

## 静磁場（定常電流）のマクスウェル応力テンソル

任意の閉曲面  $S$  内の電流密度  $j$  に対して働く磁場の力のベクトル和に対して

$$F_S = \int_{S内} j \times B dV = \int_{S内} \left( \nabla \times \frac{B}{\mu} \right) \times B dV = \oint_S \mathbf{T} \cdot \mathbf{n} dS \quad (1)$$

が成り立つ。（ $n$  は外向きの法線ベクトル）ここで  $\mathbf{T}$  は

$$T_{\alpha\beta} = \frac{1}{\mu} \left( B_\alpha B_\beta - \frac{B^2}{2} \delta_{\alpha\beta} \right) \quad (\alpha, \beta = x, y, z) \quad (2)$$

で定義される応力テンソルである。法線ベクトルとのドット積は、 $T_\alpha = (T_{\alpha x}, T_{\alpha y}, T_{\alpha z})$  として

$$(\mathbf{T} \cdot \mathbf{n})_\alpha = T_\alpha \cdot \mathbf{n} = \sum_\beta T_{\alpha\beta} n_\beta = \frac{1}{\mu} \left( (\mathbf{B} \cdot \mathbf{n}) B_\alpha - \frac{B^2}{2} n_\alpha \right) \quad (\alpha = x, y, z) \quad (3)$$

を成分とするベクトル

$$\mathbf{T} \cdot \mathbf{n} = \frac{1}{\mu} \left( (\mathbf{B} \cdot \mathbf{n}) \mathbf{B} - \frac{B^2}{2} \mathbf{n} \right) \quad (4)$$

であり、特別な場合として

$$n \parallel B \text{ のとき } \mathbf{T} \cdot \mathbf{n} = \frac{B^2}{2\mu} \mathbf{n} \text{ (張力)}, \quad n \perp B \text{ のとき } \mathbf{T} \cdot \mathbf{n} = -\frac{B^2}{2\mu} \mathbf{n} \text{ (圧力)} \quad (5)$$

となる。以後では2重添え字（ここでは  $\beta$ ）についての和の記号は省略する。

(証明)  $((\nabla \times \mathbf{B}) \times \mathbf{B})_x = (\partial_z B_x - \partial_x B_z) B_z - (\partial_x B_y - \partial_y B_x) B_y = (\mathbf{B} \cdot \nabla) B_x - \frac{1}{2} \partial_x B^2$  (6)

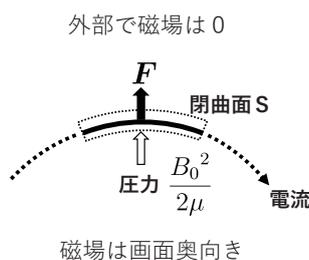
ここで  $\nabla \cdot \mathbf{B} = \partial_\beta B_\beta = 0$  より、 $(\mathbf{B} \cdot \nabla) B_\alpha = B_\beta \partial_\beta B_\alpha = \partial_\beta B_\alpha B_\beta$  の関係を用いれば

$$((\nabla \times \mathbf{B}) \times \mathbf{B})_\alpha = \partial_\beta \left( B_\beta B_\alpha - \frac{B^2}{2} \delta_{\alpha\beta} \right) = \mu \nabla \cdot \mathbf{T}_\alpha \quad (7)$$

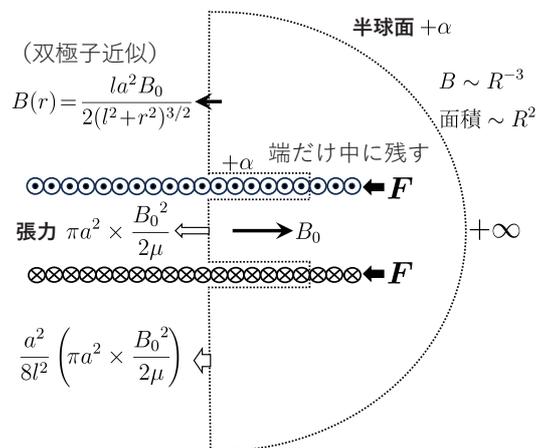
あとは、各成分ベクトル  $T_\alpha$  に対してガウスの発散定理を用いればよい。

