コヒーレント状態とスクイーズド状態

角振動数 ω の調和振動子の，無次元化したシュレーディンガ方程式（$\hbar = 2$）

$$\frac{i}{\omega}\frac{\partial}{\partial t}\psi = \left(-\frac{\partial^2}{\partial s^2} + \frac{s^2}{4}\right)\psi(x) = \lambda\psi(x) \tag{1}$$

の，境界条件 $\psi(\pm\infty) = 0$，および規格直交条件をみたすエネルギー固有値と固有関数は

$$\lambda_n = n + \frac{1}{2} \qquad (n = 0, 1, 2, 3, ...) \tag{2}$$

$$\psi_n(s) = \frac{1}{(\sqrt{2\pi}\ n!)^{1/2}}\ \mathrm{e}^{-s^2/4}\ H_n(s) \tag{3}$$

である。関数 $H_n(s)$ はエルミート多項式で，微分方程式

$$g'' - sg' + ng = 0 \quad (n = 0, 1, 2, 3, ...)$$

を満たしており，以下の漸化式で与えられる：

$$H_0(s) = 1,\ H_1(s) = s,\ H_{n+1}(s) = sH_n(s) - nH_{n-1}(s) \quad (n \geq 1) \tag{4}$$

$$H_n'(s) = nH_{n-1}(s) \tag{5}$$

固有関数 (3) の係数は，積分公式（直交関係）

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-s^2/2} H_n(s) H_k(s)\ \mathrm{d}s = k!\ \delta_{k,n} \tag{6}$$

から決まる。さらに，(4) を $sH_n = H_{n+1} + nH_{n-1}$ と書き換え，(5)，(6) を用いれば，あとでしばしば利用される漸化公式

$$s\ \mathrm{e}^{-s^2/4}H_n(s) = \mathrm{e}^{-s^2/4}\left[\ \ H_{n+1}(s) + n\ H_{n-1}(s)\right] \tag{7}$$

$$\left(2\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\right)\mathrm{e}^{-s^2/4}H_n(s) = \mathrm{e}^{-s^2/4}\left[-H_{n+1}(s) + n\ H_{n-1}(s)\right] \tag{8}$$

$$s^2\ \mathrm{e}^{-s^2/4}H_n(s) = \mathrm{e}^{-s^2/4}\left[H_{n+2}(s) + (2n{+}1)\ H_n(s) + n(n{-}1)\ H_{n-2}(s)\right] \tag{9}$$

$$\left(2\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\right)^2\mathrm{e}^{-s^2/4}H_n(s) = \mathrm{e}^{-s^2/4}\left[H_{n+2}(s) - (2n{+}1)\ H_n(s) + n(n{-}1)\ H_{n-2}(s)\right] \tag{10}$$

と積分公式

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} s\mathrm{e}^{-s^2/2}H_n(s)H_k(s)\mathrm{d}s = k!\ (\delta_{k,n+1} + n\ \delta_{k,n-1}) \tag{11}$$

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\left(2\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\right)\mathrm{e}^{-s^2/2}H_n(s)H_k(s)\mathrm{d}s = k!\ (-\delta_{k,n+1} + n\ \delta_{k,n-1}) \tag{12}$$

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} s^2\mathrm{e}^{-s^2/2}H_n(s)H_k(s)\mathrm{d}s = k!\ [\ \delta_{k,n+2} + (2n{+}1)\delta_{k,n} + n(n{-}1)\delta_{k,n-2}\ ] \tag{13}$$

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\left(2\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\right)^2\mathrm{e}^{-s^2/2}H_n(s)H_k(s)\mathrm{d}s = k!\ [\ \delta_{k,n+2} - (2n{+}1)\delta_{k,n} + n(n{-}1)\delta_{k,n-2}\ ] \tag{14}$$

が得られる。

（コヒーレント状態）　ここで，すべての n についての重ね合わせの状態

$$\Psi_\alpha(s) = \mathrm{e}^{-|\alpha|^2/2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}}\ \psi_n(s), \quad \int_{-\infty}^{\infty} |\Psi_\alpha(s)|^2\ \mathrm{d}s = 1 \tag{15}$$

を導入する。定数 α は任意の複素数でよい。これは量子光学の分野でコヒーレント状態と呼ばれる状態である。エネルギー固有値 (2) より，時間に依存する波動関数は

$$\Psi_\alpha(s,t) = \frac{1}{(\sqrt{2\pi})^{1/2}} \exp\left(-\frac{|\alpha|^2}{2} - \frac{s^2}{4} - \frac{i\omega t}{2}\right) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^n \mathrm{e}^{-in\omega t}}{n!} H_n(s) \tag{16}$$

となる。積分公式を用いれば，s の期待値を直接計算することができるが，この時間に依存する波動関数がどのような形になるかを見ておく方が教訓的である。この式の級数の部分は，幸運にもエルミート多項式の母関数表示の公式

$$\exp\left(zs - \frac{z^2}{2}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}\ H_n(s), \quad z = \alpha \mathrm{e}^{-i\omega t} \tag{17}$$

そのものになっており，この重ね合わせの波動関数を**波束**の形

$$\begin{aligned}
\Psi_\alpha(s,t) &= \frac{1}{(\sqrt{2\pi})^{1/2}} \exp\left[-\frac{|\alpha|^2}{2} - \frac{i\omega t}{2} + \frac{z^2}{2}\right] \exp\left[-\frac{1}{4}(s-2z)^2\right] \\
&= \frac{1}{(\sqrt{2\pi})^{1/2}} \exp\left[-\frac{1}{4}\left(s - 2|\alpha|\cos(\omega t - \phi)\ \right)^2 - i(\text{虚数部})\right]
\end{aligned} \tag{18}$$

$$\text{虚数部} = \frac{\omega t}{2} + s|\alpha|\sin(\omega t - \phi) - \frac{|\alpha|^2}{2}\sin 2(\omega t - \phi) \tag{19}$$

$$|\Psi_\alpha(s,t)|^2 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{1}{2}\left(s - 2|\alpha|\cos(\omega t - \phi)\ \right)^2\right] \tag{20}$$

