6)$$

に立ち返って考える。とりあえずソレノイドの中心軸上の観測点を原点として,

$$dz = a d\varphi \tan \alpha, \quad d\mathbf{s} = (-\sin \varphi, \cos \varphi, \tan \alpha) a d\varphi \quad (7)$$

$$\mathbf{r} = (-x, -y, -z) = (-a \cos \varphi, -a \sin \varphi, -z), \quad r^2 = a^2 + z^2 \quad (8)$$

$$d\mathbf{s} \times \mathbf{r} = (-z \cos \varphi + a \sin \varphi \tan \alpha, -a \cos \varphi \tan \alpha - z \sin \varphi, a) a d\varphi \quad (9)$$

を用いる。

中心軸上での平行成分 どこで観測してもらえんの基準方向が変わるだけで回転対称であると期待される。実際, $a d\varphi = dz / \tan \alpha$ であるから z 成分から回転の変数 φ は完全に消えている。したがって, 長さ l のソレノイドでは, 端の位置 (原点) で

$$B_z(0) = \frac{\mu a I}{4\pi \tan \alpha} \int_0^l \frac{dz}{(z^2 + a^2)^{3/2}} = \frac{\mu n I l}{2\sqrt{l^2 + a^2}} \quad (n = (2\pi a \tan \alpha)^{-1}) \quad (10)$$

長さ $2l$ のソレノイドの中心では, この2倍である。同じく中心から z の位置では, 長さが $l+z$ と $l-z$ のときの端での値の和で²

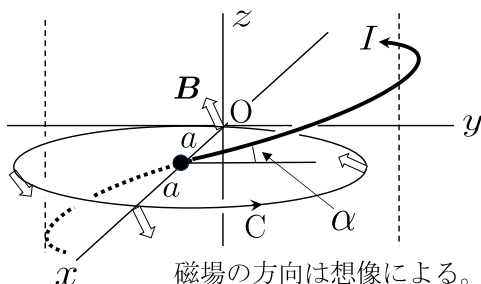
$$B_z(z) = \frac{B_0}{2} \left(\frac{l-z}{\sqrt{(l-z)^2 + a^2}} + \frac{l+z}{\sqrt{(l+z)^2 + a^2}} \right) \quad (B_0 = \mu n I) \quad (11)$$

となり, 円電流の重ね合わせで求めたものと全く同じで, コイルの周期構造の影響は現れない。 B_0 で表すとピッチ角 α によらないように見えるが, $B_0 = \mu n I = \mu I / 2\pi a \tan \alpha$ である。なお, $N = 2n l$, $l/a = N/2na = N\pi \tan \alpha$ とすれば, たいていの演習書に書かれている答の形になる。

中心軸上での横成分 ピッチ角が0でない限りらせんには隙間があり, 軸に垂直な平面内で電流を囲む閉曲線, 例えば電流が平面を貫く点(●)を中心とし, らせんの中心軸を通る半径 a の円 C を描くことが可能である。この円に Ampère の法則を適用すると, 内部にも中心付近で

$$B_{\perp}(0) \sim -\frac{\mu I}{2\pi a} \quad \left(= -\frac{B_0}{2\pi a n} \right) \quad (12)$$

程度の平均的な³横成分があってもおかしくはない。もしあれば, その方向は コイルに同期 してらせん状に回転することだけは確かである。(注: Ampère の定理を適用する際に円を貫く電流の符号は必須であるが, 電流密度とちがって貫く角度 α は関係ない。) [250]¹ の脚注 1 は単にこの推測に基づいただけであった。



磁場の方向は想像による。

Ampère の法則

$$\oint_C \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} = \mu I$$

(角度 α にはよらない。)

² 便利: ソレノイド内部の任意の位置における磁場は, それより左の部分が右端に作る磁場と, 右の部分が左端につくる磁場の合成である。したがって, 任意の長さのソレノイドの端での磁場さえ求めておけば, 任意の位置での磁場が求まる。逆, すなわち分解は一義的に定義できないため, 中央位置での対称で同じ向きの平行成分以外には, 一般には適用できない。

³ 円 C と電流が交差することはないから, 横成分が特異的に強い位置はないと思われる。

積分は簡単にはできないが、最初から $l \rightarrow \infty$ とするなら具体的な表式を求めることができる。
 $\kappa = 1/a \tan \alpha (= 2\pi n)$, $k = \kappa a = 1/\tan \alpha$, $z = \kappa^{-1}\varphi$ と置いて, (9) を以下のように書く：

$$(\mathbf{ds} \times \mathbf{r})_x = \kappa^{-1}a(-\varphi \cos \varphi + \sin \varphi) d\varphi, \quad (\mathbf{ds} \times \mathbf{r})_y = -\kappa^{-1}a(\varphi \sin \varphi + \cos \varphi) d\varphi \quad (13)$$

