

一般の曲線座標系

(参考) J.A.Stratton "ELECTROMAGNETIC THEORY", Chap.1, p.38-

$u^i = f_i(x, y, z)$, ($i = 1, 2, 3$) に対して, **共変基底**と共変計量テンソルを

$$d\mathbf{r} = \sum_i \mathbf{a}_i du^i, \quad \mathbf{a}_i = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u^i} = \left(\frac{\partial x}{\partial u^i}, \frac{\partial y}{\partial u^i}, \frac{\partial z}{\partial u^i} \right) \quad (1)$$

$$g_{ij} = \mathbf{a}_i \cdot \mathbf{a}_j = \sum_x \frac{\partial x}{\partial u^i} \frac{\partial x}{\partial u^j} \quad (= g_{ji}), \quad g = \det [g_{ij}] \quad (2)$$

と定義する。(ここでは行列を $[\dots]$ で表すことにする。) 計量テンソルの意味は

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 = \sum_{i,j} g_{ij} du^i du^j \quad (3)$$

であり, $[g_{ij}] = \text{diagonal}$ のとき**直交座標系**である。これに対して**反変基底**と反変計量テンソル

$$\mathbf{a}^i = \frac{1}{V} (\mathbf{a}_j \times \mathbf{a}_k), \quad V = \mathbf{a}_i \cdot (\mathbf{a}_j \times \mathbf{a}_k) \quad (i, j, k : \text{cyclic}), \quad g^{lm} = \mathbf{a}^l \cdot \mathbf{a}^m \quad (4)$$

を導入する。 $\mathbf{a}^i$ と $\mathbf{a}_i$ は**逆ベクトル**の関係^(m1), $[g_{ij}]$ と $[g^{lm}]$ はたがいに逆行列^(m2) である。すなわち

$$\mathbf{a}_i \cdot \mathbf{a}^j = \mathbf{a}^j \cdot \mathbf{a}_i = \delta_i^j, \quad \sum_k g^{jk} g_{ki} = \delta_i^j, \quad \mathbf{a}^l = \sum_i g^{li} \mathbf{a}_i, \quad \mathbf{a}_i = \sum_l g_{il} \mathbf{a}^l \quad (5)$$

$\mathbf{a}^i$ を並べた行列 $[\mathbf{a}^i]$ (の転置) は $(dx, dy, dz) = \sum_i \mathbf{a}_i du^i$ の変換行列 $[\mathbf{a}_i]$ の逆行列であり,

$$\mathbf{a}^i = \left(\frac{\partial u^i}{\partial x}, \frac{\partial u^i}{\partial y}, \frac{\partial u^i}{\partial z} \right) = \nabla u^i \quad (6)$$

ベクトル $\mathbf{B}$ の共変成分, 反変成分をそれぞれ

$$\mathbf{B} = \sum_i b_i \mathbf{a}^i = \sum_i b^i \mathbf{a}_i \quad (7)$$

で定義する。物理に出てくる普通のベクトルや $\{du^i\}$ は(基底と) 反変である。(5) を用いれば

$$b_i = \mathbf{B} \cdot \mathbf{a}_i, \quad b^i = \mathbf{B} \cdot \mathbf{a}^i = \sum_j g^{ij} b_j \quad (8)$$

規格化した単位ベクトル $\mathbf{e}_i = \mathbf{a}_i / \sqrt{\mathbf{a}_i \cdot \mathbf{a}_i} = \mathbf{a}_i / \sqrt{g_{ii}}$ を用いて (反変) 成分を表すこともある:

$$\mathbf{B} = \sum_i B^i \mathbf{e}_i, \quad B^i = \sqrt{g_{ii}} b^i \quad \text{直交座標系}^{(m12)} \text{ では記号 } h_i = \sqrt{g_{ii}}, \sqrt{g} = h_1 h_2 h_3 \text{ を用いる。} \quad (9)$$

(発散, 回転, 勾配の公式) ^(m6-m8)

$$\text{div } \mathbf{B} = \frac{1}{\sqrt{g}} \sum_i \frac{\partial}{\partial u^i} (\sqrt{g} b^i), \quad \text{div}(\phi \mathbf{B}) = \phi \text{div } \mathbf{B} + \sum_i b^i \frac{\partial \phi}{\partial u^i} = \phi \text{div } \mathbf{B} + \mathbf{B} \cdot \text{grad } \phi \quad (10)$$

$$(\text{rot } \mathbf{B})^1 = (\text{rot } \mathbf{B}) \cdot \mathbf{a}^1 = \frac{1}{\sqrt{g}} \left(\frac{\partial b_3}{\partial u^2} - \frac{\partial b_2}{\partial u^3} \right) \quad (\text{cyclic}), \quad b_i = \sum_j b^j g_{ji} \quad (11)$$

$$\text{grad } \phi = \sum_i \mathbf{a}^i \frac{\partial \phi}{\partial u^i} = \sum_i \sum_j \frac{\partial \phi}{\partial u^i} g^{ij} \mathbf{a}_j, \quad \text{grad}(\phi \psi) = \phi \text{grad } \psi + \psi \text{grad } \phi \quad (12)$$

$$\nabla^2 \phi = \text{div}(\text{grad } \phi) = \frac{1}{\sqrt{g}} \sum_i \sum_j \frac{\partial}{\partial u^i} \left(\sqrt{g} g^{ij} \frac{\partial \phi}{\partial u^j} \right) = \sum_{i,j} g^{ij} \left(\frac{\partial}{\partial u^i} \frac{\partial}{\partial u^j} - \sum_k \Gamma_{ij}^k \frac{\partial}{\partial u^k} \right) \phi \quad \ast \quad (13)$$

$$\nabla^2 \mathbf{A} = \text{grad}(\text{div } \mathbf{A}) - \text{rot}(\text{rot } \mathbf{A}) \rightarrow (\text{m13}) \quad \text{一般に } (\nabla^2 \mathbf{A})^i \neq \nabla^2 A^i \quad (14)$$