と，ガウス分布形にまとめることができる。ただし，$\alpha = |\alpha|\mathrm{e}^{i\phi}$ とおいた。したがって，時間に依存する座標 s および運動量 $p = (2/i)(\mathrm{d}/\mathrm{d}s)$ の期待値は

$$\begin{aligned}
\langle s \rangle_t &= \int_{-\infty}^{\infty} s\ |\Psi_\alpha(s,t)|^2\ \mathrm{d}s = 2|\alpha|\cos(\omega t - \phi) \\
&= 2A\cos\omega t + 2B\sin\omega t
\end{aligned} \tag{21}$$

$$\begin{aligned}
\langle p \rangle_t &= \int \Psi_\alpha^*(s,t)\left(\frac{2}{i}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\right)\Psi_\alpha(s,t)\ \mathrm{d}s = -2|\alpha|\sin(\omega t - \phi) \\
&= -2A\sin\omega t + 2B\cos\omega t = \frac{1}{\omega}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\langle s \rangle_t
\end{aligned} \tag{22}$$

となり，期待値が単振動することがわかる。ここでは，$\alpha = A + iB$（A, B は実数）である。

（揺らぎ）　すでに用いたように座標変数 s に対応する運動量は

$$p = \frac{2}{i}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\ , \quad [p, s] = -2i \tag{23}$$

であり，$\hbar = 2$ の交換関係が成り立っている。座標 s の揺らぎは直接，ガウス分布 (20) により

$$(\Delta s)^2 = \langle (s - 2|\alpha|\cos(\omega t - \phi))^2 \rangle_t = \langle s^2 \rangle_t - \langle s \rangle_t^2 = 1 \tag{24}$$

であることがわかる。運動量の揺らぎは漸化公式にもどって $\langle p^2\rangle_t$ から計算する方が楽で

$$\langle p^2\rangle_t = (-2|\alpha|\sin(\omega t-\phi))^2+1\ ,\quad (\Delta p)^2 = \langle p^2\rangle_t - {\langle p\rangle_t}^2 = 1 \tag{25}$$

となり，Δs とあわせて $\hbar=2$ に対する不確定性関係の下限を満たしていることがわかる。揺らぎは等方的だから，振幅が大きいとき位相の揺らぎは $\Delta\theta = 1/2|\alpha|$ となる。エネルギーの期待値は以下で与えられる：

$$\langle E\rangle_t = \frac{1}{4}\langle s^2\rangle_t + \frac{1}{4}\langle p^2\rangle_t = |\alpha|^2+\frac{1}{2} \tag{26}$$

ここで位相が逆の２つのコヒーレント状態の重ね合わせ，すなわち**偶数次**の固有関数だけの重ね合わせ，

$$\frac{1}{\sqrt{2}}(\Psi_\alpha+\Psi_{-\alpha}) = \sqrt{2}\ \frac{\mathrm{e}^{-|\alpha|^2/2-s^2/4-i\omega t/2}}{(\sqrt{2\pi})^{1/2}}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\alpha^{2n}\mathrm{e}^{-2in\omega t}}{(2n)!}\ H_{2n}(s) \tag{27}$$

を考えてみよう。２つの波動関数は重なりをもち直交していないから，まだ規格化されていない。公式 (11) を用いれば

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{2}\ |\Psi_\alpha+\Psi_{-\alpha}|^2\ \mathrm{d}s = 2\mathrm{e}^{-|\alpha|^2}\cosh|\alpha|^2 = 1+\mathrm{e}^{-2|\alpha|^2} \tag{28}$$

$$\langle s\rangle_t = \frac{1}{1+\mathrm{e}^{-2|\alpha|^2}}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{s}{2}\ |\Psi_\alpha+\Psi_{-\alpha}|^2\ ds = 0 \tag{29}$$

となる。（最初の式の $\cosh|\alpha|^2$ は $\cosh^2|\alpha|$ ではないことに注意。）

振幅が十分大きいときには，２つの部分の重なり積分（$=\mathrm{e}^{-2|\alpha|^2}$）はほとんど 0 であり，ほぼ直交していると見なしてよい。すなわち，この波動関数は逆位相で振動する２つの波束をもち，期待値としての振動はキャンセルするが，(11) を用いて 2 乗平均を求めると

$$\langle s^2\rangle_t = (\ 2|\alpha|\cos(\omega t-\phi)\ )^2+1-\frac{4|\alpha|^2\mathrm{e}^{-2|\alpha|^2}}{1+\mathrm{e}^{-2|\alpha|^2}} \tag{30}$$

となる。第 2 項は (20) からわかるように各波束の幅（揺らぎ）であり，第 3 項（最大値=0.5569...）は２つの波動関数の重なりからくる部分である。同様にして

$$\langle p\rangle_t = 0\ ,\quad \langle p^2\rangle_t = (\ -2|\alpha|\sin(\omega t-\phi)\ )^2+1-\frac{4|\alpha|^2\mathrm{e}^{-2|\alpha|^2}}{1+\mathrm{e}^{-2|\alpha|^2}} \tag{31}$$

となる。なお，**奇数次**の固有状態の重ね合わせ

$$\frac{1}{\sqrt{2}}(\Psi_\alpha-\Psi_{-\alpha}) = \sqrt{2}\ \frac{\mathrm{e}^{-|\alpha|^2/2-s^2/4-i\omega t/2}}{(\sqrt{2\pi})^{1/2}}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\alpha^{2n+1}\mathrm{e}^{-i(2n+1)\omega t}}{(2n+1)!}\ H_{2n+1}(s) \tag{32}$$

にすれば sin 波が得られるように思えるが，結果はほとんど同じである：

$$\langle s^2\rangle_t = (\ 2|\alpha|\cos(\omega t-\phi)\ )^2+1+\frac{4|\alpha|^2\mathrm{e}^{-2|\alpha|^2}}{1-\mathrm{e}^{-2|\alpha|^2}} \tag{33}$$

ただし，$|\alpha|\to 0$ で最後の項は有限になり，2（光子数 1) を与えている。

確率分布（複号±は，＋が偶数次，－が奇数次）は規格化定数は別として

$$\frac{1}{2}|\Psi_\alpha|^2+\frac{1}{2}|\Psi_{-\alpha}|^2 \pm \frac{1}{2}(\Psi_\alpha^*\Psi_{-\alpha}+\Psi_{-\alpha}^*\Psi_\alpha) \tag{34}$$

であるが，重なり部分は $s=0$ でピークをもつ偶関数

$$\frac{1}{2}\left(\Psi_\alpha^*\Psi_{-\alpha}+\Psi_{-\alpha}^*\Psi_\alpha\right)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\left[-\frac{1}{2}s^2-|\alpha|^2\cos^2(\omega t-\phi)\right]\cos(2s|\alpha|\sin(\omega t-\phi)) \tag{35}$$

