

今年の京大後期入試で、平行板コンデンサの極板に働く横向き（極板に平行な方向）の力を求める問題が出題された。前半の極板間の力と同じように静電エネルギーと仮想仕事の関係から計算して求め、その原因について記述式の問になっている。導体板上の同符号電荷は互いに反発し横に広がろうとする力を及ぼし合っているが、実際に導体板に横向きの力を及ぼしているのは端に集積した電荷である。導体板は等電位であるから、端以外の位置の電荷に働く横向きの力の合力は、どこでも0であるが、端の電荷だけはこの限りではなく、横向きの力はこれに働くクーロン力で求められるはずである。しかしながら、導体表面での電場は表面に垂直だから極板間の力のように簡単にはいかない。大学の教科書でもこの力の計算はなかなか見当たらないので、解説しておこう。極板は半無限の平面であるとする。

注・予備校の解説には、極板間の電気力線に垂直に働くマクスウェル応力の 圧力 とするものもあった¹。マクスウェル応力は、静電場の存在する真空の隣合う部分が及ぼし合って釣り合っていると見なすときの近接作用の内力であり、導体や誘電体の境界で表に現れる。極板に働く横向きの力は、マクスウェル応力で言うなら極板の端から真横に出ている電気力線の 張力 である。適切な閉曲面でマクスウェル応力の面積分の釣り合いを考えればこの力は求まる（→p.3）が、この発想は高校生には無理である。

半無限の導体板 電位 ϕ （と電気力線 ψ ）は、 $z = x + iy$ と $\zeta = \psi + i\phi$ の間の2次元等角写像

$$\zeta = z^{1/2} = r^{1/2} e^{i\theta/2}, \quad \phi = r^{1/2} \sin \frac{\theta}{2} \quad (0 \leq \theta \leq 2\pi) \quad (1)$$

で求められる。 r, θ は xy -平面の極座標であり、 $\theta = 0, 2\pi$ が等電位の導体板を表す。導体表面での電場は表面に垂直（ y -方向）に

$$E = -\frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial \theta} \Big|_{\theta=0, 2\pi} = \mp \frac{1}{2\sqrt{x}} \quad (2)$$

また、エッジの外（左側： $r = -x$ ）には x -方向に特異な電場が生じている：

$$E = \frac{\partial \phi}{\partial r} \Big|_{\theta=\pi} = \frac{1}{2\sqrt{|x|}} \quad (3)$$

エッジに働く横向きの力 端からの距離を x として、エッジの近くで

$$\sigma(x) \sim \frac{\epsilon_0 \beta}{\sqrt{x}} \quad (\text{上の例では表裏あわせて, } \beta = -1) \quad (4)$$

の形の電荷分布が生じている場合を考えよう。端から Δx の範囲には電荷

$$q(\Delta x) = \int_0^{\Delta x} \sigma(x) dx = 2\epsilon_0 \beta \sqrt{\Delta x} \quad (5)$$

が存在している。 $\Delta x \rightarrow 0$ の極限では、この電荷に働く力はエッジ近傍（→p.4）の異常電荷からの寄与だけを考えればよい。これは、 $0 < x < \Delta x < x'$ にある間隔 $x' - x$ の平行な直線電荷の間の力を使えば

$$\begin{aligned} F(\Delta x) &= (\epsilon_0 \beta)^2 \int_{\Delta x}^{\infty} \frac{dx'}{\sqrt{x'}} \int_0^{\Delta x} \frac{dx}{\sqrt{x}} \frac{1}{2\pi \epsilon_0 (x' - x)} \quad \left(\frac{x}{\Delta x} \rightarrow \xi^2, \frac{x'}{\Delta x} \rightarrow \eta^2 \right) \\ &= \frac{2\epsilon_0 \beta^2}{\pi} \int_1^{\infty} d\eta \int_0^1 \frac{1}{\eta^2 - \xi^2} d\xi = \frac{\epsilon_0 \beta^2}{\pi} \int_1^{\infty} \frac{1}{\eta} \log \frac{\eta + 1}{\eta - 1} d\eta = \frac{\pi \epsilon_0 \beta^2}{4} \end{aligned} \quad (6)$$

となり、 Δx によらないから $\Delta x \rightarrow 0$ での極限值である。（この力が Δx によらないことは、導体板上の端以外の各部分の電荷に働く横向きの力は0、すなわち導体板が等電位であることに対応している。）