次ページ以下は説明のメモ (m1) - (m13)

※ 後半は (m9), (m10) を用いて示される。

(m1) 逆ベクトルの関係： 電磁気学に必要な 3 次元では、この定義の方が幾何学的意味（直交性など）が分かりやすく、後の応用でも便利であるが、一般次元では計量テンソル $[g_{ij}]$ の逆行列 $[g^{ij}]$ を用いて

$$\mathbf{a}^i = \sum_j g^{ij} \mathbf{a}_j \quad (15)$$

で定義され、直交性

$$\mathbf{a}^i \cdot \mathbf{a}_j = \sum_k g^{ik} \mathbf{a}_k \cdot \mathbf{a}_j = \sum_k g^{ik} g_{kj} = \delta_j^i \quad (16)$$

は明らかである。逆行列は余因子を用いて表すことができる。→ (m11)

(m2) 逆行列の関係： $d\mathbf{r} = \sum_i \mathbf{a}_i du^i$ を $\{\mathbf{a}^i\}$ で展開して係数を du_i とするとき

$$\sum_i \mathbf{a}_i du^i = \sum_i \mathbf{a}^i du_i \quad \text{より} \quad du^i = \sum_j g^{ij} du_j, \quad du_j = \sum_k g_{jk} du^k = \sum_n \sum_k g_{jk} g^{kn} du_n \quad (17)$$

(m3) 共変・反変基底の相互関係： ベクトル 3 重積の公式 $\mathbf{A} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = (\mathbf{A} \cdot \mathbf{C})\mathbf{B} - (\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})\mathbf{C}$ を用いる。

$$V[\mathbf{a}^2 \times \mathbf{a}^3] = \mathbf{a}^2 \times (\mathbf{a}_1 \times \mathbf{a}_2) = (\mathbf{a}^2 \cdot \mathbf{a}_2)\mathbf{a}_1 - (\mathbf{a}^2 \cdot \mathbf{a}_1)\mathbf{a}_2 = \mathbf{a}_1 \quad (18)$$

(m4) $V = \sqrt{g}$ である： （直観的ではなく、3 次元版ではここが一番の難関）

$\mathbf{a}_2 \times \mathbf{a}_3$ を $\{\mathbf{a}_i\}$ で展開して、出てきた $\mathbf{a}^i$ を再び $\mathbf{a}_j, \mathbf{a}_k$ で表す ($i, j, k : \text{cyclic}$) :

$$V = \mathbf{a}_1 \cdot (\mathbf{a}_2 \times \mathbf{a}_3) = \mathbf{a}_1 \cdot \left(\sum_i [(\mathbf{a}_2 \times \mathbf{a}_3) \cdot \mathbf{a}^i] \mathbf{a}_i \right) = \frac{1}{V} \sum_i [(\mathbf{a}_2 \times \mathbf{a}_3) \cdot (\mathbf{a}_j \times \mathbf{a}_k)] (\mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{a}_i) \quad (19)$$

[...] にベクトル 4 重積の公式 $(\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \cdot (\mathbf{C} \times \mathbf{D}) = (\mathbf{A} \cdot \mathbf{C})(\mathbf{B} \cdot \mathbf{D}) - (\mathbf{A} \cdot \mathbf{D})(\mathbf{B} \cdot \mathbf{C})$ を用いると

$$V^2 = \sum_i (g_{2j} g_{3k} - g_{2k} g_{3j}) g_{1i} = \sum_i g_{1i} \begin{vmatrix} g_{2j} & g_{2k} \\ g_{3j} & g_{3k} \end{vmatrix} = \det[g_{ij}] = g \quad (20)$$

(m5) 以下はスカラー場やベクトル場の微分を求める際に必要となる。

微小線要素： u^i 方向に du^i 変化したときの $\mathbf{r}$ の微小変化を次のように定義する：

$$d\mathbf{s}_i = \mathbf{a}_i du^i, \quad ds_i = |d\mathbf{s}_i| = \sqrt{g_{ii}} du^i$$

面積要素： u^1 曲面上で $d\mathbf{s}_2$ と $d\mathbf{s}_3$ で形成される 微小平行四辺形 の面積は

$$d\mathcal{A}^1 = |d\mathbf{s}_2 \times d\mathbf{s}_3| = |\mathbf{a}_2 \times \mathbf{a}_3| du^2 du^3 = V |\mathbf{a}^1| du^2 du^3 = \sqrt{g g^{11}} du^2 du^3 \quad (21)$$

方向まで含めれば

$$d\mathcal{A}^1 = d\mathbf{s}_2 \times d\mathbf{s}_3 = (\mathbf{a}_2 \times \mathbf{a}_3) du^2 du^3 = \sqrt{g} \mathbf{a}^1 du^2 du^3 \quad (V = \sqrt{g}) \quad (22)$$

体積要素： 同じく $d\mathbf{s}_1, d\mathbf{s}_2, d\mathbf{s}_3$ で形成される 微小平行六面体 の体積である。

$$d\mathcal{V} = d\mathbf{s}_1 \cdot (d\mathbf{s}_2 \times d\mathbf{s}_3) = \mathbf{a}_1 \cdot (\mathbf{a}_2 \times \mathbf{a}_3) du^1 du^2 du^3 = \sqrt{g} du^1 du^2 du^3 \quad (23)$$

(m6) 勾配： ∇ の 共変 成分

$$\mathbf{a}_i \cdot \nabla = \sum_x \frac{\partial x}{\partial u^i} \frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial u^i} \quad \text{より} \quad \nabla = \sum_i \mathbf{a}^i (\mathbf{a}_i \cdot \nabla) = \sum_i \mathbf{a}^i \frac{\partial}{\partial u^i} \quad \left(= \sum_i \left[\frac{\partial}{\partial u^i} \mathbf{a}^i - \frac{\partial \mathbf{a}^i}{\partial u^i} \right] \right) \quad (24)$$

