粗い平面上の小球の運動はタブー！ —— 北大 2024（後期）物理問題 1 (24/3/20, 9/6 **改訂**)

北大の問題１は，摩擦のある斜面と物体の衝突の問題である。斜めに衝突する場合，衝突の間も面に 平行方向の速度成分をもつ から動摩擦力が働く。面に垂直な方向に撃力（一瞬の間に働く非常に強い力）が働く以上，対応する動摩擦力も撃力となり，運動量の不連続な変化が起きる。

物体の質量を m，反発係数を e，動摩擦係数を μ とする。平面に垂直な速度成分の変化は

$$v'_\perp = -ev_\perp \tag{1}$$

だから，垂直方向の運動量変化により衝突の瞬間に垂直方向に働く撃力 $N(t)$ の力積は，

$$\underline{N}\left(=\int_0^{\Delta t} N(t)\mathrm{d}t\right) = m(1+e)v_\perp \tag{2}$$

で与えられる。Δt は垂直方向の速度成分の向きが変わる（$e=0$ なら 0 になる）までにかかる，ごく短い時間である。この間に働く**動摩擦力が垂直抗力に比例**し $\mu N(t)$ で与えられるとすると，この衝突で面に平行な方向に働く力積は

$$\underline{F}\left(=\int_0^{\Delta t} \mu N(t)\mathrm{d}t = \mu\int_0^{\Delta t} N(t)\mathrm{d}t\right) = \mu\underline{N} \tag{3}$$

となり，(2) を用いれば衝突後の運動量，したがって速度の平行成分が以下のように求まる：

$$v'_\parallel = v_\parallel - \mu(1+e)v_\perp \tag{4}$$

問題１は，以上のような考察を要求していると思われる。力積の積分形は不要であるが，その概念図を含め全て教科書に書かれていて高校物理の知識の範囲で無理はなく，これで十分である[1]。

9/6 訂正

要注意　結論 (4) では平行方向にも跳ね返ること（$v'_\parallel < 0$）[2]や，**運動エネルギーが増える**ことさえあり得る。これは，摩擦力により 減速され過ぎて 滑りの向き，したがって動摩擦力の向きが変わる場合にも，μ を定数[3]として (3) の積分をそのまま続けたためである。撃力はごく短い時間 Δt の間に瞬間的に働くとして，その平均 $\overline{N}$ を用いて $\underline{F} = \mu\overline{N}\Delta t$ と書くと見落としがちだ。短いとは言え有限の時間 Δt の間に起きることを，スローモーションで調べる必要がある。

初期条件が $v_\parallel > 0$（右向き）であるから，最初のうちは摩擦力が左向きに働き，急激に減速される。もし Δt までの間に減速されて $v_\parallel = 0$ に達すると，この後ろ向きの摩擦力は働かなくなり，それ以上は減速されない。つまり，(3) の積分範囲の**上限**は Δt ではなく，この時刻までである。（たとえ何かの拍子に $v_\parallel < 0$ になったとしても摩擦力は右向きに転じて $v_\parallel$ は直ちに 0 に引き戻される。）これがごく短い時間の間に，ほぼ同一地点で起きる。つまり，運動量の平行成分が 0 になるほど摩擦力の力積が大きい場合には，平行方向には**衝突位置でピタッと停止**して終わりである。脚注 2 の不等式で分かるように，$\mu > 0$ である限り面に垂直に近い角度で衝突する場合は必ずそうなる。$e = 0$ の斜面の場合は，その傾きが摩擦角より大きければ，この後は滑り落ち始める。

北大の入試問題の**難点**は，そこではない。通常の物体の運動の場合と同じく回転運動を考慮しないでよいとするためであろう，一応「ボールは大きさを無視できる質点と考える」と断って

[1] 衝突の際の摩擦撃力一般については異論もあるだろう。例えば，平面に垂直方向の跳ね返りは，衝突の際の変形に対する**弾性**に起因するから，平行方向でも摩擦撃力に対する**ずれ弾性**の影響がないのかどうか疑問が残る。

[2] 入射角 $< \tan^{-1}(1+e)\mu$ の場合である。エネルギーが増える例は弾性衝突（$e=1$）の場合が分かりやすい。

[3] 教科書には書かれていないが，動摩擦係数 μ は決して一定ではない。速度の向きによって動摩擦力 μN の向きが変わることから，速度の**奇関数**であると考えるべきである。高校物理でも，粗い斜面を**登るときと下るとき**で動摩擦力の向きが違うため加速度が異なることは周知のことであろう。動摩擦係数は，滑り速度が 0 に近づくと少し大きくなることがあるようだが，ともかく奇関数なら正確に速度 0 では 0 となるはずだ。

非常に強い撃力の場合に μN のままでよいかは疑問である。摩擦の問題は存外奥が深く，現在でも最先端で研究が行われている。高校物理では必要でない限り極端なケースは想定せず，現に広い範囲で成り立つことが確かめられている法則を理解することを目的としており，入試問題でもいちいちそれが成り立つ条件を断ったりはしない。ただし，いかなる近似のもとでも無視できないことを 黙って無視 する場合に，**簡単化したモデル**などとは言わない。

