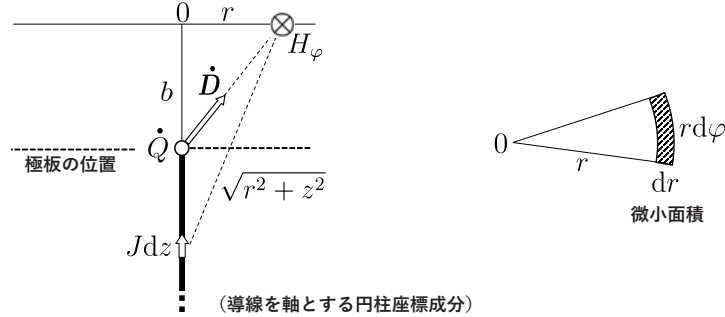


符号が紛らわしいという声が寄せられたので，設定を少し変更しました。

「電束電流は磁場を作らない？」 — 兵藤論文 (KEK 広報, 2022/9/27) に寄せて

平行板コンデンサに定常電流が流れ込んでいるとき，極板間にできるクーロン場の電束密度がマクスウェルの電束電流を生じる。このときこれを取り巻く静磁場ができていますが，極板間の電束電流がこの磁場を作ったと考えるのは 誤り である。そもそも磁場やベクトルポテンシャルは，真の源である伝導電流によって作られるものであって，磁場も電束電流もともに 同じ原因から生じる結果 にすぎない。



極板の中心に 1 本の導線をつなぐ場合，極板上に放射状の電流が流れるし端の効果もあって磁場の計算がやっかいである。絶縁した細い導線を極板と同じ太さになるまで束ねた複線導線を用意し，一様な電流を流し込むとすれば簡単である。磁場も電束密度も重ね合わせで与えられるから，下の極板と一本の細い導線について冒頭のことを確かめておけば十分である。ビオ-サバールの法則により

$$H_{\varphi}(r) = \frac{J}{4\pi} \int_{-\infty}^{-b} \frac{rdz}{(r^2 + z^2)^{3/2}} = \frac{J}{4\pi r} \left(1 - \frac{b}{\sqrt{r^2 + b^2}} \right) \quad (1)$$

$$d(rH_{\varphi}) = \frac{J}{4\pi} \frac{br}{(r^2 + b^2)^{3/2}} dr \quad (2)$$

したがって，極板に平行な面上の微小面積（右図）を取り囲む閉曲線に沿って（上から見て左回りに）

$$\oint H_{\varphi} dl = \frac{J}{4\pi} \frac{brd\varphi dr}{(r^2 + b^2)^{3/2}} \quad (3)$$

である。一方， \dot{Q} による斜線部を貫く電束電流は

$$\dot{D}_n rd\varphi dr = \frac{\dot{Q}}{4\pi(r^2 + b^2)} \frac{b}{\sqrt{r^2 + b^2}} rd\varphi dr \quad (\text{立体角}) \quad (4)$$

であり， $\dot{Q} = J$ により両者は等しい。したがって，任意¹の閉曲線 Γ と， Γ を周とする（導線を切らない）曲面 S に対して，アンペール-マクスウェルの積分法則

$$\oint_{\Gamma} \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = \int_S \dot{\mathbf{D}} \cdot \mathbf{n} dS \quad (5)$$

が成り立つ。これは重ね合わせの原理により，細い導線を束ねた，上下の極板につないだ複線導線について成り立つから微分形は，

$$\nabla \times \mathbf{H} = \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \quad (6)$$

である。いずれも左辺は導線を通る 伝導電流によって作られた磁場 であり，右辺は同じく電流によって運び込まれている電荷によって生じたクーロン場の電束密度の時間変化である。等式は同じ原因から生じた 2 つの事象の間に，電荷の保存則による電荷と電流の関係を介して，同値関係が成り立つことを示しているだけであって，決して原因（源）と結果（場）という因果法則を表すものではない。つまりクーロン場の電束電流を，磁場の 源泉とみなすことはできない ということである。源泉とみなすと原理的に *double-counting* になるわけだ。

¹ 任意の位置の任意の $\mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = H_{\varphi}(r) rd\varphi$ (円柱座標) を，極板に平行な平面上に点 Q から投影して考えればよい。