(m7) 発散：この形のままでスカラーにならない¹。微小平行六面体に Gauss の定理を適用して定義する。S は微小平行六面体の表面である。

$$(\nabla \cdot \mathbf{B}) dV = \oint_S \mathbf{B} \cdot \mathbf{n} dA, \quad \mathbf{n} dA^i = d\mathcal{A}^i = \sqrt{g} \mathbf{a}^i du^j du^k \quad (i, j, k : \text{cyclic}) \quad (25)$$

$$\mathbf{B} = \sum_i (\mathbf{B} \cdot \mathbf{a}^i) \mathbf{a}_i = \sum_i b^i \mathbf{a}_i \quad (26)$$

より、 u^1 面上で

$$\mathbf{B} \cdot \mathbf{n} dA = \sqrt{g} b^1 du^2 du^3 \quad (27)$$

したがって相対する $u^1 + du^1$ 面と u^1 面での差は

$$du^1 \frac{\partial}{\partial u^1} b^1 \sqrt{g} du^2 du^3 = du^1 du^2 du^3 \frac{\partial}{\partial u^1} b^1 \sqrt{g} \quad (28)$$

以上より、 $dV = \sqrt{g} du^1 du^2 du^3$ を用いれば

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = \frac{1}{\sqrt{g}} \sum_i \frac{\partial}{\partial u^i} (\sqrt{g} b^i) \quad (29)$$

(m8) 回転：同様に、 ds_2, ds_3 で作られる微小平行四辺形に対して Stokes の定理を適用して

$$d\mathcal{A}^1 \cdot (\text{rot} \mathbf{B}) = \oint_C \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} \quad (30)$$

C は閉曲線である平行四辺形の周縁（反時計回り）を表す。

$$\mathbf{B} \cdot d\mathbf{s}_2 = \mathbf{B} \cdot \mathbf{a}_2 du^2 = b_2 du^2 \quad (31)$$

したがって、相対する u^3 の辺と $u^3 + du^3$ の辺とでの差は、 ds_2 の方向を考慮して

$$-du^2 du^3 \frac{\partial b_2}{\partial u^3} \quad (32)$$

であり、辺 ds_3 での寄与と合わせれば、面積要素の表現 $d\mathcal{A}^1 = \sqrt{g} \mathbf{a}^1 du^2 du^3$ を用いて

$$\mathbf{a}^1 \cdot (\text{rot} \mathbf{B}) = \frac{1}{\sqrt{g}} \left(\frac{\partial b_3}{\partial u^2} - \frac{\partial b_2}{\partial u^3} \right) \quad (33)$$

これが 反変 成分であるから、 $\{\mathbf{a}_i\}$ 、および単位ベクトル $\{\mathbf{e}_i\}$ での展開は $(i, j, k : \text{cyclic})$

$$\text{rot} \mathbf{B} = \sum_i \frac{1}{\sqrt{g}} \left(\frac{\partial b_k}{\partial u^j} - \frac{\partial b_j}{\partial u^k} \right) \mathbf{a}_i = \sum_i \sqrt{\frac{g_{ii}}{g}} \left(\frac{\partial b_k}{\partial u^j} - \frac{\partial b_j}{\partial u^k} \right) \mathbf{e}_i \quad (34)$$

$$b_l = \sum_m g_{lm} b^m = \sum_m \frac{g_{lm}}{\sqrt{g_{mm}}} B^m \quad (35)$$

¹ 最後の $(\dots)$ に Christoffel の記号 $\Gamma_{ij}^l = \mathbf{a}^l \cdot \frac{\partial \mathbf{a}_i}{\partial u^j} = -\frac{\partial \mathbf{a}^l}{\partial u^j} \cdot \mathbf{a}_i$ より $\frac{\partial \mathbf{a}^l}{\partial u^j} = -\sum_i \mathbf{a}^i \Gamma_{ij}^l$ と、等式 (m11) $\sum_l \Gamma_{il}^l = \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial \sqrt{g}}{\partial u^i}$ を用いて導かれる。等式は 3次元 の場合、 $\sqrt{g} = V = \mathbf{a}_1 \cdot (\mathbf{a}_2 \times \mathbf{a}_3)$ を使えば、簡単に確認 (m10) することができる。

(m9) 脚注 1 : Γ_{ij}^l は, ベクトル $\partial \mathbf{a}_i / \partial u^j$ を $\{\mathbf{a}_l\}$ で展開した係数で

$$\frac{\partial \mathbf{a}_i}{\partial u^j} = \frac{\partial^2 \mathbf{r}}{\partial u^i \partial u^j} = \sum_l \Gamma_{ij}^l \mathbf{a}_l \rightarrow \Gamma_{ij}^l = \mathbf{a}^l \cdot \frac{\partial \mathbf{a}_i}{\partial u^j} = -\frac{\partial \mathbf{a}^l}{\partial u^j} \cdot \mathbf{a}_i, \quad \frac{\partial \mathbf{a}^l}{\partial u^j} = -\sum_i \mathbf{a}^i \Gamma_{ij}^l \quad (36)$$

$$-\sum_i \frac{\partial \mathbf{a}^i}{\partial u^i} = \sum_{i,j} \Gamma_{ji}^i \mathbf{a}^j, \quad (i \rightarrow k, j \rightarrow i \text{ として}) \quad \nabla = \sum_i \left(\frac{\partial}{\partial u^i} + \sum_k \Gamma_{ik}^k \right) \mathbf{a}^i \quad (37)$$

