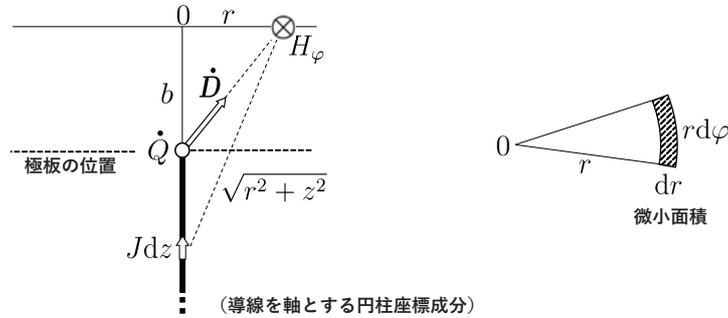


「電束電流は磁場を作らない？」 — 兵藤論文 (KEK 広報, 2022/9/27) に寄せて

平行板コンデンサに定常電流が流れ込んでいるとき、極板間にできるクーロン場の電束密度がマクスウェルの電束電流を生じる。このときこれを取り巻く静磁場ができていますが、極板間の電束電流がこの磁場を「作った」と考えるのは誤りである。磁場やベクトルポテンシャルは、真の源である伝導電流によって作られるものであって、磁場も電束電流もともに 同じ原因から生じる結果 にすぎない。



極板の中心に1本の導線をつなぐ場合、極板上に放射状の電流が流れるし端の効果もあって磁場の計算がやっかいである。絶縁した細い導線を極板と同じ太さになるまで束ねた複線導線を用意し、一樣な電流を流し込むとすれば簡単である。磁場も電束密度も重ね合わせで与えられるから、一本の細い半無限の導線について冒頭のことを確かめておけば十分である。ビオ-サバールの法則により

$$H_\varphi(r) = \frac{J}{4\pi} \int_{-\infty}^{-b} \frac{rdz}{(r^2 + z^2)^{3/2}} = \frac{J}{4\pi r} \left(1 - \frac{b}{\sqrt{r^2 + b^2}}\right) \quad (1)$$

$$d(rH_\varphi) = \frac{J}{4\pi} \frac{br}{(r^2 + b^2)^{3/2}} dr \quad (2)$$

したがって、極板に平行な面上の微小面積 (右図) を取り囲む閉曲線に沿って (上から見て左回りに)

$$\oint H_\varphi dl = \frac{J}{4\pi} \frac{brd\varphi dr}{(r^2 + b^2)^{3/2}} \quad (3)$$

である。一方、 \dot{Q} による斜線部を貫く電束電流は

$$\dot{D}_n rd\varphi dr = \frac{\dot{Q}}{4\pi(r^2 + b^2)} \frac{b}{\sqrt{r^2 + b^2}} rd\varphi dr \quad (\text{立体角}) \quad (4)$$

であり、 $\dot{Q} = J$ により両者は等しい。したがって、任意¹の閉曲線 Γ と、 Γ を周とする (導線を切らない) 曲面 S に対して、アンペール-マクスウェルの積分法則

$$\oint_{\Gamma} \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = \int_S \dot{\mathbf{D}} \cdot \mathbf{n} dS \quad (5)$$

が成り立つ。これは重ね合わせの原理により、細い導線を束ねた複線導線 (その切り口を極板とみなす) について成り立つから微分形は、

$$\nabla \times \mathbf{H} = \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \quad (6)$$

である。左辺は導線を通る 伝導電流によって作られた磁場 であり、右辺は同じく電流によって運び込まれている電荷によって生じたクーロン場の電束密度の時間変化である。等式は同じ原因から生じた2つの事象の間に、電荷の保存則による電荷と電流の関係を介して、同値関係が成り立つことを示しているだけであって、決して原因 (源) と結果 (場) という因果法則を表すものではない。つまりクーロン

¹ 任意の位置の任意の $\mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = H_\varphi(r) rd\varphi$ (円柱座標) を、極板に平行な平面上に点 Q から投影して考えればよい。

場の電束電流は、磁場の 源泉ではない ということである。源泉とみなすと原理的に *double-counting* になるわけだ。

交流 遅延効果を考慮しない準定常近似（通常は波長数 m 以上の電磁波）が成り立つ交流の場合は、先ほどの議論はそのまま成り立つが、先ず論理の流れだけ追ってみよう。

兵藤氏の言う「2種類の電場」、クーロン電場 E_C と誘導電場 E_I に近い表現は²

$$\mathbf{E} = -\nabla\phi - \frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t} \quad (= \mathbf{E}_C + \mathbf{E}_I \quad \text{兵藤}) \quad (7)$$

である。これと $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$ を合わせれば、電磁誘導のファラデーの法則の微分形