¹ 極板間の一様な電場に垂直なマクスウェル圧力は、側板に力を及ぼすことはない。極板間に挿入された誘電体板に働く横向きの吸引力は、誘電体表面でのマクスウェル応力 $ED/2$ の勾配（圧力差）によるもので、混同してはならない。

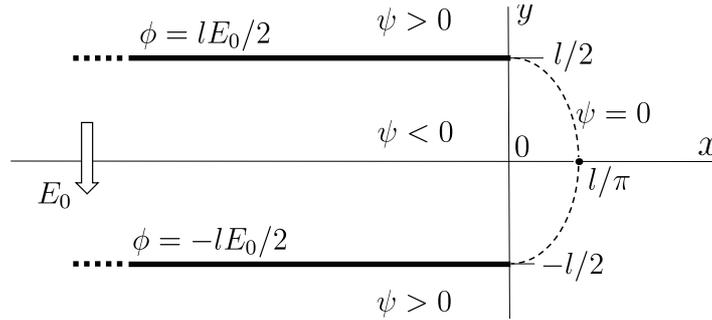
平行板コンデンサ 極板の幅 L が極板間の間隔 l に比べて十分に広いとし、平行に置かれた 2 枚の半無限導体板とみなす。この場合、等角写像

$$z = \frac{\zeta}{E_0} + \frac{l}{2\pi} \left(1 + e^{2\pi\zeta/lE_0}\right), \quad \frac{d\zeta}{dz} = \frac{E_0}{1 + e^{2\pi\zeta/lE_0}} \quad (7)$$

すなわち

$$x = \frac{\psi}{E_0} + \frac{l}{2\pi} \left(1 + e^{2\pi\psi/lE_0} \cos \frac{2\pi\phi}{lE_0}\right), \quad y = \frac{\phi}{E_0} + \frac{l}{2\pi} e^{2\pi\psi/lE_0} \sin \frac{2\pi\phi}{lE_0} \quad (8)$$

を用いれば、以下の図のような配置が得られる。極板間の $|x| \gg l$ ($\psi \sim -\infty$) では、 $\phi \simeq E_0 y$ となり、下向きの一様な電場 E_0 が実現されている。



$\psi = 0$ の電気力線 (破線) は外へはみ出し、サイクロイドになる。この電気力線の張力が、極板に平行な横向きを及ぼしている。

上の導体板近傍では $\phi = lE_0/2$ において、エッジ付近 ($\psi \sim 0$) で (4 ページの脚注参照)

$$\left. \frac{\partial \phi}{\partial y} \right|_{\phi=lE_0/2} = \operatorname{Re} \left. \frac{d\zeta}{dz} \right|_{\phi=lE_0/2} = \frac{E_0}{1 - e^{2\pi\psi/lE_0}} \simeq -\frac{lE_0^2}{2\pi\psi} \quad (9)$$

また

$$x = \frac{\psi}{E_0} + \frac{l}{2\pi} \left(1 - e^{2\pi\psi/lE_0}\right) \simeq -\frac{\pi\psi^2}{lE_0^2} \rightarrow \psi \simeq \pm \sqrt{\frac{lE_0^2}{\pi} |x|} \quad (10)$$

したがってエッジ付近では、表裏合わせて電荷分布は (4) の形となり、

$$\sigma(x) \simeq \epsilon_0 \sqrt{\frac{lE_0^2}{\pi |x|}}, \quad \beta = \sqrt{\frac{lE_0^2}{\pi}}, \quad \text{したがって} \quad F = \frac{\epsilon_0 E_0^2}{4} l \quad (11)$$

平行板コンデンサでは (奥行き) の単位長さあたりに働く横向き力は、上下 2 枚の導体板を合わせて $2F$ であり ($L \gg l$ とした場合) エネルギー的な考察から得られる結果と一致する。

コンデンサの端では、 $\nabla \times \mathbf{E} = 0$ により一様な電場ではあり得ないのであるが、上の結果からも、端から極板間の間隔 l 程度の範囲では実際に電場や電荷分布が一様でないことがわかる。電荷分布や電場が一様としたのでは、極板の幅 L は有限として $F \sim [1 + \log(L/\Delta x)]\Delta x \rightarrow 0$ であり、同符号電荷の間で斥力が働くにもかかわらず、極板には横向き力は働かない。実際には、以上で見てきたようにエッジに集積した電荷が、内側の電荷分布から有限な大きさの斥力 F を受ける。この電荷は導体から外へは出られない² から、導体の端に同じ大きさの力を及ぼして内側から押し広げようとする。(これは極板間に働く引力でも事情は同じである。) 解答としてこの内容の説明がしてあれば、十分であろう。