交流 定常ではない交流の場合はどうであろうか？遅延効果を考慮しない準定常近似（波長数 m 以上の電磁波）の場合は，先ほどの議論はそのまま成り立つが，先ず，論理の流れだけ追ってみよう。

兵藤氏の言う「2種類の電場」，クーロン電場 E_C と誘導電場 E_I に近い旧来の分解は²

$$\mathbf{E} = -\nabla\phi - \frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t} \quad (= E_C + E_I) \quad (7)$$

である。これと $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$ を合わせれば，電磁誘導のファラデーの法則の微分形

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t} \quad (\text{この } \mathbf{E} \text{ は } E_I) \quad (8)$$

が導かれる。先ほどと同じ言い方をするなら，この等式も同じベクトルポテンシャルから導かれる2つの物理量の間関係であって，「磁場が時間的に変化すると電場を誘導する」という因果法則ではない。時空の枠組みを変えると因果関係に転じるというのではなく，同じベクトルポテンシャルの時空の「異なる切り口」の間関係である。正しくは「磁場が時間的に変化している場所には，必ず電場ができています」という，遅延のない同時刻相関を言っているだけである。2つの等式(8)と(6)を組み合わせることにより， $\rho = 0, i = 0$ である真空中の電磁波の方程式が導かれるのであるが，もし因果関係だと理解するなら，「鶏が先か，卵が先か？」的なジレンマに陥ってしまうであろう（これは学生時代の個人的経験）。

マクスウェル方程式はローレンツ条件^{ゲージ}

$$\nabla \cdot \mathbf{A}(\mathbf{r}, t) + \frac{1}{c^2} \frac{\partial}{\partial t} \phi(\mathbf{r}, t) = 0 \quad (9)$$

を課すことにより，真の源 (ρ, i) と生成される電磁ポテンシャル (ϕ, \mathbf{A}) の関係として

$$\left(\nabla^2 - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \begin{cases} \phi(\mathbf{r}, t) \\ \mathbf{A}(\mathbf{r}, t) \end{cases} = -\mu_0 \begin{cases} c\rho(\mathbf{r}, t) \\ \mathbf{i}(\mathbf{r}, t) \end{cases} \quad (10)$$

に書き換えられる。これで分かるように，クーロン場 E_C の電束電流密度はローレンツ条件に吸収されていて形式上は源として現れず，スカラポテンシャル $\phi(\mathbf{r}, t)$ を介して 導かれる量 となっている。

一方，誘導電場 E_I の電束電流密度は左辺に

$$-\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \mathbf{A} = \mu_0 \dot{\mathbf{D}}_I \quad (\mathbf{D}_I = \epsilon_0 \mathbf{E}_I, \quad c^{-2} = \epsilon_0 \mu_0) \quad (11)$$

として取り込まれており，4次元時空のポアソン方程式の解であるベクトルポテンシャルから 導かれる 物理量という位置づけが，明白になっている。 $(\rho, i) \rightarrow (\phi, \mathbf{A}) \approx (\mathbf{E}, \mathbf{B})$ が物理量の因果関係の論理的流れ（ \approx は「ほぼ同等」のつもり）であるとする限り（交流の場合でも） $\dot{\mathbf{D}} \rightarrow \mathbf{A}$ という流れはあり得ないし， \mathbf{E} と \mathbf{B} の時空的関係の諸法則は全て，因果関係を表すものではなくなるのである。

原因と結果の因果関係を表す法則は，物理学の理解が進めばその位置づけが変わる可能性も十分あり得る。上の議論はベクトルポテンシャルが実在であるという前提で成り立っているが，歴史的には（特に静磁場においては）単なる補助線的な数学的道具と見なされてきた時期もあったようだ。場の量として磁場よりも基本的な実在であることが認知されるようになったのは，それほど昔のことではない。1960年頃のアハロフ-ボーム効果³の提唱と外村氏の量子力学的実証実験（～1980）によってである。

