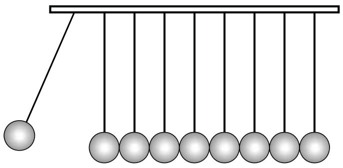
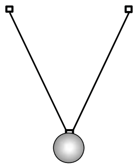
ニュートンの揺りかご —— 剛体か弾性体か？　（2019/12/5 初稿，12/8 修正，2020/1/26 追加）

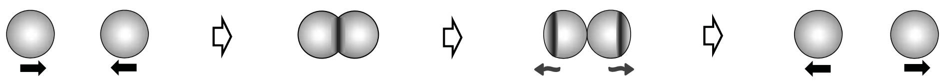
これは，スチールの球を吊り下げたいくつかの同じ振り子を，隣り合う球が接するように水平・一列に並べたインテリア[1]で，各振り子は球が横に暴れて列が乱れないよう，2 本の細線でV字アングル状（**右図**）に作られている。左端の球を少し引き離してから手を離してぶつけると，この球は停止し，右端の球だけが弾き出される。途中の球は全て微動だにしない。つまり，あたかも両端の 2 つの球だけの **2 体衝突**であるかのように振る舞う。弾かれた球が戻ってきて再び衝突し，逆向きに同じことが起きて繰り返し振動する。スチールの弾性がよいのか，けっこう長いこと持続し，カチカチとリズミカルな金属音も響いて物理屋なら見ていて飽きない，悩ましい教育グッズだ。最初にぶつける球を 2 個とか 5 個とかにしたらどうなるか，予想してみるがよい。

不定問題　実はこれを剛体球の **1 次元衝突問題**と見なすとき，球が **3 個**以上ある場合は，弾性衝突と仮定しても，不定問題なのである。つまり，同時に衝突した直後の各球の速度を未知数として，これが 3 つ以上あるのに対し，拘束条件は運動量保存則とエネルギー保存則の 2 つだけだから，これを満たす解は「不定」となる。すぐに思いつきそうな，左端の球は直ちに跳ね返され，他の球は一体となって反対向きにゆっくりと動き出すという，自明な解もあってよいわけだ。

弾性体　この矛盾は，球を変形がなく弾性定数（と音速）が無限大の剛体であるとしたことによる。現実のスチール球のような弾性体は衝撃により変形し，その変形が完全に元に戻りエネルギーが保存されることは仮定できるが，変形が弾性波のパルスとして伝わる速さ（音速）については，特に制限はされない。つまり，左端の球が 2 番目の球に衝突してから，その衝撃が 3 番目の球と接するところまで伝わるのに一瞬の有限な時間がかかる。このため，厳密に同時に起きるという意味での多体衝突にはなっていないのである。まず，最も簡単な 2 体衝突を見てみよう。

2 体衝突　静止した球に左側から同じ質量の別の球が速度 $\boldsymbol{v}$ で衝突したとする。先ほどの説明では，衝撃パルスが右側の球のみに伝わり非対称のように錯覚するかもしれないが，図のように速度 $\boldsymbol{v}/2$ の**重心系**で考えれば完全に対称である。



弾性体はばねと同じで，接触した瞬間には撃力は働かない。このばねは非線形で質量（**慣性**）をもつため最初は表面近くだけが凹む。双方に生じた凹みが衝撃パルスとして両端まで伝わっていき球の変形が元に戻ったとき，左側の球は衝撃パルスにより重心系で左向きの運動量（速度 $-\boldsymbol{v}/2$）を与えられて**実験室系**では静止，代わりに右側の球が速度 $\boldsymbol{v}$ で弾かれる。スチールのような硬い弾性体では，以上がごく短時間[2]に起きるので，弾性衝突において撃力が働いたと見なされる。

[1] ニュートンの時代からあったらしい。いま気が付いたが啓林館の『物理』の教科書の表紙絵になっている。
[2] スチール中の粗密波の速さ（音速）は約 6 km/秒 であるから，数マイクロ秒の間に終わるだろう。