ソレノイドは細長くコイルは隙間なく一様に巻かれており、磁束密度は内側では軸に平行で一様に  $B_0$ 、すぐ外側では0であるとする。左図のようにソレノイドのすぐ内側では Maxwell 応力は面に垂直であり、電流に対して半径を広げる向きに働く磁場の力を表している。中心軸の方向には、右図のようにソレノイドの端だけ残して半球面 (+ $\alpha$ ) で囲み積分定理を適用すれば、十分遠方では双極子場  $\sim r^{-3}$  で面積分の寄与は無視でき、ソレノイドの端で軸に平行方向に押し込む力が働いていることが分かる。(実際には、ソレノイドの端から半径程度の範囲では、磁束密度は中央部での値  $B_0$  より小さくなり、その分だけ磁力線は外へはみ出る。このはみ出る磁力線の横成分が、端付近の電流に軸方向の力を及ぼすと考えられる。)

**Maxwell 応力：** 中心軸に平行な磁場の向きに張力，垂直な向きに圧力



中心軸に垂直な断面（部分）



中心軸を含む断面（軸方向の力の成分）

ソレノイドの端の電流に働く力<sup>1</sup>がソレノイドの断面積に比例することから、平行板コンデンサの横  
向きの力の場合と同様、今の場合にも 端の面 に Maxwell 応力が働くような錯覚に陥りがちであるが、磁  
場の力が働くのはあくまで 電流に対して である。2025 年度の京大入試問題 II の (3) との関連で言うな  
ら、この磁場の Maxwell 応力と内外の空気の圧力差が直接釣り合うわけではない。

ソレノイドの中心軸上の磁束密度 半径  $a$  の円電流  $I$  の中心軸上で中心から  $x$  だけ離れた点におけ  
る磁束密度は、Biot-Savart の法則

$$d\mathbf{B} = \frac{\mu}{4\pi} \frac{I ds}{r^2} \times \frac{\mathbf{r}}{r} \quad (8)$$

から軸方向の成分を取り出して

$$B(x) = \frac{\mu}{4\pi} \oint_0^{2\pi a} \frac{I ds a}{r^2} \frac{1}{r} = \frac{\mu a^2 I}{2(a^2 + x^2)^{3/2}} \quad (r = \sqrt{a^2 + x^2}) \quad (9)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} B(x) dx = \mu I \quad (10)$$

である。半径  $a$ 、長さ  $2l$  のソレノイドに巻き数密度  $n$  で導線が巻かれているとき、電流  $I$  を流すと、中  
心軸上で中心から  $x$  の位置にできる磁束密度は

$$\begin{aligned} B(x) &= \frac{\mu a^2}{2} \int_{-l}^l \frac{nI dx'}{[a^2 + (x' - x)^2]^{3/2}} \\ &= \frac{\mu n I}{2} \left[ \frac{l - x}{\sqrt{(l - x)^2 + a^2}} + \frac{l + x}{\sqrt{(l + x)^2 + a^2}} \right] \end{aligned} \quad (11)$$

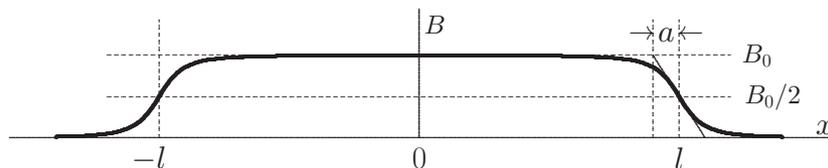
となる。中心<sup>2</sup>と端ではそれぞれ

$$B(0) = \frac{l}{\sqrt{l^2 + a^2}} \times \mu n I, \quad B(l) = \frac{l}{\sqrt{4l^2 + a^2}} \times \mu n I \quad (12)$$

であり、 $l \gg a$  のときは

$$B(0) = \mu n I = B_0, \quad B(l) = \frac{B_0}{2} \quad (13)$$

となる。 $x = l$  での勾配が  $B_0/2a$  であることから、端から 半径  $a$  程度 を除けば、磁束密度はほぼ一定  
とみなせる。この範囲では、並進対称性から考えて軸上以外でも磁力線は軸に平行だろう。ここで一辺  
が軸上にある長方形径路に Ampère の法則を適用すれば、ソレノイドの内部では一様に  $B_0$ 、外部では 0  
であることが分かる。一様でない端の部分では、磁力線が外へはみ出て軸に垂直な成分が生じる。