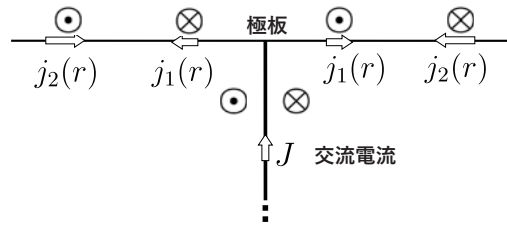
先行ポテンシャル「^{ソース}源」と「場（ポテンシャル）」という関係についてはこれでいいのであるが，因果関係という意味では，話はそう単純にはいかない。波動方程式の解の解釈としては，「未来のある時刻の電流分布がこれこれになるためには，現在のベクトルポテンシャルはどうなっているべきか？」いわばポテンシャルが「先」と見なされるような状況もあり得るのである。

² 旧稿で「ヘルムホルツ分解」と書いたが，必ずしも $\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$ ではないので誤り。 $\nabla \times \mathbf{E}_C = 0$ であるが，ローレンツ条件では $\nabla \cdot \mathbf{E}_I = -c^{-2} \partial^2 \phi / \partial t^2$ ，定常電流でないときは $\nabla \cdot \mathbf{E}_I \neq 0$ ，両方あわせて $\nabla \cdot (\mathbf{E}_C + \mathbf{E}_I) = \rho / \epsilon_0$ が成り立っている。兵藤論文の「2種類の電場」では「 $\nabla \times \mathbf{E}_C = 0, \nabla \cdot \mathbf{E}_I = 0$ 」となっており，ベクトルポテンシャルのこの部分まで含めて E_C とされているようで，まさにヘルムホルツ分解である。最初は $\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$ のクーロン条件かと思ったが，そうではないようだ。

³ 十分に長いソレノイドの外側の空間では磁場は0であるが，ソレノイドを取り巻く divergence-free かつ rotation-free のベクトルポテンシャル ($A_\phi \sim 1/r$) が存在する。もし実在であれば，そこを通過する荷電粒子の正準運動量 $\mathbf{p} = m\mathbf{v} + q\mathbf{A}$ ，ひいてはその波動関数の位相に影響を及ぼすことが予想される。→ 同じ「雑書庫」[205] 『陽子は B より A が好き！』

この後は、遅延効果の必要性を示すための自分なりのメモで、今回の話題とは関係ありません。

準定常近似 先ほどの複線導線で細線の絶縁がしっかりしておれば、各線を交流電流が流れ、極板間の空間にできている磁場はやはり各導線を通っている電流が源であることに違いはない。アンペール・マクスウェルの法則の位置づけも何ら変わりはない。もう少し現実味のある設計で考えよう。



極板は半径 a の円盤で、極板間隔 $2b$ は十分狭い ($b \ll a$) として、普通通り、極板の中心に細い導線が接続されている場合を考えよう (図は下の極板だけ)。導線を通れる交流を回路理論にならって $Je^{i\omega t}$ とし、以後は指数部を省略して振幅のみで記述し、必要なときは時間微分を $i\omega$ で置き換えることにする。極板上に生じる表面電流密度を、 $j(a) = 0$ であるとして対称性から判断して放射状に

$$j(r) = \frac{J}{2\pi a^2} \left(\frac{a^2}{r} - r \right), \quad 2\pi r j(r) = J - \frac{r^2}{a^2} J \quad (12)$$

とすればよい。第1項を $j_1(r)$ 、第2項を $j_2(r)$ としよう。 $j_2(r)$ は $r = 0$ で0のため導線の電流とつながらないが、極板上に一樣な振動する電荷密度 $\dot{\sigma} = J/\pi a^2$ をもたらす。これに対して $j_1(r)$ が $r = 0$ で導線に連続につながる電流である。こちらは原点以外で divergence-free で極板上に電荷密度をもたらさないが、原点に振動する点電荷 $\dot{Q}' = -J$ が存在する解である。p.1の細い導線についての議論と照らし合わせれば、原点にある点電荷がキャンセルするだけでなく、極板間の空間ではこの表面電流密度が作る磁場が導線上を通れる電流の作る磁場を、ちょうど打ち消していることを示すことができる⁴。