このように弾性体の球を非線形ばねと考えれば，さらに右側に球列が続いていても，左端の球が同じ速度 $\boldsymbol{v}$ で衝突した瞬間の表面の凹み方は，2 体衝突の場合と同じであろう。衝突した球はこの変形の回復後，実験室系で静止するから，球がもっていた運動量とエネルギーは，そっくり衝撃パルスとして右側の球列に順次伝えられていく。この衝撃パルスは，右端まで達すると右端の球の表面を内側から叩いて運動量とエネルギーを与え，ちょうど同じ速度 $\boldsymbol{v}$ で弾き出すことにより完全に消滅する。跳ね返る余剰はないから，右端の球が離れてしまえば，球が引き返してくるまで暫くの間，左端の球を含む残りの球列には静寂が戻る。これが「揺りかご」の挙動である。

衝撃パルスが伝わる時間が有限であることから，結果的には各剛体球の間に微小な**隙間**があったと見なし，独立な 2 体衝突が連続して起きると考えれば分かりやすい。運動量とエネルギーの保存則は，各衝突ごとに課せられる。最初にぶつける球の数が 2 個以上である場合も，わずかな間隔をおいて 1 つずつぶつかり，次々に衝撃パルス列が送られると考えれば,「揺りかご」の様々な挙動は説明できる。しかし，どんな剛体系の場合でも，そううまくいくとは限らない。

以上で見てきたように，3 体以上の物体の衝突を問題にするときは，決して物体を剛体としてはならないのである。変形しない剛体の概念を知っている学生達に対して,「跳ね返り係数 1」とか「弾性衝突」と断るだけでは不十分である。剛体とするのであれば，解が求まるために必要十分な条件を追加しなければならない。すぐに解が不定であることに気がつくような，こんな思わせぶりな仕掛けを試験問題の題材にすることはないであろうが，床に（あるいは壁に接して）物体を置いておき，これに他の物体をぶつけるような問題は，うっかりするとあり得る。この場合は未知数は 2 つであるが，今度は不定量の力積が床（壁）に吸収されるため運動量保存則が欠けることになり，やはり同じ意味の不定問題である。

この球列の例のように，剛体ではなく弾性体であるとすれば，必ず解が決まると思うかも知れない。原理的には確かにそうであるが，たとえ均質な弾性体であっても，その形や材質の違いによって衝撃パルスの伝わり方・跳ね返り方は一筋縄ではいかない。例えば，もっと衝突面（壁）が広くて重い物体に球がぶつかった場合は，物体表面に生じた局所的な凹みは周辺部からの張力によって速やかに回復し，球に撃力を及ぼす。初等的力学の範囲内で確かなのは，**運動量保存則**と，完全弾性なら**エネルギー保存則**，場合に応じて次元性などの**幾何学的条件**だけである。先ほどの球列にしても，もし両端の球以外はこっそり接着されていたらどう説明すればよいのか，私にはまだ答がわからない（※↓）。やはり不定問題に限りなく近いようだ。接着しない球列では，球と球の間に押し合う力は働くが引き合う力は働かないことが，どうやらキーポイントと思われる。各球は弾性体であっても，球列全体としては伸びに対して無抵抗という意味で弾性体ではない。

実験すれば一発で解決するかもしれないが，インテリアは退職の際のどさくさで紛失してしまった。代わりに机の上でレールを作ってパチンコ玉を転がしてみたところ，玉の数が 4，5 個くらいまでは振り子の衝突と同様な振る舞いをする。摩擦や回転運動が関与するためか，それ以上に玉の数が増えたり接着したりしたときは，あまりよろしくない。コインでも試したが結果は微妙だ。インテリアをどこかで手に入れて試してみるまで，しばらく理屈はお預けとしておこう。