² 導体のすぐ外に強い電場ができているときは電子が飛び出すことがある (放電) が、2 次元的なエッジ (頂角 α) では、尖端の電荷に働く力は $\alpha \rightarrow 0$ の極限でも有限であるため、放電は起こらないようだ。そうでなければ平板コンデンサは危なくて使えない。頂角 α のエッジの表面に働く力の横成分は、 $\alpha \rightarrow 0$ の極限で (6) に一致する。

静電場のマクスウェル応力テンソル 任意の閉曲面 S 内の電荷に対するガウスの法則

$$Q_S = \int_{S内} \rho dV = \epsilon_0 \int_{S内} \nabla \cdot \mathbf{E} dV = \epsilon_0 \oint_S \mathbf{E} \cdot \mathbf{n} dS \quad (12)$$

と同様に, S 内の電荷に対して働くクーロン力のベクトル和に対して

$$\mathbf{F}_S = \int_{S内} \rho \mathbf{E} dV = \epsilon_0 \int_{S内} \mathbf{E} (\nabla \cdot \mathbf{E}) dV = \oint_S \mathbf{T} \cdot \mathbf{n} dS \quad (13)$$

が成り立つ。(n は外向きの法線ベクトル) ここで T は

$$T_{\alpha\beta} = \epsilon_0 E_\alpha E_\beta - \frac{\epsilon_0}{2} \mathbf{E}^2 \delta_{\alpha\beta} \quad (\alpha, \beta = x, y, z) \quad (14)$$

で定義される応力テンソルである。法線ベクトルとのドット積は, $\mathbf{T}_\alpha = (T_{\alpha x}, T_{\alpha y}, T_{\alpha z})$ として

$$(\mathbf{T} \cdot \mathbf{n})_\alpha = \mathbf{T}_\alpha \cdot \mathbf{n} = \sum_\beta T_{\alpha\beta} n_\beta = \epsilon_0 (\mathbf{E} \cdot \mathbf{n}) E_\alpha - \frac{\epsilon_0 \mathbf{E}^2}{2} n_\alpha \quad (\alpha = x, y, z) \quad (15)$$

を成分とするベクトルであり, 特別な場合として

$$\mathbf{n} \parallel \mathbf{E} \text{ のとき } \mathbf{T} \cdot \mathbf{n} = \frac{\epsilon_0 \mathbf{E}^2}{2} \mathbf{n} \text{ (張力)}, \quad \mathbf{n} \perp \mathbf{E} \text{ のとき } \mathbf{T} \cdot \mathbf{n} = -\frac{\epsilon_0 \mathbf{E}^2}{2} \mathbf{n} \text{ (圧力)} \quad (16)$$

となる。以後では 2 重添え字 (ここでは β) についての和の記号は省略する。

(証明) $\nabla \times \mathbf{E} = 0$, すなわち $\partial_\beta E_\alpha = \partial_\alpha E_\beta$, および $E_\beta E_\beta = \mathbf{E}^2$ を用いれば

$$\begin{aligned} [\mathbf{E}(\nabla \cdot \mathbf{E})]_\alpha &= E_\alpha \partial_\beta E_\beta = \partial_\beta E_\alpha E_\beta - E_\beta \partial_\beta E_\alpha = \partial_\beta E_\alpha E_\beta - E_\beta \partial_\alpha E_\beta \\ &= \partial_\beta E_\alpha E_\beta - \frac{1}{2} \partial_\alpha \mathbf{E}^2 = \partial_\beta \left(E_\alpha E_\beta - \frac{1}{2} \delta_{\alpha\beta} \mathbf{E}^2 \right) = \epsilon_0^{-1} \nabla \cdot \mathbf{T}_\alpha \end{aligned} \quad (17)$$