以後これをコイルのらせんに同期して、観測点の位置 z に応じて $2\pi n z$ 回転した座標系 (ξ, η, z) における成分とみなし、 φ は ξ 軸からの角度とする。 $r^3 = \kappa^{-3}(\varphi^2 + k^2)^{3/2}$ で割って $-\infty$ から ∞ まで積分すれば、 ξ 成分は奇関数だから $B_\xi = 0$ で、 η 成分は

$$B_\eta = -\frac{\mu I}{2\pi a} [F(k) - kF'(k)] \quad \left(\frac{\mu I}{2\pi a} = \frac{B_0}{2\pi an} \right) \quad (14)$$

$$\text{ただし } F(k) = k^2 \int_0^\infty \frac{\cos \varphi d\varphi}{(\varphi^2 + k^2)^{3/2}}, \quad F(0) = 1, \quad F'(0) = 0 \quad (15)$$

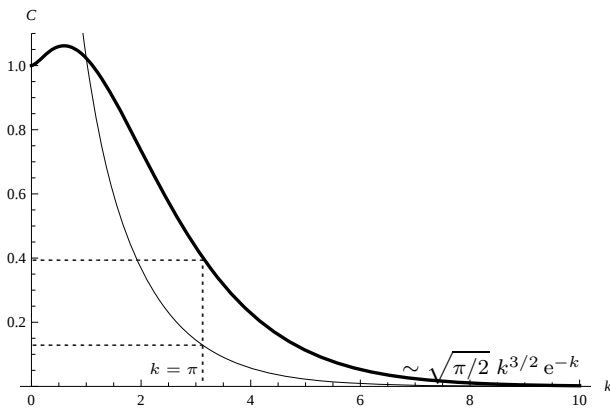
と表すことができる。図のように $k (= 1/\tan \alpha)$ が 0 から 2 のあたりまでは、符号まで含めて推測 (12) の通りである。一方、 $k \rightarrow \infty$ では係数が $\sqrt{\pi/2} k^{3/2} \exp(-k)$ の形で急速に 0 に向かうため、 $k^{-1} = \tan \alpha$ のいかなる ベキ近似 でも $B_\eta = 0$ であり、長さが有限の場合の補正項⁴の方が支配的になる。

数値計算の結果を見ると、ピッチが $n^{-1} = a$ でも係数 $C = 0.042$ ($|B_\eta|/B_0 = 0.007$) であり、実際上無視できるが、この辺りは変化が急で、 $n^{-1} = 2a$ なら $C = 0.398$ ($|B_\eta|/B_0 = 0.127$) と微妙である。 B_0 が n に比例し $|B_\eta|/B_0 = C/2\pi an$ だから、ピッチ n^{-1} がさらに大きくなると相対的に横成分 B_η が急速に幅を利かせるようになり、もはやソレノイドの体をなさなくなるだろう。

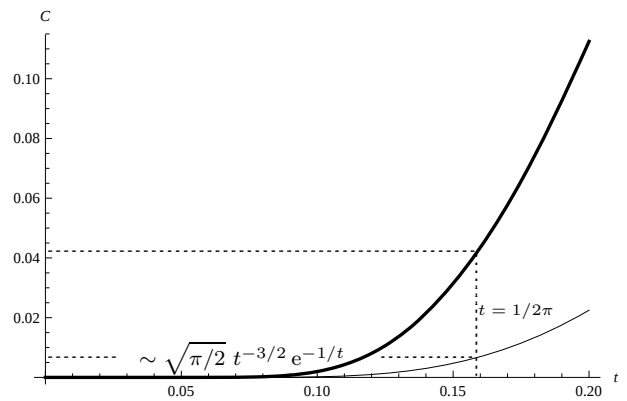
この内部にできる横成分は、外部での横成分と違って巻き数を十分密 ($na \gg 1$) にしておけば考慮する必要はないが、p.1 で述べたように、コイルを端まで達したら逆ピッチで折り返す構造にすれば、増分 dz に対して電流の z 成分も横成分も逆向きであるから、積分すれば外部と同じく巻き数密度にはよらず完全に打ち消される。