$j_2(r)$ から、上下の極板の分をあわせて、いかにもコンデンサ的な

$$\dot{D}(r) = \frac{J}{\pi a^2}, \quad D(r) = \frac{J}{i\omega\pi a^2} \quad (13)$$

の一樣な電束電流密度と電束密度が生じる。磁場は、上から見て反時計回りに

$$H_\varphi(r) = -j_2(r) = \frac{Jr}{2\pi a^2} \quad (14)$$

であり、極板上の同じ表面電流密度から生じた電束電流密度とはアンペール・マクスウェルの法則

$$(\nabla \times \mathbf{H})_z = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r H_\varphi = \frac{J}{\pi a^2} = \dot{D}(r) \quad (15)$$

の関係をもつ間柄になっている。繰り返すが、p.1と同じく 因果の関係ではない。

これが電磁波発生の仕組みかということ、決してそうではない。そもそも上の式で分かるように磁場と電場の位相が $\pi/2$ ずれているし、振幅の比も周辺表面 $r = a$ で

$$\frac{E_C}{H} = \frac{2}{ika} \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} \quad (k = \omega/c) \quad (16)$$

となり、真空のインピーダンスに比べて非常に大きい。ここで、放出されるはずの電磁波の波数 $k = \omega/c$ を用いているが、交流理論で扱われる周波数は、せいぜいマイクロ波程度、波長にして数十 cm 以上である。それでは振動する磁場による誘導電場はどうかということ、境界条件がよくわからず正確には求めていないが、電流と同じ方向の成分 E_r だけとして、とりあえず電磁誘導の法則の右辺には上で求めた (第0近似的な) 磁場を用いれば、

$$E_r(r, z) = -\frac{i\omega\mu_0 J}{2\pi a^2} zr \quad (17)$$

⁴ 極板面積と同じ太さの円柱導線であれば、電波を出すくらいの周波数の交流なら表皮効果の深さが 0.1mm 以下であり、導線表面を通れる交流の作る磁場はコンデンサの中に殆ど及ばない。この場合は $j_2(r)$ だけで考えればよいことになる。

が得られ⁵，やはり磁場との位相差は $\pi/2$ である。クーロン電場との大きさの比は，やはり周辺部で

$$\frac{E_I}{E_C} \sim \frac{k^2 ab}{2} \quad (\text{同位相}) \quad (18)$$

と評価されるが，今度は逆に小さすぎる。そもそも電磁波の発生の仕組みとして「コンデンサに交流を流すと極板間の電場が時間的に振動することにより振動する磁場が発生し，…」という発想そのものが怪しいのである。

実はこのことは，導線を通る交流による磁場についても同じことである。電流をとりまくアンペールの法則で求めた磁場と，これによる誘導電場は，やはり位相が $\pi/2$ 異なる。電磁波発生の仕組みとして「アンテナを通る交流を取り巻く振動磁場ができ，電磁誘導により振動する電場を生じ，…」という説明も，全く同様の理由で怪しいのである。

遅延効果 上で行ってきた計算は準定常近似とよばれるものである。準定常とは「発生する電磁波の周期に比べれば，時間的な変化が間をあげず一瞬にしてに回路（今はコンデンサ）内を伝わる」，すなわち

$$a/c \ll \omega^{-1} \quad \text{あるいは} \quad ka \ll 1 \quad (\omega = ck) \quad (19)$$

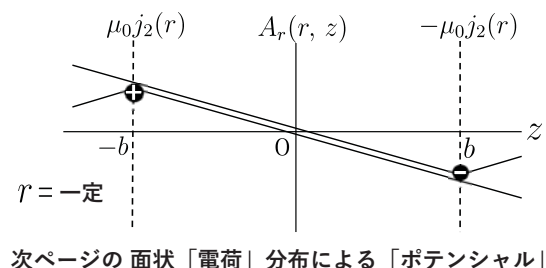
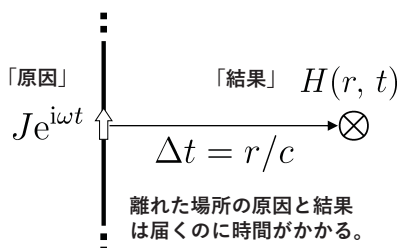
つまり，発生する電磁波の波長 $2\pi/k$ が a に比べて十分長いことを意味する（このことは既に先ほどから振幅の比を評価するのに使っている）。FM 波程度以上の周波数（波長が数 m 以上）の，いわゆる電波と呼ばれる範囲ならこれでよいのであるが，交流理論でよく知られているように 準定常近似では電磁波は発生しない（無視する）。理由は簡単である。場やポテンシャルの時間的な変化は取り入れているが，それが一瞬にして回路（パーツ）の全域に届くため，全域で「時間的に同位相」であり，変化が時間をかけて空間を伝搬するという，波の概念がはなから無視されているからである。