(m10) Γ_{ik}^k について : 電磁気学や流体力学に必要な 3次元 の場合は逆算により簡単に確認できる。

$$\begin{aligned} \frac{\partial V}{\partial u^i} &= \frac{\partial}{\partial u^i} [\mathbf{a}_1 \cdot (\mathbf{a}_2 \times \mathbf{a}_3)] \\ &= \sum_k \left[\Gamma_{1i}^k \mathbf{a}_k \cdot (\mathbf{a}_2 \times \mathbf{a}_3) + \Gamma_{2i}^k \mathbf{a}_1 \cdot (\mathbf{a}_k \times \mathbf{a}_3) + \Gamma_{3i}^k \mathbf{a}_1 \cdot (\mathbf{a}_2 \times \mathbf{a}_k) \right] = (\Gamma_{1i}^1 + \Gamma_{2i}^2 + \Gamma_{3i}^3) V \end{aligned} \quad (38)$$

$$\sum_k \Gamma_{ik}^k = \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial \sqrt{g}}{\partial u^i} \quad (\text{注. 上の定義により } \Gamma_{ji}^k = \Gamma_{ij}^k), \quad \text{よって } \nabla = \sum_i \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial u^i} \sqrt{g} \mathbf{a}^i \quad (39)$$

さらに, 展開 $\mathbf{B} = \sum_j b_j \mathbf{a}^j$, および (m3) より $V [\mathbf{a}^1 \cdot (\mathbf{a}^2 \times \mathbf{a}^3)] = 1$, $V = \sqrt{g}$ を用いれば

$$\mathbf{a}^1 \cdot (\nabla \times \mathbf{B}) = \sum_{i,j} \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial u^i} \sqrt{g} b_j \mathbf{a}^1 \cdot (\mathbf{a}^i \times \mathbf{a}^j) = \frac{1}{\sqrt{g}} \left(\frac{\partial b_3}{\partial u^2} - \frac{\partial b_2}{\partial u^3} \right) \quad (1, 2, 3 : \text{cyclic のみ残る}) \quad (40)$$

(m11) Christoffel 記号 (一般の次元) : ここでは慣習どおり, 断らない限り **重複添字** は和をとるとする。

また, (i, j, k) は必ずしも cyclic を意味しない。

$$\frac{\partial g_{jl}}{\partial u^i} = \frac{\partial}{\partial u^i} (\mathbf{a}_j \cdot \mathbf{a}_l) = \frac{\partial \mathbf{a}_j}{\partial u^i} \cdot \mathbf{a}_l + \frac{\partial \mathbf{a}_l}{\partial u^i} \cdot \mathbf{a}_j = \Gamma_{ji}^k g_{kl} + \Gamma_{li}^k g_{kj} \quad (41)$$

から添え字を変えて

$$\frac{\partial g_{il}}{\partial u^j} = \Gamma_{ij}^k g_{kl} + \Gamma_{lj}^k g_{ki}, \quad \frac{\partial g_{ij}}{\partial u^l} = \Gamma_{il}^k g_{kj} + \Gamma_{jl}^k g_{ki} \quad (42)$$

を作り, 対称性 $\Gamma_{ij}^k = \Gamma_{ji}^k$ を用いて「元の式 + 第 2 式 - 第 3 式」を求めると,

$$\frac{\partial g_{jl}}{\partial u^i} + \frac{\partial g_{il}}{\partial u^j} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial u^l} = 2\Gamma_{ij}^k g_{kl} \quad (43)$$

以上より, 計量テンソルで **Christoffel 記号** が定義される :

$$\Gamma_{ij}^k = \frac{1}{2} g^{lk} \left(\frac{\partial g_{jl}}{\partial u^i} + \frac{\partial g_{il}}{\partial u^j} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial u^l} \right) \quad (44)$$

$j = k$ とし, k と l について和をとるとき l と k は付け替えてもよいので, 第 2 項と第 3 項はキャンセルし

$$\Gamma_{ik}^k = \frac{1}{2} g^{lk} \frac{\partial g_{kl}}{\partial u^i} \quad (45)$$

ここで行列 $[g_{kl}]$ の (kl) 成分の**余因子** (小行列式) を G^{lk} とすれば

$$\text{逆行列 : } g^{lk} = g^{-1} G^{lk}, \quad \text{行列式 : } g = \sum_l g_{kl} G^{lk} \quad (\text{この } k \text{ については和をとらない}) \quad (46)$$

g は行列成分 $\{g_{kl}\}$ (のみ) の関数であり, また G^{lk} は余因子の定義により成分 g_{kl} を含まないから

$$g^{lk} \frac{\partial g_{kl}}{\partial u^i} = \frac{G^{lk}}{g} \frac{\partial g_{kl}}{\partial u^i} = \frac{1}{g} \frac{\partial g}{\partial g_{kl}} \frac{\partial g_{kl}}{\partial u^i} = \frac{1}{g} \frac{\partial g}{\partial u^i} \quad \left(\text{注. 行列式の定義から } G^{lk} = \frac{\partial g}{\partial g_{kl}} \right) \quad (47)$$

したがって

$$\Gamma_{ik}^k = \frac{1}{2g} \frac{\partial g}{\partial u^i} = \frac{1}{2} \frac{\partial \log g}{\partial u^i} = \frac{\partial \log \sqrt{g}}{\partial u^i} = \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial \sqrt{g}}{\partial u^i}, \quad \nabla = \sum_i \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial u^i} \sqrt{g} \mathbf{a}^i \quad (48)$$

(m12) 直交座標系

$$\mathbf{e}_i = \frac{\mathbf{a}_i}{\sqrt{\mathbf{a}_i \cdot \mathbf{a}_i}} = \frac{\mathbf{a}_i}{h_i}, \quad \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j = \delta_{ij}, \quad h_i = \sqrt{g_{ii}} = \sqrt{\sum_{x,y,z} \left(\frac{\partial x}{\partial u^i} \right)^2}, \quad \sqrt{g} = h_1 h_2 h_3 \quad (49)$$

$$\Gamma_{ij}^k = \frac{1}{h_k} \left(\frac{\partial h_k}{\partial u^i} \delta_{jk} + \frac{\partial h_k}{\partial u_j} \delta_{ik} - \frac{h_i}{h_k} \frac{\partial h_i}{\partial u^k} \delta_{ij} \right), \quad \frac{\partial \mathbf{e}_j}{\partial u^i} = \frac{\mathbf{e}_i}{h_j} \frac{\partial h_i}{\partial u^j} - \delta_{ij} \sum_{k=1}^3 \frac{\mathbf{e}_k}{h_k} \frac{\partial h_i}{\partial u^k} \quad (50)$$