になり，積分すれば先ほどの $\mathrm{e}^{-2|\alpha|^2}$ を与える。全体として $s=0$ 付近の確率は奇数次波では負符号のため抑えられる。（$s=0$ でキャンセルして 0 になるが，確率だから負になることはない。）

sin 波は，α の位相を $\pi/2$ ずらせて重ね合わせを

$$\frac{1}{\sqrt{2}}(\Psi_{i\alpha}+\Psi_{-i\alpha})=\sqrt{2}\ \frac{\mathrm{e}^{-|\alpha|^2/2-s^2/4-i\omega t/2}}{(\sqrt{2\pi})^{1/2}}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-\alpha^2)^n\mathrm{e}^{-2in\omega t}}{(2n)!}\ H_{2n}(s) \tag{36}$$

とすれば，$i\alpha=|\alpha|\mathrm{e}^{i(\phi+\pi/2)}$，すなわち $|\alpha|$ はそのままで $\phi\to\phi+\pi/2$ とすればよいから，

$$\langle s^2\rangle_t=(\ 2|\alpha|\sin(\omega t-\phi)\ )^2+1-\frac{4|\alpha|^2\mathrm{e}^{-2|\alpha|^2}}{1+\mathrm{e}^{-2|\alpha|^2}} \tag{37}$$

が得られる。

以上の状態は，振幅の期待値は 0 であっても揺らぎが大きいから古典的な意味で振幅が 0 なのではない。零点振動ではないエネルギー（電磁波では光子数）をちゃんともっている。コヒーレント状態が古典的極限で単振動を与えるのに対して，**量子力学固有の重ね合わせの状態**である。

（生成消滅演算子）　漸化公式を組み合わせることにより，以下の関係式が得られる：

$$\left(\frac{s}{2}+\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\right)\mathrm{e}^{-s^2/4}H_n(s)\ =\ n\mathrm{e}^{-s^2/4}H_{n-1}(s) \tag{38}$$

$$\left(\frac{s}{2}-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\right)\mathrm{e}^{-s^2/4}H_n(s)\ =\ \mathrm{e}^{-s^2/4}H_{n+1}(s) \tag{39}$$

これは，$\psi_n=\mathrm{e}^{-s^2/4}H_n(s)/\sqrt{n!}$ として

$$\hat{a}\ \psi_n=\sqrt{n}\ \psi_{n-1}\ ,\quad \hat{a}\ \psi_0=0\ ,\quad \hat{a}^\dagger\ \psi_n=\sqrt{n+1}\ \psi_{n+1} \tag{40}$$

と書くことができる。ここで $\hat{a}$ と $\hat{a}^\dagger$ は以下で定義される**消滅・ 生成演算子**である：

$$\frac{s}{2}+\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}=\hat{a},\quad \frac{s}{2}-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}=\hat{a}^\dagger \tag{41}$$

コヒーレント状態 Ψ_α は

$$\hat{a}\Psi_\alpha=\alpha\Psi_\alpha \tag{42}$$

をみたしており,（エルミートでない）消滅演算子 $\hat{a}$ の固有状態であることがわかる。

この演算子の対は以下の諸式を満たしている：

$$\hat{a}^\dagger\hat{a}\ \psi_n=n\ \psi_n\ ,\quad [\hat{a},\hat{a}^\dagger]=[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s},s]=1 \tag{43}$$

$$H=\hbar\omega\left(-\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}s^2}+\frac{s^2}{4}\right)=\hbar\omega\left(\hat{a}^\dagger\hat{a}+\frac{1}{2}\right) \tag{44}$$

演算子 $\hat{a}^\dagger\hat{a}$ はエルミートで固有値が n となり，場の量子論では**粒子数演算子**と呼ばれている。時間発展を含んだ演算子は，ハイゼンベルグ方程式から以下が得られる：

$$\hat{a}_t=\hat{a}\mathrm{e}^{-i\omega t}\ ,\quad \hat{a}_t^\dagger=\hat{a}^\dagger\mathrm{e}^{i\omega t} \tag{45}$$

（粒子数表示）　固有状態を $\boldsymbol{n}$ **粒子状態**と呼び，ケットベクトル $|n\rangle$ で表す。生成消滅演算子は

$$\hat{a}|n\rangle = \sqrt{n}\ |n-1\rangle, \quad \hat{a}^\dagger|n\rangle = \sqrt{n+1}\ |n+1\rangle \tag{46}$$

を満たす。コヒーレント状態は

$$|\alpha\rangle = \mathrm{e}^{-|\alpha|^2/2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}}\ |n\rangle \tag{47}$$

で与えられ，粒子数は確率

$$P_n = \mathrm{e}^{-|\alpha|^2}\frac{|\alpha|^{2n}}{n!} \qquad \text{（ポアソン分布）} \tag{48}$$

に従う。期待値と標準偏差は

$$\langle n\rangle = |\alpha|^2, \quad \langle n^2\rangle = |\alpha|^4 + |\alpha|^2, \quad \Delta n = \sqrt{\langle (n-\langle n\rangle)^2\rangle} = |\alpha| \tag{49}$$

となり，粒子数の揺らぎは振幅が大きいと相対的に無視できるようになる。なお位相の揺らぎは前に見たように振幅の揺らぎが $\Delta s = \Delta p = 1$ と等方的であるから，振幅が大きいときは波束の半径から $2|\alpha|\Delta\theta \simeq 1$，したがって

$$\Delta n \Delta\theta = \frac{1}{2} \tag{50}$$

を満たす。位相演算子の定義が難しく，振幅が小さいときはこうはいかない。

ここで，**Displacement 演算子**（ユニタリ）

$$D(\alpha) = \mathrm{e}^{\alpha\hat{a}^\dagger - \alpha^*\hat{a}} \tag{51}$$

を導入する。公式

$$\mathrm{e}^{A+B} = \mathrm{e}^A\mathrm{e}^B\mathrm{e}^{-[A,B]/2} \tag{52}$$

を用いれば

$$D(\alpha) = \mathrm{e}^{-|\alpha|^2/2}\mathrm{e}^{\alpha\hat{a}^\dagger}\mathrm{e}^{-\alpha^*\hat{a}} \tag{53}$$