中心軸上での磁束密度

<sup>1</sup> 前ページの右図の閉曲面の  $+\alpha$  部分を、ソレノイドの端を残さずにすっぽり排除する形にすれば、閉曲面内に電流はない  
ので積分定理の右辺は 0 となり、ソレノイドの端の部分で右向き（閉曲面の内向き）に押す圧力が働いていることになる。こ  
れは磁場が端の電流を左へ押し込む力の反作用とみなせる。

<sup>2</sup> 中心  $x = 0$  での磁束密度は、右半分と左半分のコイル電流が作る磁束密度の和、すなわちソレノイドを真ん中で切り離し  
たとき切り口にできる磁束密度は  $B(0)/2$  である。したがって、十分に長いソレノイドの端では磁束密度は  $B_0/2$  であるこ  
ろが分かる。

垂直 2 等分面上（半球の底面）での磁束密度 (9) から分かるように、半径  $a$  の円電流が  $\pi a^2 I$  の磁気モーメントに等価であることから、長さ  $2l$ 、巻き数密度  $n$  の細長いソレノイドの磁気モーメントは  $\pi a^2(2nl I) = 2l \times \pi a^2 n I$  であり、両端に  $\pm q'$  ( $q' = \pi a^2 B_0 / \mu$ ) の「磁極」(→ 雑書庫 [214]) が置かれたと見なせる。したがって、ソレノイドの外側の垂直 2 等分面上での磁束密度は軸に平行に

$$B(r) = \frac{\mu q'}{4\pi(l^2 + r^2)} \frac{2l}{\sqrt{l^2 + r^2}} = \frac{la^2 B_0}{2(l^2 + r^2)^{3/2}} \quad (14)$$

と近似される（双極子場）。面を介して左右の部分が引き合う力は Coulomb 力に等しくて

$$\int_0^\infty \frac{B(r)^2}{2\mu} 2\pi r dr = \frac{\mu q'^2}{4\pi(2l)^2} = \frac{a^2}{8l^2} \left( \pi a^2 \times \frac{B_0^2}{2\mu} \right) \quad (15)$$

となり、ソレノイド内部の力に比べて小さい<sup>3</sup>が、ソレノイドの端付近の電流に働く力はこの分だけ大きくなる。ソレノイドの長さが有限であることによる端の効果である。

端部分における電磁力の軸方向の成分 外へはみ出る磁力線の垂直成分  $B_\perp = B \cdot n$  はソレノイドの面を横切るとき連続、軸方向の成分  $B_\parallel$  は内側の方が大きくて、Ampère の法則により  $\Delta B_\parallel = \mu n I$  である。これから Maxwell 応力の軸方向の成分を計算すればよいが、要するに軸方向の電磁力を及ぼすのは垂直成分  $B_\perp$  であり、コイルの単位長さ当たりの力は  $nIB_\perp$  となる。したがって、磁力線がはみ出ることによってソレノイドの右半分（主として端付近だけ）の電流に働く軸方向の力は、負の向きに

$$F = 2\pi a \times nI \int_0^l B_\perp(x) dx \quad (16)$$

である。右図のようにソレノイドの右半分の内側に密着する円筒面に Gauss の法則を適用すると

$$2\pi a \int_0^l B_\perp(x) dx = \pi a^2 \left( B_0 - \frac{B_0}{2} \right) = \frac{\pi a^2 B_0}{2} \quad (17)$$

したがって

$$F = \frac{\pi a^2 n I B_0}{2} = \pi a^2 \times \frac{B_0^2}{2\mu} \quad (18)$$

となる。実際は、 $x = l$  における平均的な磁束密度は中心軸上での値  $B_0/2$  より少し小さいから、働く力はその分だけ少し大きくなり、先ほど求めた端の効果に対応している。



<sup>3</sup> 例えば  $l = 10a$  なら、わずか  $1/800 = 0.125\%$  の補正である。