$\mathbf{e}^i = \mathbf{e}_i$ だから, $B^i = B_i = \mathbf{B} \cdot \mathbf{e}_i = b_i/h_i = h_i b^i$ を区別する必要はない。以下では (i, j, k) は **cyclic**

$$\nabla \phi = \sum_{i=1}^3 \frac{\mathbf{e}_i}{h_i} \frac{\partial \phi}{\partial u^i} \quad (51)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \sum_{i=1}^3 \frac{\partial}{\partial u^i} h_j h_k B_i \quad (52)$$

$$\nabla \times \mathbf{B} = \sum_{i=1}^3 \frac{\mathbf{e}_i}{h_j h_k} \left(\frac{\partial}{\partial u^j} h_k B_k - \frac{\partial}{\partial u^k} h_j B_j \right) \quad (53)$$

$$\nabla^2 \phi = \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \sum_{i=1}^3 \frac{\partial}{\partial u^i} \frac{h_j h_k}{h_i} \frac{\partial \phi}{\partial u^i}, \quad \nabla^2 \phi \psi = \phi \nabla^2 \psi + 2 \nabla \phi \cdot \nabla \psi + \psi \nabla^2 \phi \quad (54)$$

$$\nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) = \sum_{l=1}^3 \frac{\mathbf{e}_l}{h_l} \frac{\partial}{\partial u_l} \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \left(\sum_{i=1}^3 \frac{\partial}{\partial u^i} h_j h_k A_i \right) \quad (55)$$

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{A}) = \sum_{i=1}^3 \frac{\mathbf{e}_i}{h_j h_k} \left[\frac{\partial}{\partial u^j} \frac{h_k}{h_i h_j} \left(\frac{\partial h_j A_j}{\partial u^i} - \frac{\partial h_i A_i}{\partial u^j} \right) - \frac{\partial}{\partial u^k} \frac{h_j}{h_k h_i} \left(\frac{\partial h_i A_i}{\partial u^k} - \frac{\partial h_k A_k}{\partial u^i} \right) \right] \quad (56)$$

$$\nabla^2 \mathbf{A} = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) - \nabla \times (\nabla \times \mathbf{A}) \quad (57)$$

ここで²

$$\nabla \cdot \nabla = \sum_{i=1}^3 \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial u^i} \frac{\sqrt{g}}{h_i^2} \frac{\partial}{\partial u^i} \quad (58)$$

をベクトル $\mathbf{A} = \sum_{j=1}^3 A_j \mathbf{e}_j$ に形式的に作用させれば

$$\nabla \cdot \nabla \mathbf{A} = \sum_{i=1}^3 \mathbf{e}_i \nabla^2 A_i + 2 \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \left[\frac{1}{h_i^2} \frac{\partial \mathbf{e}_j}{\partial u_i} \right] \frac{\partial A_j}{\partial u^i} + \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \left[\frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial u^i} \left(\frac{\sqrt{g}}{h_i^2} \frac{\partial \mathbf{e}_j}{\partial u^i} \right) \right] A_j \quad (59)$$

と書くことができ、曲線座標系では第 2, 3 項が残る。しかしながらユークリッド空間では（一般の曲線座標系で）等式 (14) が成り立つことが示されている^(m13) ので, (57) の右辺から計算する方が楽である。

$\nabla^2 \mathbf{A}$ の一般形は複雑で, ほとんど意味のある形にまとめることはできない。以下を指針にして個々の曲線座標ごとに (57) の右辺を計算する方が賢明である。—— 右辺を計算した結果では, 第 l 成分 $(\nabla^2 \mathbf{A})_l$ において $\{A_i\}$ の 2 階微分 の項は対応するベクトル成分のスカラー・ラプラシアン $\nabla^2 A_l$ の形にまとめられ, それ以外には現れない。直角座標（デカルト座標）以外では, 一般にこの項以外に $\{A_i, \partial A_i / \partial u_j\}$ の形の線形項が残る。ただし第 l 成分には, $i = l$ の $\partial A_l / \partial u_j$ の形の 1 階微分の項は含まれない。

² (13) の後半 (※) に対応する表現を用いてもよいが, 次の表式が複雑になる。

以下は、2004 年頃に楕円体座標を扱ったときに探しても見つからず、(57) の右辺を計算して求めている結果であるが、もう少しコンパクトにまとまるはずだと思って放置していた。何かの役に立つかもしれないので記録しておく。計量テンソル（ここでは $\{h_i\}$ ）の 2 階微分には、元のユークリッド空間が曲がった空間ではないことを表す条件があるため、 $\{A_i\}$ の係数は別のまとめ方も可能である（はずだ）。