と書ける。コヒーレント状態は

$$|\alpha\rangle = D(\alpha)|0\rangle = \mathrm{e}^{-|\alpha|^2/2}\mathrm{e}^{\alpha\hat{a}^\dagger}|0\rangle \tag{54}$$

で生成され，消滅演算子 $\hat{a}$ の固有状態である：

$$\hat{a}|\alpha\rangle = \alpha|\alpha\rangle \tag{55}$$

交換関係 $[\hat{a}, \hat{a}^\dagger] = 1$ を繰り返し使えば，以下の性質（displacement）が示される：

$$D^\dagger(\alpha)\hat{a}D(\alpha) = \hat{a} + \alpha, \quad D^\dagger(\alpha)\hat{a}^\dagger D(\alpha) = \hat{a}^\dagger + \alpha^* \tag{56}$$

これらを用いると，コヒーレント状態 $|\alpha\rangle$ における期待値

$$\langle\hat{a}\rangle = \alpha,\ \langle\hat{a}^\dagger\rangle = \alpha^*,\ \langle\hat{a}^2\rangle = \alpha^2,\ \langle(\hat{a}^\dagger)^2\rangle = \alpha^{*2},\ \langle\hat{a}^\dagger\hat{a}\rangle = |\alpha|^2,\ \langle\hat{a}\hat{a}^\dagger\rangle = |\alpha|^2 + 1 \tag{57}$$

などが得られる。最後の式の右辺の 1 は交換関係から生じるもので，零点振動に対応する。$|\alpha\rangle$ は $\hat{a}^\dagger$ の固有状態ではないが，ブラベクトルに対しては

$$\langle\alpha|\hat{a}^\dagger = \langle\alpha|\alpha^* \tag{58}$$

であるから，演算子が **Normal Order** に並んでおれば以下のように置いてよい：

$$\langle (\hat{a}^\dagger)^m \hat{a}^n \rangle = (\alpha^*)^m \alpha^n \tag{59}$$

さらに，時間を含んだ期待値は

$$\langle \hat{a}_t \rangle = \alpha \mathrm{e}^{-i\omega t}\ ,\quad \langle \hat{a}_t^\dagger \rangle = \alpha^* \mathrm{e}^{i\omega t} \tag{60}$$

より

$$\langle s \rangle_t = \alpha \mathrm{e}^{-i\omega t} + \alpha^* \mathrm{e}^{i\omega t} = 2A\cos\omega t + 2B\sin\omega t \tag{61}$$

$$\langle p \rangle_t = -i(\alpha \mathrm{e}^{-i\omega t} - \alpha^* \mathrm{e}^{i\omega t}) = -2A\sin\omega t + 2B\cos\omega t \tag{62}$$

とすでに得られている結果になる。

（スクイーズド状態）　さらに，**Squeezing 演算子**（ユニタリ）

$$S(\zeta) = \mathrm{e}^{(\zeta^* \hat{a}^2 - \zeta(\hat{a}^\dagger)^2)/2},\ \zeta = r\mathrm{e}^{i\theta},\quad S^\dagger(\zeta) = S(-\zeta) \tag{63}$$

を導入する。ここで，$A = (\zeta^* \hat{a}^2 - \zeta(\hat{a}^\dagger)^2)/2$ として，交換関係

$$[A, \hat{a}] = \zeta \hat{a}^\dagger,\quad [A, \hat{a}^\dagger] = \zeta^* \hat{a} \tag{64}$$

と公式

$$\mathrm{e}^A B \mathrm{e}^{-A} = B + [A, B] + \frac{1}{2!}[A, [A, B]] + \frac{1}{3!}[A, [A, [A, B]]] + \cdots \tag{65}$$

により，ボゴリューボフ変換　　**注．**論文によっては $S(-\zeta) = S^\dagger(\zeta)$ を使っている場合もある。）

$$\hat{b} \ = \ S(\zeta)\hat{a}S^\dagger(\zeta) \ = \hat{a}\cosh r + \hat{a}^\dagger \mathrm{e}^{i\theta}\sinh r \tag{66}$$

$$\hat{b}^\dagger \ = \ S(\zeta)\hat{a}^\dagger S^\dagger(\zeta) = \hat{a}^\dagger \cosh r + \hat{a}\mathrm{e}^{-i\theta}\sinh r \tag{67}$$

あるいはその逆変換,

$$\hat{a} = \hat{b}\cosh r - \hat{b}^\dagger \mathrm{e}^{i\theta}\sinh r\ ,\quad \hat{a}^\dagger = \hat{b}^\dagger \cosh r - \hat{b}\mathrm{e}^{-i\theta}\sinh r \tag{68}$$

が得られる。新たな演算子 $\hat{b}$，$\hat{b}^\dagger$ も交換関係 $[\hat{b}, \hat{b}^\dagger] = [\hat{a}, \hat{a}^\dagger] = 1$ を満たしている。

ここで，**スクイーズド状態**を

$$|\alpha; \zeta\rangle = D(\alpha)S(\zeta)|0\rangle \tag{69}$$

で定義する。スクイーズされた基底状態，$|0; \zeta\rangle = S(\zeta)|0\rangle$ は

$$\hat{b}|0; \zeta\rangle = \hat{b}S(\zeta)|0\rangle = S(\zeta)\hat{a}|0\rangle = 0 \tag{70}$$

を満たす新たな「真空」（**S 真空**）であり，以後 $|0\rangle\!\rangle$ と書く。同様に **B 表示**での n 粒子状態を

$$|n\rangle\!\rangle = |n; \zeta\rangle = S(\zeta)|n\rangle \tag{71}$$

とすれば，演算子 $\hat{b}^\dagger$ は生成演算子の性質

$$(\hat{b}^\dagger)^n |0\rangle\!\rangle = S(\zeta)(\hat{a}^\dagger)^n|0\rangle = S(\zeta)\sqrt{n!}\ |n\rangle = \sqrt{n!}\ |n\rangle\!\rangle \tag{72}$$

を備えている。これ以後は，$\zeta = \mathrm{real}$，すなわち $\theta = 0$ の場合だけを議論する。（Re $z < 0$ のときは，$r < 0,\ \theta = 0$）また $\hat{b}$，$\hat{b}^\dagger$ 演算子で書かれた B 表示演算子は $'$ をつけて区別する（以下同様)。