はあるが，この仮定では不十分である。平面上での球の運動では，面が完全に滑らかでない限り，**いくら半径が小さくても回転運動を無視できない**のである。摩擦力により，並進運動と回転運動は必ず絡み合う。例えば粗い面上で滑らずに転がる運動では，重心の並進運動と重心周りの回転運動のエネルギーは，同程度の大きさである。粗い斜面を滑り降りる問題では，動摩擦係数がいくら大きくても停止することはなく，ある程度滑り降りてから後は**転がり**降りる。

現行の指導要領のもとでこうした難点を避けるには，教科書で必ずそうしてあるように，回転運動が起きない**箱**にすることだ。間違っても摩擦のある運動では「小球」は避けるべきである。

（例題）ボウリング　最も簡単な運動を扱ってみれば，運動は球の半径にはよらず，いかに半径を小さくしようと回転運動を無視できないことが明白になる。半径 R，質量 M の球を，動摩擦係数 μ の粗い水平面に「回転なし・初速度 v_0」でほぼ水平方向に投げ入れたとする。質量分布が一様な球の中心軸周りの慣性モーメントは $I = 2MR^2/5$ で与えられる。

並進速度の運動方程式は

$$M\dot{v} = -\mu Mg \quad \text{（右向きを正）} \tag{5}$$

回転速度の運動方程式は摩擦力のモーメントを用いて

$$I\dot{\omega} = \mu MgR \quad \text{（右回りを正）} \tag{6}$$

で与えられる。初期値をそれぞれ v_0 と $\omega_0\,(=0)$ として積分すれば

$$v(t) = v_0 - \mu gt\,,\ \omega(t) = \frac{5\mu g}{2R}\,t \tag{7}$$

となる。滑りがなくなる時刻と位置は，条件 $v(t) = R\omega(t)$ で求められる：

$$t_\mathrm{s} = \frac{2}{7}\frac{v_0}{\mu g}\,,\ x_\mathrm{s} = \frac{12}{49}\frac{{v_0}^2}{\mu g} \tag{8}$$

つまり，$v(t) = 0$ となって静止するはずであった時刻 $t_\mathrm{max} = v_0/\mu g$ と位置 $x_\mathrm{max} = {v_0}^2/2\mu g$ より前に滑りがなくなって，以後は滑らずに転がり続ける。このときの並進速度と回転速度は

$$v_\mathrm{s} = v_0 - \mu g t_\mathrm{s} = \frac{5v_0}{7}\,,\quad \omega_\mathrm{s} = \frac{5\mu g}{2R}\,t_\mathrm{s} = \frac{5v_0}{7R} \tag{9}$$

であり，運動エネルギーはそれぞれ以下のように与えられる：

$$\frac{M{v_\mathrm{s}}^2}{2} = \frac{25}{49}\frac{M{v_0}^2}{2}\,,\ \frac{I{\omega_\mathrm{s}}^2}{2} = \frac{10}{49}\frac{M{v_0}^2}{2} \tag{10}$$

両者は同等の大きさであり，半径 R にはよらないから，もともとボールである限り質点とみなしても同じだ。質点とみなせるのは，回転運動が並進運動とは完全に独立である場合である。

エネルギーの減少量は

$$\Delta E = \frac{M{v_0}^2}{2} - \left(\frac{25}{49} + \frac{10}{49}\right)\frac{M{v_0}^2}{2} = \frac{1}{7}M{v_0}^2 \tag{11}$$

である。摩擦力の仕事 $\mu Mgx_s = (12/49)M{v_0}^2$ より少ないが，(6) により摩擦力が回転運動を加速したためである。あるいは回転により床面との間の実効的な滑り距離[4]が短くなったと考えてもよい。その行き着く先が，**滑らずに転がって前進**する運動であって，以後，滑りがないため摩擦があっても**エネルギーは失われない**。逆に $\omega_0 > 0$，すなわち正回転（スピン）を与えて投げ入れるか，斜め衝突の撃力の力積で正回転を引き起こすかして，$\omega_0 > v_0/R$ の場合には，球は右向きに進むにもかかわらず動摩擦力も右向きに働くというケースもあり，この場合は並進運動は摩擦力によって加速され，回転運動は減速されて，しばらくすると滑りのない終状態に達する。

[4] 「滑り速度」は $v(t) - R\omega(t)$ であり，これを t で積分すれば実効的な「滑り距離」が得られ，(11) が示される。

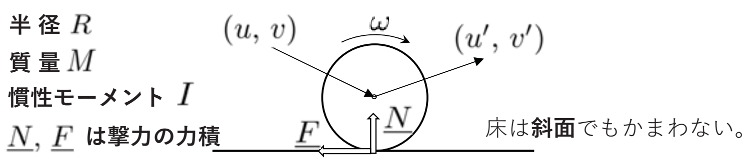
球状物体の**慣性モーメント**[5]は，内部での質量の分布によって異なる。表面に質量が集中した球殻の場合が最大で $I = 2MR^2/3$ であり，上の結論は本質的に変わらない。逆に質量が中心近くに集中している場合は $I \simeq 0$ で，この場合に限りエネルギー的には回転運動を無視できる。かといって単純に「質点とみなす」とはいかない。この場合は，回転運動はあっという間に加速（あるいは減速）されて瞬時に滑りのない転がり運動に達する。そのあとは「摩擦のない質点の運動」に帰してしまい，そもそも粗い平面上の物体の運動を考えた意味がなくなる。