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t} \quad (\text{この } \mathbf{E} \text{ は } \mathbf{E}_I) \quad (8)$$

が導かれる。先ほどと同じ言い方をするなら、この等式も同じベクトルポテンシャルから導かれる2つの物理量の間の関係であって、「磁場が時間的に変化すると電場を誘導する」という因果法則ではない。時空の枠組みを変えると因果関係に転じるというのではなく、共通なベクトルポテンシャルの時空の異なる切り口の間の関係である。正しくは「磁場が時間的に変化している場所には、電場ができています」という、遅延のない同時刻相関にすぎない。例えばソレノイドに周波数 ω の交流を流すと Biot-Savart の磁場以外に振動する誘導電場が生じる。この変動する電場が誘導する磁場は元の磁場本体に比べて殆ど無視できる（回路の大きさ、例えばソレノイドの長さを l として $\omega l/c$ 程度）ため、「振動する磁場が電場を誘導した」と、さも非対等な因果関係にあるかのような説明をすることになる。

2つの等式(8)と(6)を組み合わせることにより、 $\rho = 0, \mathbf{i} = 0$ である真空中の電磁波の波動方程式が導かれ、「振動する電場と磁場が相互に誘導しあって連鎖的に電磁波を生じる」と説明される。電磁波の電場と磁場はエネルギーに換算して次元を揃えれば振幅が等しいため、今度は「互いに誘導し合っている」と言う対等な見方をするのであるが、もしこれを因果関係だと理解するなら、「鶏が先か、卵が先か？」的なジレンマに陥ってしまうだろう（学生時代に悩んだ経験。私だけであろうか？）。

電磁波 ^{ゲージ} マクスウェル方程式はローレンツ条件

$$\nabla \cdot \mathbf{A}(\mathbf{r}, t) + \frac{1}{c^2} \frac{\partial}{\partial t} \phi(\mathbf{r}, t) = 0 \quad (9)$$

を課すことにより、真の源 (ρ, \mathbf{i}) とこれにより生成される電磁ポテンシャル (ϕ, \mathbf{A}) の関係として

$$\left(\nabla^2 - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \begin{Bmatrix} c^{-1} \phi(\mathbf{r}, t) \\ \mathbf{A}(\mathbf{r}, t) \end{Bmatrix} = -\mu_0 \begin{Bmatrix} c \rho(\mathbf{r}, t) \\ \mathbf{i}(\mathbf{r}, t) \end{Bmatrix} \quad (10)$$

に書き換えられる。これが 発生源まで含めた電磁波の波動方程式 である。これで分かるように、クーロン場 E_C の電束電流密度はローレンツ条件に吸収されていて形式上は源として現れず、スカラーポテンシャル $\phi(\mathbf{r}, t)$ を介して 導かれる量 となっている。一方、誘導電場 E_I の電束電流密度は左辺に

$$-\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \mathbf{A} = \mu_0 \dot{\mathbf{D}}_I \quad (\mathbf{D}_I = \epsilon_0 \mathbf{E}_I, \quad c^{-2} = \epsilon_0 \mu_0) \quad (11)$$

として取り込まれており、4次元時空のポアソン方程式の解であるベクトルポテンシャルから 導かれる物理量 という位置づけが、明白になっている。 $(\rho, \mathbf{i}) \rightarrow (\phi, \mathbf{A}) \approx (\mathbf{E}, \mathbf{B})$ が物理量の因果関係の論理的流れ（ \approx は「ほぼ同等」のつもり）であるとする限り（交流の場合でも） $\dot{\mathbf{D}} \rightarrow \mathbf{A}$ という流れはあり得ないし、 \mathbf{E} と \mathbf{B} の時空的関係の諸法則は全て、因果関係を表すものではなくなる のである。

² 必ずしも $\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$ ではないから、ヘルムホルツ分解ではない。 $\nabla \times \mathbf{E}_C = 0$ であるが、ローレンツ条件では $\nabla \cdot \mathbf{E}_I = c^{-2} \partial^2 \phi / \partial t^2$ 、定常電流でないときは $\nabla \cdot \mathbf{E}_I \neq 0$ 、両方あわせて $\nabla \cdot (\mathbf{E}_C + \mathbf{E}_I) = \rho / \epsilon_0$ が成り立っている。兵藤論文の「2種類の電場」は「ヘルムホルツ分解： $\nabla \times \mathbf{E}_C = 0, \nabla \cdot \mathbf{E}_I = 0$ 」となっており、ベクトルポテンシャルのこの部分まで含めて E_C とされているように見える。最初は $\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$ のクーロン条件かと思ったが、そうではないようだ。