（いろいろな解釈）　論文によって書き方が異なっている。ここで

$$S^\dagger(r)\hat{a}S(r) = S(-r)\hat{a}S^\dagger(-r) = \hat{a}\cosh r - \hat{a}^\dagger \sinh r \tag{73}$$

$$S^\dagger(r)\hat{a}^\dagger S(r) = S(-r)\hat{a}S^\dagger(-r) = \hat{a}^\dagger \cosh r - \hat{a}\sinh r \tag{74}$$

より

$$S^\dagger(r)(\alpha\hat{a}^\dagger - \alpha^*\hat{a})S(r) = \beta\hat{a}^\dagger - \beta^*\hat{a} \tag{75}$$

ただし，

$$\beta = \alpha\cosh r + \alpha^*\sinh r = A\mathrm{e}^r + iB\mathrm{e}^{-r}\ , \quad \alpha = A + iB \tag{76}$$

と書くことができる。したがって

$$S^\dagger(r)D(\alpha)S(r) = D(\beta) \tag{77}$$

であるから，スクイーズド状態は

$$|\alpha; r\rangle = S(r)D(\beta)|0\rangle = S(r)|\beta\rangle \tag{78}$$

となり,『コヒーレント状態 $|\beta\rangle$ をスクイーズする』と見ることもできる。

あるいは，関係式 (77) を書き換えて

$$D(\alpha) = S(r)D(\beta)S^\dagger(r) = D'(\beta)\ \left(= \mathrm{e}^{\beta\hat{b}^\dagger - \beta^*\hat{b}}\right) \tag{79}$$

とすれば，スクイーズド状態は以下のように書くこともできる：

$$|\alpha; r\rangle = D'(\beta)S(r)|0\rangle = |\beta\rangle\!\rangle \tag{80}$$

すなわち『B 表示でのコヒーレント状態』（消滅演算子 $\hat{b}$ の固有状態）である。変換式 (68) より

$$\hat{a} + \hat{a}^\dagger = \mathrm{e}^{-r}(\hat{b} + \hat{b}^\dagger)\ , \quad \hat{a} - \hat{a}^\dagger = \mathrm{e}^{r}(\hat{b} - \hat{b}^\dagger) \tag{81}$$

となるから，$|\beta\rangle\!\rangle$ を使って期待値の計算をするのが最も楽である。（**注。**すでに $\theta = 0$ としている。）

なお，以下のトリビアルな関係もある：

$$S(\zeta) = S(\zeta)S(\zeta)S^\dagger(\zeta) = S'(\zeta)\ \left(= \mathrm{e}^{(\zeta^*\hat{b}^2 - \zeta(\hat{b}^\dagger)^2)/2}\right) \tag{82}$$

（期待値）　これ以後は，スクイーズド状態での期待値を単に $\langle\cdots\rangle$ と書く。まず,

$$\langle \hat{a} + \hat{a}^\dagger\rangle = \mathrm{e}^{-r}\langle\!\langle\beta|\hat{b} + \hat{b}^\dagger|\beta\rangle\!\rangle = \mathrm{e}^{-r}(\beta + \beta^*) = \alpha + \alpha^* = 2A \tag{83}$$

$$\langle \hat{a} - \hat{a}^\dagger\rangle = \mathrm{e}^{r}\langle\!\langle\beta|\hat{b} - \hat{b}^\dagger|\beta\rangle\!\rangle = \mathrm{e}^{r}(\beta - \beta^*) = \alpha - \alpha^* = 2iB \tag{84}$$

したがって

$$\langle s\rangle = 2A\ , \quad \langle p\rangle = \langle -i(\hat{a} - \hat{a}^\dagger)\rangle = 2B \tag{85}$$

同様にして

$$\langle(\hat{a} + \hat{a}^\dagger)^2\rangle = \mathrm{e}^{-2r}((\beta + \beta^*)^2 + 1) = 4A^2 + \mathrm{e}^{-2r} \tag{86}$$

$$\langle(\hat{a} - \hat{a}^\dagger)^2\rangle = \mathrm{e}^{2r}((\beta - \beta^*)^2 - 1) = -4B^2 - \mathrm{e}^{2r} \tag{87}$$

したがって

$$\Delta s = \mathrm{e}^{-r}\ ,\quad \Delta p = \mathrm{e}^{r}\ ,\quad \Delta s \Delta p = 1 \tag{88}$$

となる。揺らぎは不確定性原理の下限を満たしつつ，r の正負に応じてどちらかの方向に**絞りこまれた**形になっている。$|r| \gg 1$ の場合は，いずれかの量子的揺らぎがマクロになり，振動の振幅がいかに大きくても古典的極限は存在しない量子力学特有の状態となる。**縮小率**

$$\sigma = \frac{\Delta s}{\Delta p} = \mathrm{e}^{-2r} \tag{89}$$

の常用対数（の 10 倍）をデシベル単位（db）で表した

$$d = 10 \log_{10} \sigma,\ r = -\frac{d}{20} \log_{10} \mathrm{e} = -0.11513\ d \tag{90}$$

を用いて,「d db のスクイーズド状態」という言い方をする。

さらに粒子数 $\hat{a}^\dagger \hat{a}$ の期待値を求めるには以下の関係を使えばよい：

$$(\hat{a} + \hat{a}^\dagger)^2 - (\hat{a} - \hat{a}^\dagger)^2 = 4\hat{a}^\dagger \hat{a} + 2 \qquad (\hat{a}\hat{a}^\dagger = \hat{a}^\dagger \hat{a} + 1) \tag{91}$$

（時間に依存する期待値）　**粒子数**の期待値は，$\hat{a}_t = \hat{a}\mathrm{e}^{-i\omega t}$, $\hat{a}_t^\dagger = \hat{a}^\dagger \mathrm{e}^{i\omega t}$ により時間に依存せず

$$\langle \hat{a}_t^\dagger \hat{a}_t \rangle = \langle \hat{a}^\dagger \hat{a} \rangle = |\alpha|^2 + \sinh^2 r \tag{92}$$