原因（源）と結果（場）の因果関係は，時間をかけて生じる。ビオ-サバールの法則がいい例である。現在考えている位置にできる磁場は，離れた位置の電流要素（源）の効果の重ね合わせであるが，位置だけでなくいろんな過去の電流の効果の重ね合わせである。ビオ-サバールの法則では離れた位置の効果は $\sim r^{-2}$ であるから，主として源を比較的近くの電流だけと考えるとしても，観測点に届くには図のように r/c 程度の時間がかかる。つまり 過去の時刻 $t - r/c$ の位相が届いている と考えなければならない。したがって，時刻 t ，位置 r における場の主たる部分の位相は

$$e^{i\omega(t-r/c)} = e^{i(\omega t - kr)} \quad (20)$$

となる。こうして初めて，空間的な位相が生じる。電磁誘導の法則は「電場の空間微分」と， $-$ 「磁場の時間微分」の関係であり，両辺に $-ik$ と $-i\omega$ が係数として現れるため，電場と磁場は同位相となる。

このように，電磁波発生の仕組みの本質は原因と結果の間の遅延効果である。アンテナを通る交流電流やコンデンサの中を通る電束電流（だけ）で説明するのは，重篤な誤りである。誤りは「振動するクーロン場の電束電流が振動する磁場を 作り …」という因果関係の位置づけの問題にはとどまらない。



⁵ これだけでは $\nabla \cdot E_I = 0$ を満たしていないように見える。これはローレンツ条件で要請されるスカラーポテンシャルによるクーロン電場で打ち消されるため，問題ではない。

定常電流では静電場の場合と同じくクーロン条件 $\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$ が適用されるが、電流が時間的に振動する交流の場合は、ローレンツ条件 (9) を適用する。この場合、伝導電流密度を i として

$$\nabla \times \mathbf{B} = \nabla \times (\nabla \times \mathbf{A}) = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) - \nabla^2 \mathbf{A} = \mu_0 (i + \dot{\mathbf{D}}) \quad (21)$$

において、右辺の $\dot{\mathbf{D}}$ のうちクーロン場によるものは消去 (分離) される。さらに誘導電場による分は、ベクトルポテンシャルの時間についての 2 階微分であり、「 $\omega \ll c/a$ 」を要請する準定常近似では無視される。したがって、準定常近似でベクトルポテンシャルが満たすべき方程式は以下で与えられる：

$$\nabla^2 \mathbf{A} = -\mu_0 i \quad (22)$$

極板上に表面電流 (12) が放射状に流れている今の問題では、円柱座標系で

$$(\nabla^2 \mathbf{A})_r = \nabla^2 A_r - \frac{A_r}{r^2} = 0, \quad A_z = A_\varphi = 0 \quad (23)$$

となる。源である r 方向の表面電流密度との関係は、極板直上での境界条件⁶として導入される：

$$-\left[\frac{\partial A_r}{\partial z}\right]_{z=-b} = \mu_0 j_2(r) = -\frac{\mu_0 J r}{2\pi a^2} \quad (24)$$

以上により、脚注のようにして、先ず A_r が求められる：

$$A_r(r, z) = \frac{\mu_0 J}{2\pi a^2} z r, \quad (\nabla^2 \mathbf{A})_r = 0 \quad (25)$$

次に、ローレンツ条件よりスカラーポテンシャルは

$$\frac{i\omega}{c^2} \phi = -\nabla \cdot \mathbf{A} = -\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r A_r) = -\frac{\mu_0 J}{\pi a^2} z, \quad \nabla^2 \phi = 0 \quad (26)$$