(補足) (14) の係数 $[\dots]$ 中の積分は第 2 種変形 Bessel 関数で表され、数値計算できる：

$$F(k) = kK_1(k), \quad (kK_1(k))' = -kK_0(k), \quad \text{係数 } C = kK_1(k) + k^2K_0(k) \quad (16)$$



係数 C : 変数は $k = (\tan \alpha)^{-1} = 2\pi an$ (細線は C/k)



係数 C : 変数は $t = \tan \alpha = 1/2\pi an$ (細線は Ct)

⁴ $\varphi = \kappa l$ から ∞ (および $-\infty$ から $-\kappa l'$) までの積分を評価して a/l , a/l' について最低次の補正を求めれば、 ξ , η 成分にそれぞれ以下の項が加わる (簡単化のため総巻き数 $n(l + l')$ は整数とする)：

$$\frac{\mu I}{4\pi a} [(a/l)^2 + (a/l')^2] \times \begin{cases} -\sin \kappa l \\ \cos \kappa l \end{cases}$$

長さが有限の場合は、当然ながら観測点から見たコイルの端の位相 ($\kappa l = 2\pi nl$) が関与することになる。

軸から離れた位置での平行成分 ここまでの結果だけでは $\nabla \times B = 0$ を満たしていない。 $z = 0$ の平面上の点 (x_0, y_0) における B_z の補正項が、 $\rho = \sqrt{x_0^2 + y_0^2}$ の 1 次の範囲で同様にして計算できる：

$$\tilde{B}_z = \frac{\mu I}{2\pi a} \times \kappa x_0 [k^2 K_2(k) - k K_1(k)] = \frac{\mu I}{2\pi a} \times \kappa x_0 [k K_1(k) + k^2 K_0(k)] = -\kappa x_0 B_\eta \quad (17)$$

つまり y 方向には一定である。 z 進んだ平面では x_0 は $\xi = \rho \cos(\varphi - \kappa z)$ であり、 (ξ, η, z) 系では、 $B = |B_\eta|$ として

$$\begin{cases} B_\xi(\xi, \eta, z) = 0 \\ B_\eta(\xi, \eta, z) = -B \\ B_z(\xi, \eta, z) = B_0 + B \kappa \xi \end{cases} \quad (18)$$

と Simple であるが、直交座標系ではない（直交変換ではなく、 $\{g_{ij}\}$ が対角的ではない）ためベクトル解析が厄介である。一方、元の $z = 0$ での直角座標系で表した (x, y, z) 成分は

$$\begin{cases} B_x(x, y, z) = B \sin \kappa z \quad (z \text{ 平面の中心付近で同様, } x, y \text{ によらない。}) \\ B_y(x, y, z) = -B \cos \kappa z \quad (\text{同上}) \\ B_z(x, y, z) = B_0 + B \kappa \rho \cos(\varphi - \kappa z) = B_0 + B \kappa (x \cos \kappa z + y \sin \kappa z) \end{cases} \quad (19)$$

となる。（ここでは回転角 φ も $z = 0$ での x 軸からの角度としている。）

(17) は、ピッチが n^{-1} で半径 ρ のらせん 1 巻きに対する Ampère の積分定理（ $n^{-1} \tilde{B}_z + 2\pi \rho B_\eta = 0$ ）から予測したもので、実際、この ρ の 1 次の範囲で $\nabla \times B = 0$ を満たしている。ただし、これだけでは $\nabla \cdot B = 0$ は成り立っていない。

外部（あるいは内部でも中心軸から離れた位置） 中心軸からの距離を R として

$$r^2 = (R - a \cos \varphi)^2 + a \sin^2 \varphi + z^2 = R^2 + a^2 + z^2 - 2Ra \cos \varphi \quad (20)$$

($z = \kappa^{-1} \varphi$) であって、この $3/2$ 乗が分母に現れるため、積分は絶望的である。先に z で積分して $l \gg R \gg a$ とすれば、当然ながら連続体近似と同じ 1 本の直線電流 I による磁場

$$B_\eta \simeq \frac{\mu n I}{4\pi} \frac{4\pi a \tan \alpha}{R} = \frac{a}{R} \times B_0 \tan \alpha = \frac{\mu I}{2\pi R} \quad (21)$$

となる。表面近く（ $R \sim a$ ）ではコイルのらせん構造の影響が現れるだろう。

⁵ そうでなければ、変形 Bessel 関数の漸化式

$$K_{\nu-1}(k) - K_{\nu+1}(k) = -\frac{2\nu}{k} K_\nu(k)$$

は気が付かない（ *Mathematica* は自動的に教えてくれない）。