となる。$\alpha = 0$ でも残る第 2 項は，S 真空のもつ粒子数（エネルギー）である。

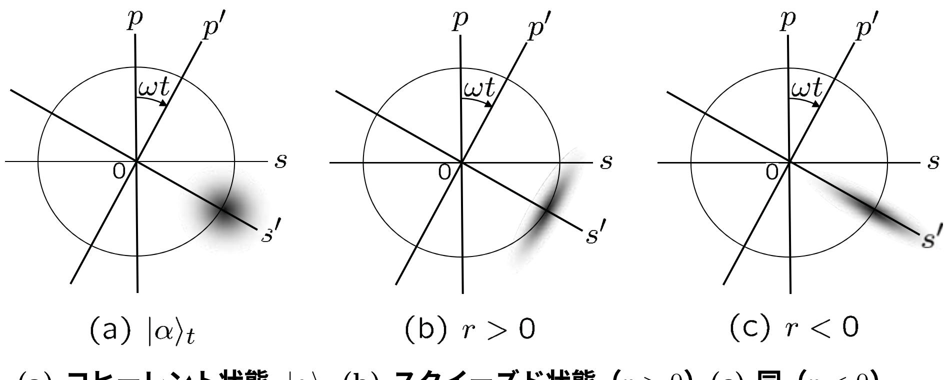
ハイゼンベルグ表示では，s_t と p_t は

$$s_t = \hat{a}\mathrm{e}^{-i\omega t} + \hat{a}^\dagger \mathrm{e}^{i\omega t} = \frac{1}{2}(s + ip)\mathrm{e}^{-i\omega t} + \frac{1}{2}(s - ip)\mathrm{e}^{i\omega t} = s \cos \omega t + p \sin \omega t \tag{93}$$

同様に

$$p_t = -s \sin \omega t + p \cos \omega t \tag{94}$$

となり，物理量として時計回りの回転変換を受けるだけである。（**注．**位相平面の「座標軸」としては逆回りの回転系である。）したがって揺らぎも回転系において初期の性質が維持され，図のようにふるまう。下の図は波束が時計回りに回転する「時間を含むシュレーディンガ表示」で表してあるが，反時計回りにまわる「ハイゼンベルグ座標系」から，静止した「時間を含まないシュレーディンガ表示」を見た図と見なすこともできる。



(a) コヒーレント状態 $|\alpha\rangle_t$ **(b) スクイーズド状態（$r > 0$）(c) 同（$r < 0$）**

図で分かるように，$r > 0$ のスクイーズド状態では振幅が，$r < 0$ では位相が絞られる。

※　時間変化は以上で十分であるが，先に挙げたいろいろな方法で直接，時間変化を計算しようとする際には，ハイゼンベルグ表示 $\hat{a}_t = \mathrm{e}^{-itH/\hbar}\hat{a}\mathrm{e}^{itH/\hbar} = \hat{a}\mathrm{e}^{-i\omega t}$，$\hat{a}_t^\dagger = \mathrm{e}^{-itH/\hbar}\hat{a}^\dagger\mathrm{e}^{itH/\hbar} = \hat{a}^\dagger\mathrm{e}^{i\omega t}$ を用いて，以下のようにすれば間違いは起きない：

$$S(\zeta)\hat{a}_t S^\dagger(\zeta) = (S(\zeta)\hat{a}S^\dagger(\zeta))\mathrm{e}^{-i\omega t} = (\hat{a}\cosh r + \hat{a}^\dagger\sinh r)\mathrm{e}^{-i\omega t} \tag{95}$$

（S 真空）　S 真空は，$\hat{b} = \hat{a}\cosh r + \hat{a}^\dagger\mathrm{e}^{i\theta}\sinh r$ として $\hat{b}|0\rangle\!\rangle = 0$ を満たさなければならない。

$$|0\rangle\!\rangle = |0;\zeta\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} Z_n|n\rangle \qquad (\zeta = r\mathrm{e}^{i\theta}) \tag{96}$$

と置いて係数を求める。

$$\hat{a}|0\rangle\!\rangle = \sum_{n=1}^{\infty} Z_n\sqrt{n}\;|n-1\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} Z_{n+1}\sqrt{n+1}\;|n\rangle \tag{97}$$

$$\hat{a}^\dagger|0\rangle\!\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} Z_n\sqrt{n+1}\;|n+1\rangle = \sum_{n=1}^{\infty} Z_{n-1}\sqrt{n}\;|n\rangle \tag{98}$$

より

$$Z_1 = 0\ ,\quad Z_n = -\sqrt{\frac{n-1}{n}}\mathrm{e}^{i\theta}\tanh r\ Z_{n-2}\quad (n \geq 2) \tag{99}$$

以上により，$(2n)! = (2n)!!(2n-1)!! = 2^n n!(2n-1)!!$ を用いて

$$|0\rangle\!\rangle = Z_0\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\mathrm{e}^{i\theta}\tanh r\right)^n\frac{\sqrt{(2n)!}}{2^n n!}|2n\rangle = Z_0\exp\left(-\frac{\mathrm{e}^{i\theta}\tanh r}{2}(\hat{a}^\dagger)^2\right)|0\rangle \tag{100}$$

が得られる。規格化係数 Z_0 は以下の級数展開公式により決まる：

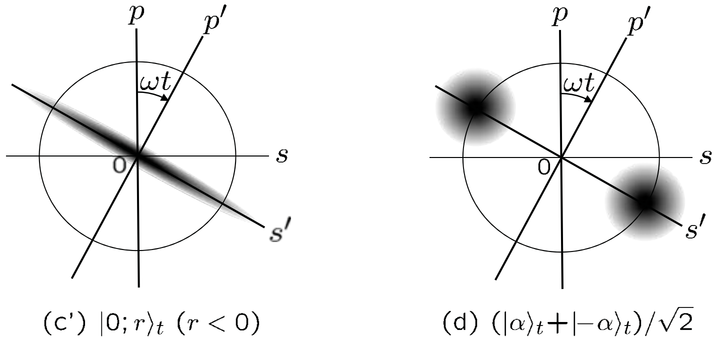
$$\sum_{n=0}^{\infty}(\tanh^2 r)^n\frac{(2n)!}{(2^n n!)^2} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(2n-1)!!}{2^n n!}(\tanh^2 r)^n = (1-\tanh^2 r)^{-1/2} = \cosh r \tag{101}$$

S 真空での粒子数の期待値は

$$\langle\!\langle 0|\hat{a}^\dagger\hat{a}|0\rangle\!\rangle = \frac{1}{\cosh r}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(2n)!}{(2^n n!)^2}(2n)\tanh^{2n} r = \sinh^2 r \tag{102}$$