したがって、クーロン電場は

$$\dot{D}_z = -i\omega\epsilon_0 \frac{\partial \phi}{\partial z} = \frac{J}{\pi a^2} \quad (= \dot{\sigma}) \quad (27)$$

と決まる。さらに、 $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$ から計算される磁場は

$$\mu_0 H_\varphi = (\nabla \times \mathbf{A})_\varphi = \frac{\partial A_r}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial r} = \frac{\mu_0 J}{2\pi a^2} r = \frac{\mu_0 r}{2} \dot{D}_z \quad (28)$$

となって (14) に一致し、当然、アンペール-マクスウェルの法則、 $(\nabla \times \mathbf{H})_z = \dot{D}_z$ は成り立っている。

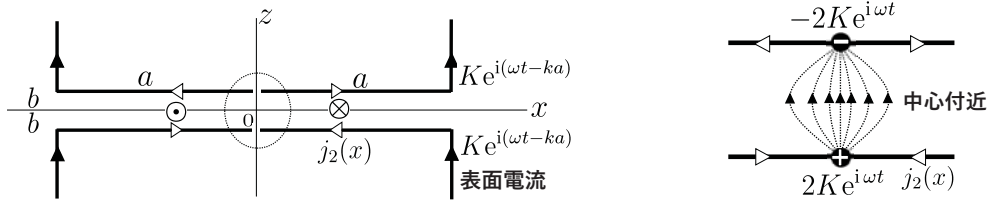
しかしこれで完結とはいかない。先ず、 E_z と H_φ は (16) のように位相は $\pi/2$ ずれているし、振幅の比は電磁波の場合の比 ($= \sqrt{\mu_0/\epsilon_0}$: 真空のインピーダンス) とは似ても似つかない大きさである。さらに、前のページの脚注で期待したこと ($\nabla \cdot \mathbf{E} = 0$) は、ここでは解決していない。誘導電場の r 成分、

$$\epsilon_0 E_r = -\frac{i\omega\epsilon_0\mu_0 J}{2\pi a^2} z r = \frac{k^2 z r}{2} D_z \quad (\ll D_z) \quad (29)$$

が残ってしまい、 $(\nabla \times \mathbf{H})_r = 0$ と consistent になっていない。準定常近似の条件からすれば、最初に無視した 2 次の量であり、近似が折衷的な理論体系である以上、近似に抵触しない範囲の綻びがあるのは致し方ないが、やはり遅延効果を考えないと問題は解決しない (\rightarrow 次ページに続く)。

⁶ 電流密度の成分と対応するベクトルポテンシャルの成分の関係は、電荷密度と電位の関係と同じ形の積分で表されるため、静電場の知識が役立つことが多い。特に今の場合は、 $A_r(r, z) = r f(z)$ とおけば $(\nabla^2 \mathbf{A})_r = r f''(z) = 0$ であり、境界条件が r に依存しない一様な表面「電荷」密度、 $\pm \mu_0 J / 2\pi a^2$ であるポテンシャル問題に等価になる。(前のページの図参照) なお、表面電流のうち $j_1(r)$ は既に導線を通して流れてきた電流の作る磁場を打ち消しているため、ここでは除外してある。

(部分的に遅延効果を取り入れた解) 横方向だけは準定常近似の前提条件「 $a/c \ll \omega^{-1}$ 」が期待できない場合の解を求めてみよう。極板の面積と同じ太さの柱状導体で考えれば、表皮効果(→p.3 脚注)により導体表面だけを流れる表面電流は、 $a \gg b$ としておけばコンデンサ内部には殆ど影響を及ぼさないから、 z 方向に $\pm\infty$ に及ぶビオ・サバルの法則の遅延効果を気にせず、極板の端での境界条件としてだけ考慮すればよい。簡単のため⁷図の断面をもつ奥行(y 方向)無限大の2次元問題として考える。