原因と結果 因果関係と理解されている法則は、物理学の理解が進めば位置づけは変わる可能性もある。上の議論はベクトルポテンシャルが実在 (原因となり得る資格) であるという前提で成り立っている。もともと Maxwell はそう考えたのであるが、存在を直接確かめる術がなかったため、歴史的には単なる補助線的な数学的道具と見なされるようになったようだ。場の量として磁場よりも基本的な実在であることが認知されるようになったのは、1960 年頃のアハロノフ-ボーム効果³の提唱と外村氏の量子力学的実証実験 (1982) によってである。(外村氏は、2重スリットに電子を1個ずつ飛ばすことで干渉縞が次第に形成されていく様子を初めて撮影し、個々の電子が自分自身と干渉することを目に見えるようにした人である。)

力学 電磁気学は関連する要素が多すぎて、私もまだその全容を理解しているとは言い難い。力学ではどうであろうか。力学で因果関係と思われるのはニュートンの第2法則

$$ma = F \quad (12)$$

である。普通、これを「力が働けば加速度を生じる」と読む(理解する)。つまり、「力が原因で加速度運動が結果」である。しかしながら初めからそうだったわけではない。「力」というものがまだ正確に理解できていない段階、仮に「時計」と「物差し」しかない段階では、これは測定可能な加速度から力を定義する式である。次いで第3法則により「同じ力」が定義されて、同じ力のもとで「加速されにくさ」を表す係数「慣性質量」が定義される。こういう段階を経て初めて「力」が実在として認識され、代表的な力である万有引力もそうして発見された。以後は「じゃあ、これこれの力が働いたらどれだけの加速度を生じるか」、つまり原因である力が与えられて加速度運動が結果(未知数)の「運動方程式」を解くという標準的な設定となるわけだ。

いうまでもなく、この第2法則には「慣性系においては」という断りがつく。それでは非慣性系ではどうであろうか。回転系で考えてみよう。回転系では慣性力として遠心力以外に、回転系に対して運動する物体にはコリオリ力が働く。

一定の角速度 ω で回転している大きな円盤(地面)があり、その中心から r だけ離れた位置に、静止した天井(天空)から質量 m の物体が吊り下げられ静止しているとする。円盤系から見れば、この物体は半径 r 、角速度 $-\omega$ の円運動をする。物体に働く $m\omega^2 r$ の外向きの遠心力と、この場合は中心に向かう $2m\omega v = 2mr\omega^2$ のコリオリ力、差し引きで $m\omega^2 r$ の慣性力(だけ)がこの円運動の向心力である。あるいは太陽をはじめとする天体が地球の周りを行う日周運動も、全く同じだ。これをわざわざ慣性力が原因で円運動していると考えた人は、変人かよほどの達人である。普通は慣性力はとりあえず反作用が見つからない「見かけの力」であるとみなし、加速度運動の結果であると理解してきた。

一方、ゴムひもに結びつけられた重りが円運動するとき、「遠心力でゴムひもが伸びて張力が働いている」と言う方が、その逆を言うよりよほど自然である。低気圧に向かって吹き込む風の偏向を説明するとき、「風が進む間に地面が回転しい...」と板書を始めるとたいていは失敗する。そこでコリオリ力 $2m\mathbf{v} \times \boldsymbol{\omega}$ のベクトルの向きを示して、「ほら、北半球では必ず右へ反れるだろ」となる。つまりコリオリ力を風の偏向の原因として説明する方が分かりやすいし、そうすることに何の後ろめたさも感じない。

このように力と加速度運動の間の「因果関係」は微妙である。実際、一般相対性原理では加速度運動は重力場と等価とみなすことになる。慣性系を特別視することはないし、異なる非慣性系の間にも相対性原理が適用されどどちらが非慣性系であってもかまわず、慣性力にもちゃんと反作用があると理解される。要するに真の原因と結果の因果律は不変であっても、多くの場合、原因と結果という見方は自然法則や時空に対する理解、認識の進展によって変わるものであり絶対的な関係ではないということだ。そこまで構えなくても、ゴムひもや低気圧の例のように、「その説明の方が納得しやすい」というだけの都合でもごく自然にひっくり返る、きわめてあやふやな関係である。

³ AB 効果 十分に長いソレノイドの外側では磁場は0であるが、ソレノイドを取り巻く divergence-free かつ rotation-free のベクトルポテンシャル ($A_\phi \sim 1/r$) が存在する。もし実在であれば、そこを通過する荷電粒子の正準運動量 $p = mv + qA$ 、したがって波動関数の位相に影響を及ぼすことが予想される。(→「雑書庫」[205]『陽子はBよりAが好き!』) 実験では、磁場が決して外に漏れないように超電導体で覆ったリング状の磁石が用いられた。