以下では $\partial_i = \frac{\partial}{\partial u^i}$ の簡略記号を用いる。

$$\begin{aligned}
(\nabla^2 \mathbf{A})_1 &= \nabla^2 A_1 && \text{2 と 3 については完全に対称} \\
&+ 2 \left[\frac{\partial_1 A_2}{h_1} \left(\frac{\partial_2 h_1}{h_2 h_1} \right) + \frac{\partial_1 A_3}{h_1} \left(\frac{\partial_3 h_1}{h_3 h_1} \right) - \frac{\partial_2 A_2}{h_2} \left(\frac{\partial_1 h_2}{h_1 h_2} \right) - \frac{\partial_3 A_3}{h_3} \left(\frac{\partial_1 h_3}{h_1 h_3} \right) \right] \\
&+ A_1 \left[\frac{1}{h_1} \partial_1 \left(\frac{\partial_1 h_2}{h_1 h_2} + \frac{\partial_1 h_3}{h_1 h_3} \right) + \frac{1}{h_2 h_3} \partial_2 \left(h_3 \frac{\partial_2 h_1}{h_2 h_1} \right) + \frac{1}{h_3 h_2} \partial_3 \left(h_2 \frac{\partial_3 h_1}{h_3 h_1} \right) \right] \\
&+ A_2 \left[\frac{1}{h_1} \partial_1 \left(\frac{\partial_2 h_1}{h_2 h_1} + \frac{\partial_2 h_3}{h_2 h_3} \right) - \frac{1}{h_2 h_3} \partial_2 \left(h_3 \frac{\partial_1 h_2}{h_1 h_2} \right) \right] \\
&+ A_3 \left[\frac{1}{h_1} \partial_1 \left(\frac{\partial_3 h_1}{h_3 h_1} + \frac{\partial_3 h_2}{h_3 h_2} \right) - \frac{1}{h_3 h_2} \partial_3 \left(h_2 \frac{\partial_1 h_3}{h_1 h_3} \right) \right] \tag{60}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(\nabla^2 \mathbf{A})_2 &= \nabla^2 A_2 && \text{3 と 1 については完全に対称} \\
&+ 2 \left[\frac{\partial_2 A_3}{h_2} \left(\frac{\partial_3 h_2}{h_3 h_2} \right) + \frac{\partial_2 A_1}{h_2} \left(\frac{\partial_1 h_2}{h_1 h_2} \right) - \frac{\partial_3 A_3}{h_3} \left(\frac{\partial_2 h_3}{h_2 h_3} \right) - \frac{\partial_1 A_1}{h_1} \left(\frac{\partial_2 h_1}{h_2 h_1} \right) \right] \\
&+ A_2 \left[\frac{1}{h_2} \partial_2 \left(\frac{\partial_2 h_3}{h_2 h_3} + \frac{\partial_2 h_1}{h_2 h_1} \right) + \frac{1}{h_3 h_1} \partial_3 \left(h_1 \frac{\partial_3 h_2}{h_3 h_2} \right) + \frac{1}{h_1 h_3} \partial_1 \left(h_3 \frac{\partial_1 h_2}{h_1 h_2} \right) \right] \\
&+ A_3 \left[\frac{1}{h_2} \partial_2 \left(\frac{\partial_3 h_2}{h_3 h_2} + \frac{\partial_3 h_1}{h_3 h_1} \right) - \frac{1}{h_3 h_1} \partial_3 \left(h_1 \frac{\partial_2 h_3}{h_2 h_3} \right) \right] \\
&+ A_1 \left[\frac{1}{h_2} \partial_2 \left(\frac{\partial_1 h_2}{h_1 h_2} + \frac{\partial_1 h_3}{h_1 h_3} \right) - \frac{1}{h_1 h_3} \partial_1 \left(h_3 \frac{\partial_2 h_1}{h_2 h_1} \right) \right] \tag{61}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(\nabla^2 \mathbf{A})_3 &= \nabla^2 A_3 && \text{1 と 2 については完全に対称} \\
&+ 2 \left[\frac{\partial_3 A_1}{h_3} \left(\frac{\partial_1 h_3}{h_1 h_3} \right) + \frac{\partial_3 A_2}{h_3} \left(\frac{\partial_2 h_3}{h_2 h_3} \right) - \frac{\partial_1 A_1}{h_1} \left(\frac{\partial_3 h_1}{h_3 h_1} \right) - \frac{\partial_2 A_2}{h_2} \left(\frac{\partial_3 h_2}{h_3 h_2} \right) \right] \\
&+ A_3 \left[\frac{1}{h_3} \partial_3 \left(\frac{\partial_3 h_1}{h_3 h_1} + \frac{\partial_3 h_2}{h_3 h_2} \right) + \frac{1}{h_1 h_2} \partial_1 \left(h_2 \frac{\partial_1 h_3}{h_1 h_3} \right) + \frac{1}{h_2 h_1} \partial_2 \left(h_1 \frac{\partial_2 h_3}{h_2 h_3} \right) \right] \\
&+ A_1 \left[\frac{1}{h_3} \partial_3 \left(\frac{\partial_1 h_3}{h_1 h_3} + \frac{\partial_1 h_2}{h_1 h_2} \right) - \frac{1}{h_1 h_2} \partial_1 \left(h_2 \frac{\partial_3 h_1}{h_3 h_1} \right) \right] \\
&+ A_2 \left[\frac{1}{h_3} \partial_3 \left(\frac{\partial_2 h_3}{h_2 h_3} + \frac{\partial_2 h_1}{h_2 h_1} \right) - \frac{1}{h_2 h_1} \partial_2 \left(h_1 \frac{\partial_3 h_2}{h_3 h_2} \right) \right] \tag{62}
\end{aligned}$$

円柱座標： $(r, \varphi, z) \rightarrow h_1 = 1, h_2 = r, h_3 = 1$, 残るのは $\partial_1 h_2 = 1$ のみ

球座標： $(r, \theta, \varphi) \rightarrow h_1 = 1, h_2 = r, h_3 = r \sin \theta$, 残るのは $\partial_1 h_2 = 1$, $\partial_1 h_3 = \sin \theta$, $\partial_2 h_3 = r \cos \theta$ のみ, $\partial_3 h_i$ はすべて 0

$$b_i = \mathbf{a}_i \cdot \mathbf{B}, \quad \partial_j \mathbf{a}_i = \Gamma_{ij}^k \mathbf{a}_k, \quad \partial_j \mathbf{a}^i = -\Gamma_{kj}^i \mathbf{a}^k, \quad \partial_k g^{ij} = -\Gamma_{lk}^i g^{lj} - \Gamma_{lk}^j g^{il} \quad (63)$$

$$\text{共変微分: (1) } b_{ij} = \partial_j b_i - \Gamma_{ij}^k b_k \quad (= \nabla_j b_i), \quad (2) \quad b_{kji} = \partial_i b_{kj} - \Gamma_{ik}^l b_{lj} - \Gamma_{ij}^l b_{kl} \quad (= \nabla_i \nabla_j b_k) \quad (64)$$