となり，すでに求めた結果と合致する。

このように S 真空は**偶数個**の粒子数固有状態だけの重ね合わせで表される。その意味では 2 つのコヒーレント状態の重ね合わせの状態 $(|\alpha\rangle+|-\alpha\rangle)/\sqrt{2}$ と似ている。あるいは，スクイーズド状態から粒子（光子）を 1 つ取り去ることで，反対称状態 $(|\alpha\rangle-|-\alpha\rangle)/\sqrt{2}$ と似た状態を作ることもできる。揺らぎの意味でも，下の図のように，(c') と (d) では s' 方向に引き延ばされているという点で共通性がある。



(c') $|0;r\rangle_t$ $(r<0)$　　(d) $(|\alpha\rangle_t+|-\alpha\rangle_t)/\sqrt{2}$

(コヒーレント状態表現と Normal Order)　コヒーレント状態 $\{|\alpha\rangle\}$ は，重なりが

$$\langle\alpha_1|\alpha_2\rangle = \mathrm{e}^{-|\alpha_1|^2/2}\mathrm{e}^{-|\alpha_2|^2/2}\langle 0|\mathrm{e}^{\alpha_1^*\hat{a}}\mathrm{e}^{\alpha_2\hat{a}^\dagger}|0\rangle = \mathrm{e}^{-|\alpha_1|^2/2-|\alpha_2|^2/2+\alpha_1^*\alpha_2} \tag{103}$$

となるため規格直交系にはならない。しかし，コヒーレント状態 $|\alpha\rangle$ が $\hat{a}$ の固有状態であって

$$\langle\alpha_1|(\hat{a}^\dagger)^m\hat{a}^n|\alpha_2\rangle = (\alpha_1^*)^m\alpha_2^n\ \langle\alpha_1|\alpha_2\rangle \tag{104}$$

となることから，$F(\hat{a}^\dagger,\hat{a})$ の行列成分が

$$\frac{\langle\alpha_1|F(\hat{a}^\dagger,\hat{a})|\alpha_2\rangle}{\langle\alpha_1|\alpha_2\rangle} = \sum_{m,n} C_{mn}\ (\alpha_1^*)^m\alpha_2^n \tag{105}$$

の形に書ければ，$F(\hat{a}^\dagger,\hat{a})$ の Normal Order 展開が以下のように得られる：

$$F(\hat{a}^\dagger,\hat{a}) = \sum_{m,n} C_{mn}(\hat{a}^\dagger)^m\hat{a}^n \quad \text{or} \quad \langle m|F(\hat{a}^\dagger,\hat{a})|n\rangle = \sqrt{m!n!}\ C_{mn} \tag{106}$$

(例) これを使って，Squeezing 演算子の Normal Order 表示を求めることができる。

$$\langle\alpha_1|S(\zeta)|\alpha_2\rangle = \mathrm{e}^{-(|\alpha_1|^2+|\alpha_2|^2)/2}\langle 0|\mathrm{e}^{\alpha_1^*\hat{a}}S(\zeta)\mathrm{e}^{\alpha_2\hat{a}^\dagger}|0\rangle \tag{107}$$

$$\text{右辺}\ \langle\cdots\rangle = \langle 0|\exp(\alpha_1^*\hat{a})\exp[\alpha_2(\hat{a}^\dagger\cosh r + \hat{a}\mathrm{e}^{-i\theta}\sinh r)]\ S(\zeta)|0\rangle \tag{108}$$

あとは公式（再掲）

$$\mathrm{e}^{A+B} = \mathrm{e}^A\mathrm{e}^B\mathrm{e}^{-[A,B]/2}\ ,\ \mathrm{e}^A\mathrm{e}^B = \mathrm{e}^{A+B}\mathrm{e}^{[A,B]/2} \tag{109}$$

を繰り返し利用して $S(\zeta)$ 以外の指数関数部分を Normal Order

$$\mathrm{e}^{\xi\hat{a}^\dagger}\mathrm{e}^{\eta\hat{a}} \tag{110}$$

に書き換えて

$$\langle 0|\mathrm{e}^{\xi\hat{a}^\dagger}\mathrm{e}^{\eta\hat{a}} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{\eta^n}{\sqrt{n!}}\ \langle n| \tag{111}$$

とする。さらに，S 真空，$S(\zeta)|0\rangle = |0\rangle\!\rangle$ の粒子数表示展開 (100) を用いて整理すれば

$$\begin{aligned}\text{右辺}\ \langle\cdots\rangle \quad &= \quad \frac{1}{\sqrt{\cosh r}}\exp\left(-\frac{\mathrm{e}^{i\theta}\tanh r}{2}(\alpha_1^*)^2\right)\exp\left(\frac{1}{\cosh r}\alpha_1^*\alpha_2\right)\\ &\quad \times\exp\left(\frac{\mathrm{e}^{-i\theta}\tanh r}{2}{\alpha_2}^2\right)\end{aligned} \tag{112}$$

となる。$\mathrm{e}^{\alpha_1^*\alpha_2}$ 因子を１つ頭に出してから演算子に置き換えて

$$\begin{aligned}S(\zeta) \quad &= \quad \frac{1}{\sqrt{\cosh r}}\exp\left(-\frac{\mathrm{e}^{i\theta}\tanh r}{2}(\hat{a}^\dagger)^2\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\mathrm{sech}\ r-1)^n}{n!}(\hat{a}^\dagger)^n\hat{a}^n\right)\\ &\quad \times\exp\left(\frac{\mathrm{e}^{-i\theta}\tanh r}{2}\hat{a}^2\right)\end{aligned} \tag{113}$$

が得られる。真ん中の指数関数は，展開してから演算子に置き換えないと，Normal Oeder にならない。この表示はもちろん，$S^\dagger(\zeta) = S(-\zeta)$ を満たしている。

（位相演算子）　古典力学的には$\mathrm{d}\phi/\mathrm{d}t=\omega$であることから，ハミルトニアンを$H=\hat{n}\hbar\omega$ $(\hat{n}=\hat{a}^\dagger\hat{a})$として，対応原理により位相演算子は交換関係

$$[\hat{n},\hat{\phi}]=-i \tag{114}$$

を満たすと考えられる。もしそうであれば，位相と粒子数の間には不確定性関係

$$\Delta n\Delta\phi\geq\frac{1}{2} \tag{115}$$

が成り立つ（Dirac）。実はこの考えでは位相演算子 $\hat{\phi}$ はエルミートにはなり得ないことが示される。すなわち $U=\mathrm{e}^{-i\hat{\phi}}$ とするとき，U はユニタリではない：　生成消滅演算子を

$$\hat{a}^\dagger=U^\dagger(\hat{n}+1)^{1/2}\ ,\quad \hat{a}=(\hat{n}+1)^{1/2}U \tag{116}$$

