**粗い平面上の小球の運動はタブー！** —— 話題になっている北大 2024（後期）物理問題 1 (24/3/20)

ごく普通に見られる，摩擦のある粗い平面に物体を衝突させる問題である。物体の質量を $m$，反発係数を $e$，動摩擦係数を $\mu$ とする。平面に垂直な速度成分の変化は

$$v'_\perp = -ev_\perp \tag{1}$$

だから，垂直方向の運動量変化により衝突の瞬間に垂直方向に働く撃力 $N(t)$ の力積は，

$$\underline{N} = \int_0^{\Delta t} N(t)\mathrm{d}t = m(1+e)v_\perp \tag{2}$$

で与えられる。撃力 $N(t)$ は重力に比べ十分に大きいとしているが，**これに対しても動摩擦力が垂直抗力に比例し $\mu N(t)$ で与えられる**とすると，この衝突で面に平行な方向に働く力積は

$$\underline{F} = \int_0^{\Delta t} \mu N(t)\mathrm{d}t = \mu \int_0^{\Delta t} N(t)\mathrm{d}t = \mu \underline{N} \tag{3}$$

となり，(2) を用いれば運動量，したがって速度の平行成分の変化は

$$v'_\parallel = v_\parallel - \mu(1+e)v_\perp \tag{4}$$

である。完全非弾性衝突（$e=0$）であれば，水平面であれ斜面であれ，これを初速度として等加速度運動の問題として扱えばいいわけである。高校物理の範囲ではこれで十分である。北大 2024 年度後期の入試問題 1 はこういう考察を要求しているものと思われる。［ただし最後の設問 (5) の数値計算では，私の得た結果（62.5m）と某予備校の解答速報（66m）は食い違っていて，自信はない。］

（重要）
p.3 にこの部分の答えを追加（9/5）

実はこの結果によると $v'_\parallel < 0$，すなわち衝突後に**逆戻り**することもあり得る。実際，無造作に消しゴムを机にぶつけてみると，たまに手前に戻ることがあるから，このこと自体は不思議ではないだろう。しかしながら入射角が垂直に近い場合，あるいは $\mu$ が十分に大きい場合には，運動エネルギーが増加することが起りえる（例えば垂直方向の速さが変わらない弾性衝突 $e=1$ の場合が分かりやすい）。これは，滑り速度が極端に小さい場合には動摩擦係数が定数とはみなせず，動摩擦力も 0 に近づくと考えれば，起りえないと思われる。なお，動摩擦係数 $\mu$ は通常概念の固体の間では 1 より小さいが，ゴムなどでは 1 より大きいこともあるらしく，この場合はどうなのか今まで気が付かず考えたことがないので，目下保留中。摩擦の問題は存外，奥が深いことは事実だ。

高校物理ではこういう極端なケースは考慮せず，まずは広い範囲で成り立つことが確かめられている法則をしっかりと理解することを目的としている。いちいちそれが成り立つ条件を断ったりはしない。例えば力学の入試問題で「質点の速度が光速に比べて十分に小さいとして，云々」などと但し書きを加えたりしたら，相対論を知らない受験生をまどわせるだけだ。

北大の入試問題の**難点**は，そこではない。通常の物体の運動の場合と同じく回転運動を考慮しないでよいとするためであろうが，一応「ボールは大きさを無視できる質点と考える」と断ってはあるが，平面上での球の運動では，面が 完全に滑らかでない限り，**いくら半径が小さくても回転運動を無視できない**のである。摩擦力により，並進運動と回転運動は必ず絡み合う。例えば完全に粗い滑りのない面上の運動では，重心の並進運動と重心周りの回転運動のエネルギーは，同程度の大きさである。平面に斜めに衝突した場合，動摩擦力の撃力は重心を通らないから力のモーメントがあり，並進運動に見合った回転運動を引き起こす。粗い斜面を滑り降りる問題では，動摩擦係数がいくら大きくても箱のように静止することはなく，ある程度滑り降りてから後は**転がり**降りる。回転運動の慣性が加わる分だけ，加速度は重力の斜面方向の成分より小さい。

現行の指導要領のもとでこうした難点を避けるには，回転運動が起きない，例えばスキーのジャンプの着地の際の板か箱のような物体にすることだ。間違えても「小球」は避けるべきである。