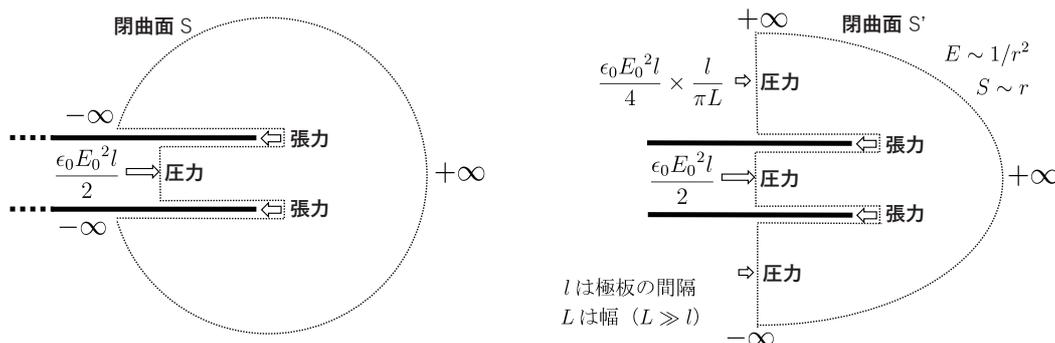
あとは, 各成分ベクトル \mathbf{T}_α に対してガウスの発散定理を用いればよい。

真空中の静電応力の釣り合い 閉曲面 S 内に電荷が存在しない ($\rho = 0$) ときには

$$\nabla \cdot \mathbf{T} = 0 \quad \text{または} \quad \oint_S \mathbf{T} \cdot \mathbf{n} dS = 0 \quad (18)$$

である。近接作用の考えでは, 静電場ができた真空の任意の体積の表面に働く応力の釣り合いを表す。「真空に働く力」に抵抗があるなら, ガウスの法則「 $\nabla \cdot \mathbf{E} = 0$ 」と並ぶ静電場の性質と思えばよい。

正負の電荷分布が向かい合う平行板コンデンサでは, コンデンサの外の十分遠方では急速に電場が 0 に向かうから, 図のような閉曲面 S を考えれば, 極板間の電場が一様な位置での圧力による横向きの力と釣り合うのは, 端から真横に出ている電気力線の張力による力しかない。その反作用が極板に働く横向きの力であり, その大きさ (11) が決まる。横向きの力の理由としてマクスウェル応力に言及するのなら, 正しい扱い方を示しておかないと, それを導く力量がまだ備わっていない高校生に誤った理解を刷り込んでしまう。電気力線の間に働く横向きの圧力は, 気体の圧力のように側板に力を及ぼすような性質のものではない。(そもそも問題設定が側板ではなく **細い支柱** であっても, 極板に働く力は同じである。)



応力の釣り合い条件から (11) は自明である。

幅が有限の場合は l/L 程度の差がある。

『 1 ページの計算は、先端にできている横向きの電場から受ける力を求めたことにはなっていない? 』

電場によって受ける力は、他の電荷から受ける遠隔力であるからあの計算でよいのだが、極限操作が気になるかもしれない。念のため図のような厚さをもつ導体板の側面に働く電場の力を求め、厚さ 0 の極限を考える。

この場合の等角写像は、以下のように与えられるはずである。

$$\frac{dz}{d\zeta} = 2A(\zeta^2 - a^2)^{1/2} \quad (\sim 2\sqrt{\pm 2aA}(\zeta \mp a)^{1/2}) \quad (19)$$

$$z = A \left(\zeta(\zeta^2 - a^2)^{1/2} - a^2 \cosh^{-1} \frac{\zeta}{a} \right) \quad \text{または} \quad iA \left(\zeta(a^2 - \zeta^2)^{1/2} - a^2 \cos^{-1} \frac{\zeta}{a} \right) \quad (20)$$



側面に働く電場の力 側面は $\phi = 0$, $-a \leq \psi \leq a$ で与えられる。したがって、 y 軸のすぐ左で³

$$E = -\left. \frac{\partial \phi}{\partial x} \right|_{\phi=0} = \frac{1}{2A(a^2 - \psi^2)^{1/2}} \quad (21)$$

また、この間の y 軸に沿って

$$\frac{d\psi}{dy} = \frac{1}{2A(a^2 - \psi^2)^{1/2}} \quad (22)$$

である。側面が受ける力は左向き（側面の外向き）に

$$F = \int_{-\pi A a^2}^0 \frac{\epsilon_0 E^2}{2} dy = \frac{\epsilon_0}{4A} \int_{-a}^a \frac{d\psi}{(a^2 - \psi^2)^{1/2}} = \frac{\pi \epsilon_0}{4A} \quad \left(= \frac{\pi \epsilon_0 \beta^2}{4} \right) \quad (23)$$