と分解すると，

$$\hat{a}^\dagger|n\rangle=U^\dagger(\hat{n}+1)^{1/2}|n\rangle=\sqrt{n+1}\ U^\dagger|n\rangle=\sqrt{n+1}\ |n+1\rangle \tag{117}$$

より

$$U^\dagger|n\rangle=|n+1\rangle\quad(n\geq 0) \tag{118}$$

となる。一方，粒子数状態 $\{|m\rangle\}$ の完全性を用いて

$$U|n\rangle=\sum_{m=0}^{\infty}|m\rangle\langle m|U|n\rangle=\sum_{m=0}^{\infty}|m\rangle\langle m+1|n\rangle=\begin{cases}|n-1\rangle & (n\geq 1)\\ 0 & (n=0)\end{cases} \tag{119}$$

となる。したがって

$$UU^\dagger|n\rangle=|n\rangle\quad(n\geq 0)\ ,\quad U^\dagger U|n\rangle=\begin{cases}|n\rangle & (n\geq 1)\\ 0 & (n=0)\end{cases} \tag{120}$$

となり，ユニタリ性 $UU^\dagger=U^\dagger U=1$ を満たさない。原因は粒子数に下限があることである。

これを回避するために以下のように有限個の粒子数状態の部分空間で位相エルミート演算子を導入し，最後に極限をとる方法が使われている。位相を粒子数に共役な物理量と考えて，まず

$$|\phi_m\rangle=\frac{1}{\sqrt{M+1}}\sum_{n=0}^{M}\mathrm{e}^{in\phi_m}|n\rangle \tag{121}$$

で新たな規格直交系 $\{|\phi_m\rangle\}$ を導入する。簡単のため $\phi_0=0$ とする。直交性

$$\langle\phi_m|\phi_0\rangle=\frac{1}{M+1}\sum_{n=0}^{M}\mathrm{e}^{-in\phi_m}=\frac{1}{M+1}\frac{1-\mathrm{e}^{-i(M+1)\phi_m}}{1-\mathrm{e}^{-i\phi_m}}=0 \tag{122}$$

より

$$\phi_m=\frac{2\pi}{M+1}\ m\qquad(m=0,1,2,....,M) \tag{123}$$

である。$M\to\infty$ の極限で $0\sim 2\pi$ 間の連続な位相を与える。

これを用いてスペクトル表示により位相演算子を以下で定義する：

$$\hat{\phi}=\sum_{m=0}^{M}\phi_m\ |\phi_m\rangle\langle\phi_m| \tag{124}$$

この演算子はエルミートで

$$\mathrm{e}^{i\hat{\phi}}\ |n\rangle = \begin{cases} |n-1\rangle & (n \geq 1) \\ |M\rangle & (n=0) \end{cases} \tag{125}$$

の性質をもつ。

（コヒーレント状態での位相のゆらぎ）　$\alpha = |\alpha|\mathrm{e}^{i\phi}$ として，位相の確率振幅は以下で与えられる：

$$|\langle\phi_m|\alpha\rangle|^2 = \frac{\mathrm{e}^{-|\alpha|^2}}{M+1}\sum_{n=0}^{M}\sum_{n'=0}^{M}\frac{|\alpha|^{n+n'}}{\sqrt{n!n'!}}\ \mathrm{e}^{i(n'-n)(\phi_m-\phi)} \tag{126}$$

なお，M が有限である限り

$$\sum_{m=0}^{M}|\langle\phi_m|\alpha\rangle|^2 = \mathrm{e}^{-|\alpha|^2}\sum_{n=0}^{M}\frac{|\alpha|^{2n}}{n!} < 1 \tag{127}$$

であり，$\{|\phi_m\rangle\}$ が完全系ではないことを示している。

$|\alpha|$ が十分大きいが $1 \ll |\alpha| \ll M$ としてよいときは，中心極限定理により

$$\frac{\mathrm{e}^{-|\alpha|^2}|\alpha|^{2n}}{n!} \simeq \frac{1}{\sqrt{2\pi|\alpha|^2}}\exp\left[-\frac{(n-|\alpha|^2)^2}{2|\alpha|^2}\right] \tag{128}$$

と近似すれば，

$$|\langle\phi_m|\alpha\rangle|^2 \simeq \frac{2\pi}{M+1}\sqrt{\frac{2|\alpha|^2}{\pi}}\ \mathrm{e}^{-2|\alpha|^2(\phi_m-\phi)^2} \tag{129}$$

となる。したがって，$\mathrm{d}\phi_m = 2\pi/(M+1)$ として $M \to \infty$ の極限でガウス分布となるから，

$$\langle\phi_m\rangle = \phi\ ,\quad \Delta\phi^2 = \frac{1}{4|\alpha|^2} \tag{130}$$

が得られ，$\Delta n = |\alpha|$ とあわせると

$$\Delta n\Delta\phi = \frac{1}{2} \tag{131}$$

となる。

$|\alpha| \ll 1$ のときは，$|\alpha|$ の一次の範囲で

$$\Delta\phi^2 = \frac{\pi^2}{3} - 4|\alpha| \tag{132}$$

が得られ，不確定性関係は

$$\Delta n\Delta\phi = |\alpha|\sqrt{\frac{\pi^2}{3} - 4|\alpha|} \tag{133}$$

となる。$\alpha = 0$ の場合，すなわち $|n=0\rangle$ の基底状態では $\Delta n = 0$ であるが，位相は無限に広がることはなく，$[-\pi,\pi]$ の有限区間にランダムに分布していて[1]

$$\Delta\phi^2 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\phi^2\mathrm{d}\phi = \frac{\pi^2}{3} \tag{134}$$

となり，揺らぎは有限である。位相の場合，これが最大の不確定状態である。

なお，p.5 ですでに求めたように 2 次元ガウス分布を用いた簡便な計算では，$|\alpha| \gg 1$ では結果は同じであるが，$|\alpha| \ll 1$ では以下となる：

$$\Delta\phi^2 = \frac{\pi^2}{3} - 2\sqrt{2\pi}|\alpha| \tag{135}$$

[1] 位相の期待値 $\langle\phi_m\rangle$ は位相の範囲を $[0,2\pi]$ とするか $[-\pi,\pi]$ とするかで違ってくる。