**（例題）ボウリング**　最も簡単な運動を扱ってみれば，運動は球の半径にはよらず，いかに半径を小さくしようと回転運動を無視できないことが明白になる。半径 $R$，質量 $M$ の球を，動摩擦係数 $\mu$ の粗い水平面に「回転なし・初速度 $v_0$」でほぼ水平方向に投げ入れたとする。質量分布が一様な球の中心軸周りの慣性モーメントは $I = 2MR^2/5$ で与えられる。

並進速度の運動方程式は

$$M\dot{v} = -\mu Mg \quad \text{（右向きを正）} \tag{5}$$

回転速度の運動方程式は摩擦力のモーメントを用いて

$$I\dot{\omega} = \mu MgR \quad \text{（右回りを正）} \tag{6}$$

で与えられる。初期値をそれぞれ $v_0$ と $\omega_0\,(=0)$ として積分すれば

$$v(t) = v_0 - \mu gt\,,\ \omega(t) = \frac{5\mu g}{2R}\,t \tag{7}$$

となる。滑りがなくなる時刻と位置は，条件 $v(t) = R\omega(t)$ で求められ，

$$t_\mathrm{s} = \frac{2}{7}\frac{v_0}{\mu g}\,,\ x_\mathrm{s} = \frac{12}{49}\frac{{v_0}^2}{\mu g} \tag{8}$$

となる。すなわち，$v(t) = 0$ となって静止するはずであった時刻 $t_\mathrm{max} = v_0/\mu g$ と位置 $x_\mathrm{max} = {v_0}^2/2\mu g$ より前に滑りがなくなって，以後は滑らずに転がり続ける。このときの並進速度と回転速度は

$$v_\mathrm{s} = v_0 - \mu gt_\mathrm{s} = \frac{5v_0}{7}\,,\quad \omega_\mathrm{s} = \frac{5\mu g}{2R}\,t_\mathrm{s} = \frac{5v_0}{7R} \tag{9}$$

であり，運動エネルギーはそれぞれ

$$\frac{M{v_\mathrm{s}}^2}{2} = \frac{25}{49}\frac{M{v_0}^2}{2}\,,\ \frac{I{\omega_\mathrm{s}}^2}{2} = \frac{10}{49}\frac{M{v_0}^2}{2} \tag{10}$$

である。両者はほぼ <u>同等の大きさ</u> であって，しかも <u>球の半径 $R$ にはよらない</u>。

エネルギーの減少量は

$$\Delta E = \frac{M{v_0}^2}{2} - \left(\frac{25}{49} + \frac{10}{49}\right)\frac{M{v_0}^2}{2} = \frac{1}{7}\,M{v_0}^2 \tag{11}$$

である。摩擦力の仕事 $\mu Mgx_s = (12/49)M{v_0}^2$ より少ないが，(6) により摩擦力が回転運動を加速したためである。あるいは回転により床面との間の実効的な滑り距離が短くなったと考えてもよい。その行き着く先が，（摩擦があるのに，いや摩擦があるがゆえに）滑らずに転がって前進する運動状態であって，以後，エネルギーが失われることはない[1]。逆に $\omega_0 > 0$，すなわち正回転を与えて投げ入れるか，斜め衝突の撃力の力積で正回転を引き起こすかして $\omega_0 > v_0/R$ の場合には，球は右向きに進むにもかかわらず動摩擦力は <u>正の向き</u> に働くというケースもあり得る。この場合は並進運動は摩擦力によって加速され，回転運動は減速されて滑りのない終状態に達する。 修正(2024/9/4)

球状物体の**慣性モーメント**は，内部での質量の分布によって異なる。表面に質量が集中した球殻の場合が最大で $I = 2MR^2/3$ であり，上の結論は本質的に変わらない。逆に質量が中心近くに集中している場合は $I \simeq 0$ で，エネルギー的には回転運動は無視できる。かといって単純に「質点とみなす」とはいかない。この場合は，回転運動はあっという間に加速（あるいは減速）されて瞬時に滑りのない転がり運動に達する。そのあとは「摩擦のない質点の運動」に帰してしまい，そもそも粗い平面上の物体の運動を考えた意味がなくなる。

この程度の回転運動は高校物理に取り入れてもいいような気がするが，解禁したとたんに入試では「待ってました」とばかり，様々な問題が出現することだろう。しかも最近の現役の大学の先生たちは，工学系の特殊な分野を除けば剛体の回転運動まで丁寧に講義を受けていないだろうから，失礼ながら出題ミスも嫌というほど頻出するのではないか。