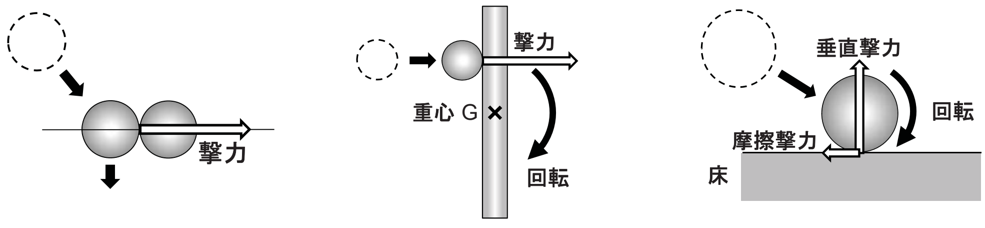
※ *Click* ⇒ `http://www7b.biglobe.ne.jp/~fortran/education/Newton/Bond.html`

質問が寄せられたので回答追加： 2020/1/26

質問 1： 2 つの球が 3 次元的に衝突する場合，未知数の速度成分が 6 つあるのに対して，条件はエネルギー保存則とベクトル的な運動量保存則の 4 つしかないので，不定問題にならないか？

—— 元々保存則の前に各自由度に対する運動方程式が 1 つずつあり，これにより運動が決まるのですが，衝突の場合，運動方程式に含まれる撃力も前もって分からない量です。撃力は幾何学的条件から方向が決まるので，その大きさが未知数になります。これが決まるには，反発力に関わる弾性的性質を特定する必要があり，弾性衝突の場合なら例えばエネルギー保存則で与えます。したがって 2 体衝突の場合はこれでちょうど全ての未知数が決まるという構造になっています。一方，3 体以上の同時衝突では接触面ごとに撃力の未知数が増えるのに対し，エネルギー保存則は全体で 1 つのままですから，条件式が足りないのです。

未知数の撃力は，作用・反作用の対になっているので**内力**と見なして運動方程式から消去され，結果として運動量保存則が導かれるわけですが，大きさをもつ物体の場合，一般にはその撃力が「どこにどう働くか」が意味をもち，必ずしも用なしになったわけではありません。例えば**図 (a)** のように，2 つの球が正面衝突ではなく中心がずれて斜めに衝突する場合，撃力は衝突した瞬間の 2 つの球の中心を結ぶ直線の方向（一般には衝突時の共通接平面の法線方向）に働き，静止していた右側の球の衝突後の速度は，この方向に制限されます。これが先ほどの幾何学的条件の具体例です。これにより速度成分の未知数が 2 つ減り（あるいは方向を与える 2 つの式が追加されて条件は 6 つになり），いずれにしても解が決まります。



(a) (b) (c)

質問 2： 大きさをもつ一般の物体では回転の自由度もあり，衝突で回転運動が発生することがある。この場合も 2 体衝突なら解が決まるのか？

—— **図 (b)** のように撃力が棒の重心を通らないときは力のモーメントがあるため，回転運動が生じて棒は**角運動量**をもつようになります。回転自由度に対しては別に回転運動の運動方程式があって，**慣性モーメント**と力のモーメントで運動が決まります。慣性モーメントは回転運動の慣性を表す量[3]で，回転軸と物体内の質量分布で決まる量です。撃力のモーメントは作用点が分かっているので新たな未知数ではなく，回転があっても解が決まる事情は変わりません。撃力の作用・反作用対は作用線が共通なので，そのモーメントも大きさが同じで逆向きになり，やはりこれを消去すれば，衝突の際の**角運動量保存則**が導かれます。今の場合，球は自転していなくても，衝突時の棒の重心 G を**原点**にとれば G の周りに回転運動をしていて角運動量（運動量のモーメント）をもつので，これとあわせて保存則が成り立っています。ただ回転がある場合，保存則から入るよりも撃力を未知数にしたまま出発する方が扱いやすいと思います（⇒**付録**）。

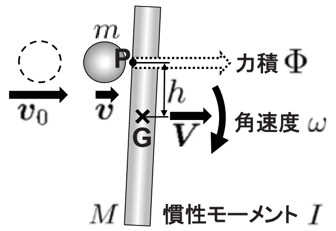
—— 衝突で回転運動（角運動量）が生じる例はほかにもあります。**図 (c)** のように滑らかでない床に球が斜めにぶつかるような場合です。球が回転していなくても床面と球面の間には相対速度がありますから，