9/6 追加

（付録）球と平面の衝突

余白ができたので，大きさを無視できない物体（球や円盤）の運動の扱いを説明しておこう。重心の並進運動と重心の周りの回転運動は完全に独立に扱うことができる。普通，重力は重心を通るので重心周りの力のモーメントがなく，回転には寄与しない。物体の運動を小球（大きさを無視できる**質点**）[6]として扱うのはそのためである。しかしながら，例題で見たように摩擦のある平面との衝突や面上での運動を扱うときには，並進運動と回転運動が密接に絡んでくる。

大きさをもつ物体では回転にも慣性があり，**角運動量**という量が導入される。角運動量と角速度の比例係数が**慣性モーメント**であり，並進運動における質量の役割を果たす。動摩擦力に関与する**滑りの速度**は u ではなく，接触点での床との間の相対速度 $u - R\omega$ であることに注意。



(1) 平面に平行方向の運動量変化： $M(u' - u) = -\underline{F}$

(2) 平面に垂直方向の運動量変化： $M(v' - v) = \underline{N}$

(3) 重心軸の周りの角運動量変化： $I\,(\omega' - \omega) = R\,\underline{F}$　（撃力のモーメント）

(4) 反射の法則： $v' = -e\,v$　（e は反発係数）

衝突の際の撃力は前もっては分からず未知数である。5 つの未知数 $(u',\, v',\, \omega',\, \underline{N},\, \underline{F}\,)$ に対して方程式が 4 つで，これだけでは解けない。あと一つ，条件に応じて以下の <u>いずれか</u> を適用する。

(5-1) 接触が完全に滑らか： $\underline{F} = 0$

(5-2) 完全に粗くて接触点での滑りなし： $u' = R\,\omega'$

(5-3) 動摩擦力の関係： $\underline{F} = \mu\underline{N}$　（μ は動摩擦係数：滑りの向き $u - R\omega$ によって符号に注意）

ただし，得られた結果で **滑りの向き** $(u - R\omega$ と $u' - R\omega'$ の符号）が変わる場合，
つまり衝突の間に滑り速度が 0 になってしまう場合は (5-2) を適用（→ p.1 **注意**）

球の運動ではバックスピン（卓球のカット：$\omega < 0$）を与えて床に斜めにぶつけると，後ろ向きに跳ね返ることがある。Δt の間に並進速度が減速されて $u = 0$ になっても，まだバックスピンが残っている場合である。これが頭にあるので，今回，**要注意**とした部分（$v_{\parallel}' < 0$）は不思議ではないと思い込み，3 月に話題になっていたときに書いた**旧版**（3/20）では迷路に入り込んで保留にしていた。消しゴムを机にぶつけてはね返ることがあるのは，弾性も影響していると思われる。

---

[5] 物体を質点の集まりと考え，各点の質量を m_i，回転軸からの距離を r_i とするとき，球に限らず $I = \sum_i m_i r_i^{\,2}$ で定義され，普通は積分で求める。各点の回転速度を $r_i\omega$ として回転の運動エネルギーは，$\sum_i m_i (r_i\omega)^2/2 = I\omega^2/2$ で与えられる。質量 M，半径 R の均質な円盤では，中心を通る回転軸の周りで $I = MR^2/2$，円輪では $I = MR^2$。

[6] 一様な重力ではなく**逆二乗の法則**に従う万有引力の場合にも，太陽も惑星も 球状物体 とみなせば，及ぼし合う万有引力の合力は質量がそれぞれの中心に集中しているとしたときと同じになり，双方を**質点**として扱える。太陽や惑星の大きさに比べて十分に離れているため，近似的に点とみなすということではない。（静電ポテンシャルのときと同様に位置エネルギーで考えると分かりやすい。遠方で $\sim 1/r$ となる**球対称ポテンシャル**は $1/r$ しかない。）

設問 (5) は、お気付きのように衝突の瞬間の動摩擦力の力積を考慮し、斜面に平行な運動量変化から初速度を決めて計算すれば 63m となります。しかしながら実際には、この力積を考慮しない場合の結論である 66m とする解答の方が多かったため、前者は標準的な高校物理の範囲では無理があったと判断し、採点の際には 66m を正解として扱いました。もちろん 63m とする解答は正解とし、同じ点数を与えています。

以上のように「解答ができない」というご指摘は当りません。

「題意に多少無理があったので，斜面を登るときの等加速度運動がちゃんと解けておればよし」か？