---

[1]等速度で走る車で滑らずに回転して進むタイヤの場合は，変形による内部摩擦でエネルギーを消費する。

## p.1 の疑問の補足　　2024/9/5 追記（大学の教科書にも書かれていない？）

最近（9 月）になって再び話題になっていることを知り，北大の入試問題とは関係ないのであるが，保留していた問題「衝突によって運動エネルギーが増えることがある？」を思い出して，今回はまじめに考えてみた。源泉がないのに運動エネルギーが増えることは絶対にないから，その可能性をはらんだ公式はどこかに限界があるはずだ。

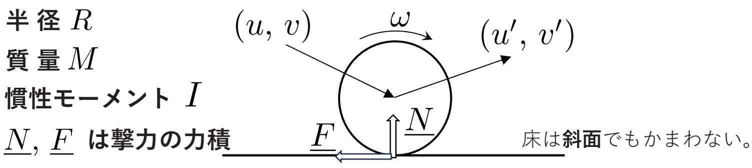
例題で示したように小球では回転運動がからんでくるので，高校の教科書では必ずそうしてあるように**箱**（直方体）で考え，底面を平面に平行に保って平面に向かって斜めに投げつけるとする。また，反発係数は（特に必要はないのであるが）$e=0$ としておこう。

衝突による撃力は短いが有限の時間，つまり 垂直方向の速度が失われてしまう のにかかる時間 $\Delta t$ の間，働く。結論として (3) は $\Delta t$ の間に平行方向の速度 $v_{\parallel}$ が 0 まで**減速しきれなかった**ときの話だということである。このことは，単純に「$\underline{F}=\mu N\Delta t$」とすると見落としてしまう。

初期条件が $v_{\parallel}>0$（右向き）であるから，最初のうちは後ろ向き（左向き）の摩擦力が働き，急激に減速される。もし $\Delta t$ までの間に減速されて $v_{\parallel}=0$ に達すると，この左向きの摩擦力は働かなくなり[2]，それ以上は減速されない。(3) の積分範囲の上限は $\Delta t$ ではなく，この時刻まで である。（たとえ何かの拍子にわずかでも $v_{\parallel}<0$ になったとしても，こんどは摩擦力は右向きに転じて $v_{\parallel}$ は直ちに 0 に引き戻される！）実際には，$\Delta t$ の間に速度の向きが転じるほど摩擦力による力積が大きい場合には，物体は 衝突位置でピタッと静止して終わり である。

最初に消しゴムを机に投げつけて跳ね返ってくることがあることを目撃したりしたため，とんでもない思い込みをしてしまった。球や円盤のように回転運動が関与する場合，バックスピン（左回転，卓球のカット）を与えて床に斜めにぶつけると，後ろに跳ね返ることがある。回転速度がある値より大きいときに，$\Delta t$ の間に減速されて $v_{\parallel}=0$ になっても，まだバックスピンが残っている場合である。剛体の衝突の演習問題の定番だ。もちろん，運動エネルギーが増えることはない。やはり「小球」は要注意。

**（付録）球と平面の衝突**　余白ができたので，球（円盤）と平面の衝突条件を書いておく。




(1) 並進運動量の関係：$M(u'-u)=-\underline{F}$，$M(v'-v)=\underline{N}$

(2) 重心軸周りの角運動量の関係：$I(\omega'-\omega)=R\,\underline{F}$　（撃力のモーメント）

(3) 反射の法則：$v'=-ev$　（$e$ は反発係数）

5 つの未知数 ($u'$, $v'$, $\omega'$, $\underline{N}$, $\underline{F}$) に対して，あと一つ，条件に応じて以下の いずれか を適用する：

(4-1) 接触が完全に滑らか：$\underline{F}=0$

(4-2) 完全に粗くて接触点での滑りなし：$u'=R\omega'$

(4-3) 動摩擦の関係：$\underline{F}=\mu\underline{N}$　（$\mu$ は動摩擦係数：滑りの向きによって符号が変わる）
**注．** 結果的に滑りの向き (符号）が変わる場合は，上の**補足**に倣い (4-2) を適用する。

[2] 教科書には書かれていないが，動摩擦係数 $\mu$ は,（速度の向きによって動摩擦力 $\mu N$ の向きが変わることから）速度の**奇関数**であると考えるべきである。わずかになまった階段関数のように，速度 0 の付近では ± 定数値から急激に 0 に近づく形の関数になっているはずである。