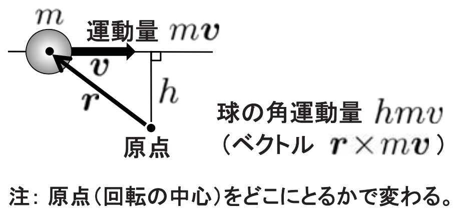
[3] 重心を通る 1 つの**回転軸**を選んで，質量 m_i が軸から R_i の距離に分布しているとして，$I = \sum_i m_i R_i{}^2$（積分）。角速度を ω として**角運動量**は $I\omega$，**回転エネルギー**（回転の運動エネルギー）は $I\omega^2/2$ で与えられる。

接触したとき摩擦が生じます。一般には衝突の間に微小とは言え接触面が変形するので，通常の摩擦と同じに扱えるかどうか微妙ですが，横方向の撃力となり，運動量の横成分に影響するとともに回転運動を生じます。したがって反発係数を与えても，それだけでは不十分です。なお，大学の力学で出てくる大きさをもたない**質点**という理想的概念の代わりに，高校の物理では**小球**という言い方をします。これは「回転運動の影響（角運動量と回転エネルギー）を無視できるような運動を扱っている」という約束です。しかしながら，球がいくら小さくて回転エネルギーを無視できる場合でも，点でない限り摩擦があれば横方向の運動量には影響します。動摩擦係数を与えて「摩擦の撃力も垂直撃力に比例する」と仮定する手もないことはありませんが，そこまで凝ることはない，ここは「滑らかな床」と断っておくのが無難だと思います。

（付録）例 (b) の解き方： 高校物理では剛体の静力学で力のモーメントは出てくるので，**角運動量**と**慣性モーメント**を運動量と質量との類推で説明すれば，さほ無理のない発展問題である。いつもいつも小球ではなく多少は現実味のある問題に触れるのも，保存則の意義を理解する助けになるのではないか。

球と棒の質量を m と M，棒の重心周りの慣性モーメントを I（回転軸は紙面に垂直），衝突前と後の球の速度を v_0 と v，衝突後の棒の並進速度と回転の角速度を V と ω，撃力の力積を Φ とする。また，球がぶつかった位置（撃力の作用点）は重心 G から高さ h の点 P であるとする。





並進運動の方程式： $m(v_0 - v) = \Phi = MV$ (1)

回転運動の方程式： $I\omega = h\Phi$ ← 撃力の力積のモーメント (2)

エネルギー保存則： $\dfrac{m{v_0}^2}{2} - \dfrac{mv^2}{2} = \dfrac{MV^2}{2} + \dfrac{I\omega^2}{2}$ (3)

これで 4 つの未知数 $v,\ V,\ \omega,\ \Phi$ に対して，解が決まるために必要十分な条件式が揃っている。力積 Φ とそのモーメントは作用線までの距離 h が定まっておれば消去できて，(1)，(2) は

運動量保存則： $m(v_0 - v) = MV$ ，**角運動量保存則：** $I\omega = hm(v_0 - v)$ (4)

となる。エネルギーの方程式は，左辺を因数分解して (4) を代入すれば以下と等価である：

$$v_0 + v = V + h\omega \tag{5}$$

この式は，右辺が衝突直後の点 P における棒の表面の速度（＝並進速度＋回転による速度）だから

反発の法則： $(V + h\omega) - v = ev_0$ （ただし，**反発係数** $e = 1$） (6)

に対応し，これも撃力が決まるために必要な弾性的性質を特定する条件である。したがって最初からこれをエネルギーの保存則の 代わりに 用いてもよい。実際，非弾性衝突（$e < 1$）の場合は，エネルギー保存則ではなくこの式が用いられる。しかし,「ゆりかご」の右の方の球列のように，最初から接触していた部分に撃力が働くような場合には，お手上げである。 **（以下省略）**