となり、 a によらないから、厚さが 0 ($a \rightarrow 0$) の極限でも同じ値になる。

(続く)

³ これらの量は、解析関数 $\zeta = f(z)$ の性質を用いれば一発である：

$$\frac{\partial \zeta}{\partial x} = \frac{d\zeta}{dz} \frac{\partial z}{\partial x} = f'(z), \quad \frac{\partial \zeta}{\partial y} = \frac{d\zeta}{dz} \frac{\partial z}{\partial y} = i f'(z) = i \frac{\partial \zeta}{\partial x} \rightarrow \frac{\partial}{\partial y}(\psi + i\phi) = \frac{\partial}{\partial x}(i\psi - \phi)$$

よって

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} = -\frac{\partial \psi}{\partial y} = \text{Im} \frac{d\zeta}{dz}, \quad \frac{\partial \phi}{\partial y} = \frac{\partial \psi}{\partial x} = \text{Re} \frac{d\zeta}{dz}, \quad \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} = -\frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} = -\frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2}$$

以上より

$$\text{調和性: } \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \phi = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \psi = 0, \quad \text{直交性: } \frac{\partial \phi}{\partial x} \frac{\partial \psi}{\partial x} + \frac{\partial \phi}{\partial y} \frac{\partial \psi}{\partial y} = 0$$

今の場合

$$\frac{d\zeta}{dz} = \frac{1}{2A(\zeta^2 - a^2)^{1/2}} = -\frac{i}{2A(a^2 - \zeta^2)^{1/2}}$$

一方, $\psi > a$ の x 軸上では $\phi = 0$ とし, $a \rightarrow 0$ の極限で

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} = \frac{\partial \phi}{\partial y} = \frac{1}{2A\sqrt{\psi^2 - a^2}} \rightarrow \frac{1}{2A\psi}, \quad x \simeq A\psi^2 \quad (24)$$

よって

$$E \simeq -\frac{1}{2A\psi} = -\frac{1}{2\sqrt{Ax}}, \quad \sigma(x) = 2\epsilon_0 E = -\frac{\epsilon_0}{\sqrt{Ax}} \quad (25)$$

1 ページの記号で書けば, $\beta = -1/\sqrt{A}$ であり, (6) と同じ結果 (23) が導かれたことになる。始めから厚さを 0 にしたら真横に出る電場は発散してしまい, 電場による横向きを計算できないが, 以上のような厚さ 0 の極限と考えれば問題ない。

p.1 の最後の積分の評価 (再質問があり追加: 12/4)

$$\int_1^\infty \frac{1}{\eta} \log \frac{\eta+1}{\eta-1} d\eta = \int_0^\infty y \operatorname{cosech} y dy = \frac{\pi^2}{4}$$