ここでは $ka \gtrsim 1$ として、波動方程式(10)を満たすベクトルポテンシャルの解を、 $x > 0$ で

$$A_x(x, z) = \mu_0 K z e^{-ikx}, \quad A_y = A_z = 0 \quad (30)$$

と選ぶ($e^{i\omega t}$ は省略)。対応する境界条件の表面電流密度⁸は、下の極板上で以下のようにになっている:

$$j_2(x) = -K e^{-ikx}, \quad \dot{\sigma}(x) = -\frac{\partial j_2(x)}{\partial x} = ikj_2(x), \quad \sigma(x) = \frac{ik}{i\omega} j_2(x) = \frac{j_2(x)}{c} \quad (31)$$

ただし、導体は $x=0$ で切れており、 $x < 0$ では $j_2(x) = K e^{ikx}$ とする。この電流の不連続性(円板の中心での特異性に対応)により中心に $\dot{Q} = \pm 2K$ の振動電荷が溜まり双極子場($\sim 2Kb/\pi x^2$)ができる。 $|x| \lesssim b$ の中心付近を除けば後で求まる一様な電場($\dot{D}_z \sim Kk$)と比べて強さは無視できるが、双方を合わせた電束電流が導線を通る電流とつながっている。

そうすれば後は自明に近く、磁場とアンペール-マクスウェル法則は、中心付近を除いて

$$H_y = \mu_0^{-1}(\nabla \times \mathbf{A})_y = \mu_0^{-1} \frac{\partial A_x}{\partial z} = K e^{-ikx} = -j_2(x) \quad (32)$$

$$\dot{D}_z = (\nabla \times \mathbf{H})_z = \frac{\partial H_y}{\partial x} = -\frac{\partial j_2(x)}{\partial x} = \dot{\sigma}(x), \quad D_z = \sigma(x) \quad (33)$$

である。一方、ローレンツ条件を満たすスカラーポテンシャルは

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial \phi}{\partial t} = \frac{i\omega}{c^2} \phi = -\frac{\partial A_x}{\partial x} = i\mu_0 k K z e^{-ikx} \quad (34)$$

$$\phi(x, z) = \mu_0 c K z e^{-ikx} = -\mu_0 c z j_2(x), \quad D_z = -\epsilon_0 \frac{\partial \phi}{\partial z} = \epsilon_0 \mu_0 c j_2(x) = \sigma(x) \quad (35)$$

となり、波動方程式を満たすと同時に、得られるクーロン場は上と一致している。クーロン電場は

$$E_z = \epsilon_0^{-1} D_z = \mu_0 c j_2(x) = -\mu_0 c H_y = -\sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} H_y \quad (36)$$

で電磁波の位相および振幅の関係を満たし、当然ながらポインティングベクトルも期待通りである:

$$(\mathbf{E} \times \mathbf{H})_x = -E_z H_y = c\mu_0 H_y^2 = c\epsilon_0 E_z^2 > 0 \quad (37)$$

さらに誘導電場は、クーロン電場の x 成分でキャンセル

$$E_{1x} = -i\omega A_x = -ik\mu_0 c K z e^{-ikx} \quad (= \partial\phi/\partial x) \quad (38)$$

されて $(\nabla \times \mathbf{H})_x = -\partial H_y/\partial z = 0$ と整合するとともに、 $\mu_0 \dot{H}_y = -(\nabla \times \mathbf{E})_y = -\partial E_{1x}/\partial z$ を満たす。

このように、コンデンサで(まがりなりに)電磁波らしき振動電場の解を得るためには、たとえ幅 $2a$ が波長の $1/\pi$ とかの緩やかな変化であっても、コンデンサ内での位相変化が不可欠である。

⁷ 円柱座標の波動方程式の解は A_r は $\nu=1$ 、 ϕ は $\nu=0$ のベッセル関数($J_\nu, N_\nu, H_\nu^{(1)}, H_\nu^{(2)}$)になり、どれでも以下と全く同じ計算ができる。2次元球面波(進行波)は $H_\nu^{(2)}(kr)e^{i\omega t}$ になるが、 $kr \ll 1$ での特異性の扱いが簡単ではない。

⁸ 導波管で知られているように、表皮効果の深さ $\sqrt{2\rho/\omega\mu}$ を0とみなす完全導体(抵抗率 $\rho=0$)では、表面電流の波は外部の極板間の空間(ここでは真空または真空中)における光速 c の同じ波動方程式に従う。