と書く³ことにすると、ベクトル解析に出てくるベクトルの 1 階微分, 2 階微分はすべてこれで表される:
(1 階微分)

$$\partial_j \mathbf{B} = \partial_j \mathbf{a}^i b_i = \mathbf{a}^i \partial_j b_i + (\partial_j \mathbf{a}^i) b_i = \mathbf{a}^i \partial_j b_i - \mathbf{a}^k \Gamma_{kj}^i b_i = \mathbf{a}^i b_{ij} \quad (65)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = \mathbf{a}^j \partial_j \cdot \mathbf{B} = \mathbf{a}^j \cdot \partial_i \mathbf{B} = \mathbf{a}^j \cdot \mathbf{a}^i b_{ij} = g^{ij} b_{ij} \quad (66)$$

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mathbf{a}^j \partial_j \times \mathbf{B} = \mathbf{a}^j \times \partial_j \mathbf{B} = (\mathbf{a}^j \times \mathbf{a}^i) b_{ij} \quad (67)$$

(2 階微分)

$$\nabla^2 = \mathbf{a}^i \partial_i \cdot \mathbf{a}^j \partial_j = g^{ij} \partial_i \partial_j + \mathbf{a}^i \cdot (\partial_i \mathbf{a}^j) \partial_j = g^{ij} (\partial_i \partial_j - \Gamma_{ij}^k \partial_k) \quad (= g^{ij} \nabla_i \nabla_j) \quad (68)$$

より

$$\nabla^2 \mathbf{B} = g^{ij} [\partial_i (\partial_j \mathbf{B}) - \Gamma_{ij}^k (\partial_k \mathbf{B})] = g^{ij} [\partial_i (\mathbf{a}^k b_{kj}) - \Gamma_{ij}^k (\mathbf{a}^l b_{lk})] = \mathbf{a}^k g^{ij} b_{kji} \quad (69)$$

$$\nabla (\nabla \cdot \mathbf{B}) = \mathbf{a}^k \partial_k (g^{ij} b_{ij}) = \mathbf{a}^k [g^{ij} \partial_k b_{ij} + (\partial_k g^{ij}) b_{ij}] = \mathbf{a}^k [g^{ij} \partial_k b_{ij} - (\Gamma_{lk}^i g^{lj} + \Gamma_{lk}^j g^{il}) b_{ij}] = \mathbf{a}^k g^{ij} b_{ijk} \quad (70)$$

$$\begin{aligned} \nabla \times (\nabla \times \mathbf{B}) &= \mathbf{a}^k \partial_k \times (\mathbf{a}^j \times \mathbf{a}^i) b_{ij} = \mathbf{a}^k \times [(\partial_k \mathbf{a}^j) \times \mathbf{a}^i + \mathbf{a}^j \times (\partial_k \mathbf{a}^i)] b_{ij} + \mathbf{a}_k \times (\mathbf{a}_j \times \mathbf{a}_i) \partial_k b_{ij} \\ &= \mathbf{a}_k \times (\mathbf{a}_j \times \mathbf{a}_i) b_{ijk} = (g^{ik} \mathbf{a}^j - g^{jk} \mathbf{a}^i) b_{ijk} = \mathbf{a}^k g^{ij} (b_{ikj} - b_{kji}) \end{aligned} \quad (71)$$

以上より

$$\nabla (\nabla \cdot \mathbf{B}) - \nabla \times (\nabla \times \mathbf{B}) = \mathbf{a}^k g^{ij} b_{ijk} - \mathbf{a}^k g^{ij} (b_{ikj} - b_{kji}) = \underline{\nabla^2 \mathbf{B}} + \mathbf{a}^k g^{ij} (b_{ijk} - b_{ikj}) \quad (72)$$

最後の式の (...) は (64) を用いて廻って計算すれば, j, k について非対称な項だけ残り

$$b_{ijk} - b_{ikj} = b_l (\partial_j \Gamma_{ik}^l - \partial_k \Gamma_{ij}^l + \Gamma_{ik}^m \Gamma_{jm}^l - \Gamma_{ij}^m \Gamma_{km}^l) \quad (\text{これを } [\nabla_k, \nabla_j] b_i = b_l R_{ijk}^l \text{ と書く。}) \quad (73)$$

となる⁴。今の場合, 元々 (x, y, z) から出発した ユークリッド空間 であり, (m9) の表式を用いれば

$$\Gamma_{ik}^l = \mathbf{a}^l \cdot \partial_k \mathbf{a}_i \rightarrow \partial_j \Gamma_{ik}^l = (\partial_j \mathbf{a}^l) \cdot (\partial_k \mathbf{a}_i) + \mathbf{a}^l \cdot \partial_j \partial_k \mathbf{a}_i = -\Gamma_{jm}^l \Gamma_{ik}^m + \mathbf{a}^l \cdot \partial_j \partial_k \mathbf{a}_i \quad (74)$$

$$\Gamma_{ij}^l = \mathbf{a}^l \cdot \partial_j \mathbf{a}_i \rightarrow \partial_k \Gamma_{ij}^l = (\partial_k \mathbf{a}^l) \cdot (\partial_j \mathbf{a}_i) + \mathbf{a}^l \cdot \partial_k \partial_j \mathbf{a}_i = -\Gamma_{km}^l \Gamma_{ij}^m + \mathbf{a}^l \cdot \partial_k \partial_j \mathbf{a}_i \quad (75)$$

により係数 $R_{ijk}^l = 0$, よって一般の曲線座標系でもベクトル・ラプラシアンの等式 (14) が成り立つ。

³ スカラに対しては $\nabla_i \phi = \partial_i \phi$, テンソルに対しては $\nabla_i T_{jk} = \partial_i T_{jk} - \Gamma_{ij}^l T_{lk} - \Gamma_{ik}^l T_{jl}$ である。また, 反変成分 b^i の共変微分は $\nabla_j b^i = \partial_j b^i + \Gamma_{jk}^i b^k$ であり, (最初の行の定義からしても) $\nabla_k g^{ij} = 0$, 同じく $\nabla_k g_{ij} = 0$ である。