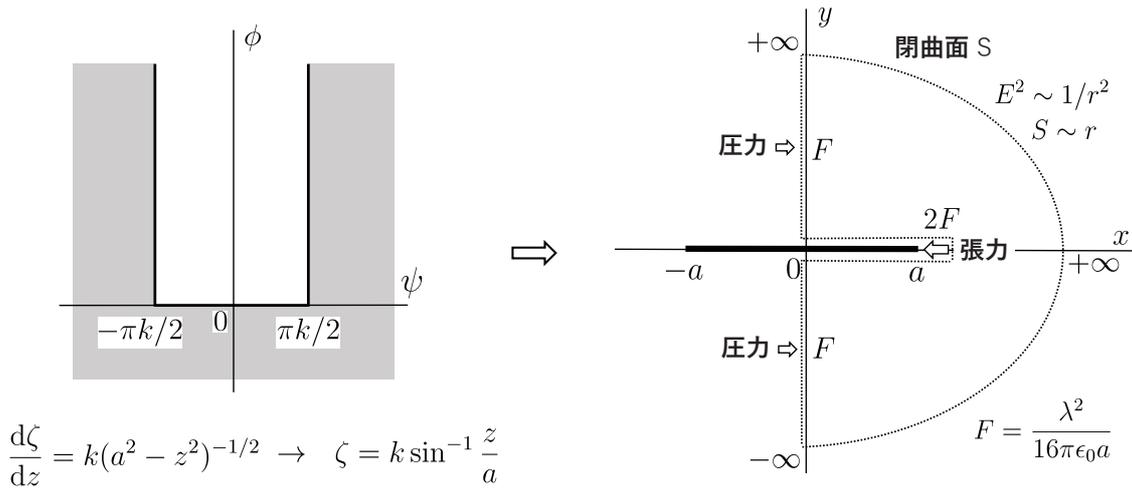
であるが, この精度 (誤差) を ϵ 以下にするには

$$\int_X^\infty \frac{1}{\eta} \log \frac{\eta+1}{\eta-1} d\eta \simeq \int_X^\infty \frac{2}{\eta^2} d\eta = \frac{2}{X} < \epsilon \rightarrow X > \frac{2}{\epsilon}$$

したがって, 最初の x' についての積分の上限を $x_c \simeq 4\Delta x/\epsilon^2$ とすればよい。すなわち, ϵ がいくら小さくても有限である限り, $\Delta x \rightarrow 0$ の極限では, 端のすぐ近傍だけの寄与で積分は殆ど尽くされている。

したがって, 極板の端 (の電荷) に働く力は, (4) の形の局所的な電荷分布だけで決まり, 同じ極板上の端から離れた位置の電荷や, 相対する極板上の異符号電荷には影響されない。ただし, (4) の係数 β は, 平行板コンデンサの計算から分かるように具体的な帯電導体系の大域的な配置によって決まる。

このことを正確に確かめることができる簡単な例: 幅 $2a$ の長い導体板



$$\frac{z}{a} = \sin \frac{\zeta}{k} = \sin \frac{\psi}{k} \cosh \frac{\phi}{k} + i \cos \frac{\psi}{k} \sinh \frac{\phi}{k} \quad (26)$$

$$\text{等電位面: } \frac{x^2}{a^2 \cosh^2(\phi/k)} + \frac{y^2}{a^2 \sinh^2(\phi/k)} = 1 \quad (x = \pm a \text{ を共焦点とする楕円群}) \quad (27)$$

$\phi = 0$ (導体板上):

$$z = a \sin \frac{\psi}{k} \rightarrow x = a \sin \frac{\psi}{k}, \quad y = 0 \quad (28)$$

x 軸上 ($y = +0$) で

$$\frac{\partial \phi}{\partial y} = \frac{\partial \psi}{\partial x} = \frac{k}{\sqrt{a^2 - x^2}} \rightarrow \sigma(x) = 2\epsilon_0 E = -\frac{2\epsilon_0 k}{\sqrt{a^2 - x^2}} \quad (29)$$

単位長さ当たりの電荷を λ として

$$\lambda = \int_{-a}^a \sigma(x) dx = -2\epsilon_0 k \int_{-1}^1 \frac{d\xi}{\sqrt{1 - \xi^2}} = -2\pi\epsilon_0 k \rightarrow k = -\frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \quad (30)$$

$\psi = 0$ (y 軸上):

$$z = ia \sinh \frac{\phi}{k} \rightarrow x = 0, \quad y = a \sinh \frac{\phi}{k} \quad (31)$$

y 軸上では電場は y 方向に

$$\frac{\partial \phi}{\partial y} = \frac{k}{\sqrt{a^2 + y^2}} \quad (32)$$

したがって y 軸 ($y > 0$) を含む平面で押し合う力は

$$F = \frac{\epsilon_0 k^2}{2} \int_0^\infty \frac{dy}{a^2 + y^2} = \frac{\lambda^2}{16\pi\epsilon_0 a} \quad (33)$$

一方, 端 ($x = a$) に働く張力は, 端の近傍での電荷分布の発散形

$$\sigma(x) \sim \frac{\lambda}{\sqrt{2a\pi}} \frac{1}{\sqrt{a-x}} \rightarrow \beta = \frac{\lambda}{\pi\epsilon_0\sqrt{2a}} \quad (34)$$

より

$$\frac{\pi\epsilon_0\beta^2}{4} = \frac{\lambda^2}{8\pi\epsilon_0 a} = 2F \quad (35)$$

となり, 上半面・下半面での圧力と釣り合う。

(7) の導出: Schwarz-Christoffel 変換を利用 (後藤・山崎『電磁気学演習』共立出版, 4章 [45], [48])