⁴ 一般のリーマン空間で R_{ijk}^l は **Riemann-Christoffel の曲率テンソル**, 等式は **Ricci の公式**と呼ばれている。

(m14) ユークリッド的ではない空間での座標変換とベクトル・テンソル・スカラ

このノートは電磁気学に必要なベクトル解析の補足であるからユークリッド空間 (x, y, z) を出発点にしている。この前提を離れて、一般的な空間 $\{\mathbf{r}\}$ で考えてみる。この空間における2つの座標系 $\{x^\alpha\}$ と $\{u^i\}$ の、**局所的な基底**の間の変換は、 $d\mathbf{r} = \mathbf{a}_i du^i = \mathbf{i}_\alpha dx^\alpha$ より

$$\mathbf{a}_i = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u^i} = \frac{\partial x^\alpha}{\partial u^i} \mathbf{i}_\alpha \quad (76)$$

この基底と同じ変換を受けるのが**共変ベクトル**，逆行列で表される変換を受けるのが**反変ベクトル**

$$b_i = \frac{\partial x^\alpha}{\partial u^i} \tilde{b}_\alpha, \quad b^i = \frac{\partial u^i}{\partial x^\alpha} \tilde{b}^\alpha \quad (77)$$

である。(行きがかり上、元の座標での量に $\sim$ を付けて区別している。) 同じくテンソルは

$$T_{ij} = \frac{\partial x^\alpha}{\partial u^i} \frac{\partial x^\beta}{\partial u^j} \tilde{T}_{\alpha\beta}, \quad T^{ij} = \frac{\partial u^i}{\partial x^\alpha} \frac{\partial u^j}{\partial x^\beta} \tilde{T}^{\alpha\beta}, \quad T_i^j = \frac{\partial x^\alpha}{\partial u^i} \frac{\partial u^j}{\partial x^\beta} \tilde{T}_\alpha^\beta \quad (78)$$

と変換され、座標系によらない形で表される量がスカラである。距離の計量

$$ds^2 = (d\mathbf{r})^2 = \mathbf{a}_i \cdot \mathbf{a}_j du^i du^j = g_{ij} du^i du^j = \tilde{g}_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta \quad (79)$$

は、ベクトルの積である係数 $g_{ij} = \mathbf{a}_i \cdot \mathbf{a}_j$ がテンソルの変換を受けるため、明らかにスカラである。

注意しなければならないのは、偏微分の推移則

$$\partial_i = \frac{\partial}{\partial u^i} = \frac{\partial x^\alpha}{\partial u^i} \frac{\partial}{\partial x^\alpha} \quad (80)$$

から ∂_i は共変ベクトルに見えるが、直線的な座標系でない限りベクトルに作用するとき

$$\partial_j b_i = \frac{\partial}{\partial u^j} \left(\frac{\partial x^\alpha}{\partial u^i} \tilde{b}_\alpha \right) = \frac{\partial x^\alpha}{\partial u^i} \frac{\partial \tilde{b}_\alpha}{\partial u^j} + \frac{\partial^2 x^\alpha}{\partial u^i \partial u^j} \tilde{b}_\alpha = \frac{\partial x^\alpha}{\partial u^i} \frac{\partial x^\beta}{\partial u^j} \frac{\partial \tilde{b}_\alpha}{\partial x^\beta} + \frac{\partial^2 x^\alpha}{\partial u^i \partial u^j} \tilde{b}_\alpha \quad (81)$$

となり、第2項のため2つのベクトルの積のようなテンソル変換には従わない。同様に Christoffel 記号

$$\Gamma_{ij}^k = \frac{1}{2} g^{lk} \left(\frac{\partial g_{jl}}{\partial u^i} + \frac{\partial g_{il}}{\partial u^j} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial u^l} \right) \quad (82)$$

も、微分を含むため同じような事情があり、同じ方針で粛々と計算すれば

$$\Gamma_{ij}^k = \frac{\partial u^k}{\partial x^\gamma} \frac{\partial x^\alpha}{\partial u^i} \frac{\partial x^\beta}{\partial u^j} \tilde{\Gamma}_{\alpha\beta}^\gamma + \frac{\partial u^k}{\partial x^\alpha} \frac{\partial^2 x^\alpha}{\partial u^i \partial u^j} \quad (83)$$

となり、(似たような) 第2項があるためテンソルではない。ところがこの2つを組み合わせた**共変微分**は

$$\nabla_j b_i = \partial_j b_i - \Gamma_{ij}^k b_k = \frac{\partial x^\alpha}{\partial u^i} \frac{\partial x^\beta}{\partial u^j} \tilde{\nabla}_\beta \tilde{b}_\alpha \quad (84)$$

と、うまい具合に余分な項がキャンセルして共変テンソルの変換に従う。

ユークリッド空間 (あるいは局所的にユークリッド空間、またはミンコフスキー空間のような、直線的な座標で表される空間) における曲線座標系の場合、計量テンソルは定数で定義 (82) により Christoffel 記号 $\tilde{\Gamma}_{\alpha\beta}^\gamma$ のすべての成分が0である座標系 $\{x^\alpha\}$ が存在して (83) の第1項は0、したがって

$$\Gamma_{ij}^k = \frac{\partial u^k}{\partial x^\alpha} \frac{\partial^2 x^\alpha}{\partial u^i \partial u^j} = \frac{\partial u^k}{\partial \mathbf{r}} \cdot \frac{\partial^2 \mathbf{r}}{\partial u^i \partial u^j} = \mathbf{a}^k \cdot \frac{\partial \mathbf{a}_i}{\partial u^j} \quad \left(\text{または} \quad \frac{\partial \mathbf{a}_i}{\partial u^j} = \Gamma_{ij}^k \mathbf{a}_k \right) \quad (85)$$

となる。これで (m13) の最後の部分にたどり着いたわけで、ユークリッド空間では Riemann-Christoffel テンソルのすべての成分 R_{ijk}^l が0となる。逆のことも言えて、これがユークリッド空間の条件である。