

## スカラー演算子 $|i\nabla|$ について

光の分散関係が  $\omega = c|k|$  で与えられることから, スカラー量  $|k|$  に対応するスカラー演算子  $|i\nabla|$  が欲しくなる。そういうものを形式的に想定するのは勝手であるが, 実際に演算を明示的に定義することができなければ意味がない。2次元版のスカラー演算子  $|i\nabla^{(2)}|$  は, 2相分離の動的過程の問題 (拡散方程式に対する Stefan 問題 —— 境界が動的に変化する境界値問題) で導入されたもので, Laplace 方程式に対して静電気学でよく知られた Green 関数法を用いて, 非局所的な積分変換で表すことができる。これを一般の  $d$  次元に拡張する。この積分変換の Green 関数は,  $d+1$  次元クーロンポテンシャルの  $d$  次元射影を用いて表すことができる。

### [1] 波動方程式の因数分解と定在波

#### 3次元波動方程式

$$\left(\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2\right) \phi(\mathbf{r}, t) = 0 \quad (1)$$

を考える。ベクトル性の微分演算子  $\nabla$  と波数ベクトル  $k$  の対応

$$i\nabla \longleftrightarrow k, \quad (i\nabla)^2 \longleftrightarrow k^2 = |k|^2 \longleftrightarrow |i\nabla|^2 \quad (2)$$

を考慮すれば,  $(i\nabla)^2 = |i\nabla|^2$  となるようなスカラー演算子  $|i\nabla|$  を, 少なくとも形式的には定義できるであろう。もしこれがあれば, 波動方程式 (1) が

$$\left(\frac{i}{c} \frac{\partial}{\partial t} - |i\nabla|\right) \left(\frac{i}{c} \frac{\partial}{\partial t} + |i\nabla|\right) \phi(\mathbf{r}, t) = 0 \quad (3)$$

のように, 演算子として因数分解できることになる。1次元の場合だけは普通に行われるように

$$\left(\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x}\right) \left(\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}\right) \phi(x, t) = 0 \quad (4)$$

の形にも分解できるが,  $\partial/\partial x$  は  $|i\partial/\partial x|$  と異なり, 座標の反転で符号が変わる1次元ベクトルであってスカラーではない。この演算子分解の各因子は  $\pm x$  方向の伝搬波の方程式

$$\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \phi(x, t) = \mp \frac{\partial}{\partial x} \phi(x, t) \quad (5)$$

に対応する。これに倣えば, (3) から以下の波動方程式が導かれる (ここでは前進型のみ扱う。):

$$\frac{i}{c} \frac{\partial}{\partial t} \phi(\mathbf{r}, t) = |i\nabla| \phi(\mathbf{r}, t) \quad (6)$$

これが分散関係  $\omega = c|k|$  に直接対応する波動方程式である。エネルギー - 運動量の関係が  $E = c|p|$  で与えられる質量0の粒子 (光子) の Schrödinger 方程式とみなすことができるかもしれない。実際, 時間について1階微分方程式であるから,  $|i\nabla|$  のエルミート性を用いて, 確率  $|\phi|^2$  の保存則を示すことができる (→ 付録1)。

例えば, 平面波  $e^{-ik \cdot r}$  が  $|i\nabla|$  の実数固有値  $|k|$  の固有関数 (後で Fourier 変換の所で示される → p.4) であることから, エネルギー固有値  $E = \hbar c|k|$  の定在波

$$\psi_1 = e^{-itE/\hbar} \cos \mathbf{k} \cdot \mathbf{r}, \quad \psi_2 = e^{-itE/\hbar} \sin \mathbf{k} \cdot \mathbf{r} \quad (7)$$

は, この方程式 (6) に従う。(もちろん, 伝搬する平面波,  $\psi_1 \pm i\psi_2 = e^{-itE/\hbar \pm i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}}$  もこれに従う。) これに対して伝搬波の方程式 (5) は, このような定在波の解をもたない。

以下では, Laplace 方程式を利用して, このスカラー演算子  $|i\nabla|$  の明示的な形を求める。

## [2] Dirichlet 型の平面境界条件がある Laplace 方程式の形式解

3次元 Laplace 方程式（一般次元への拡張を考えて， $z$  の代わりに  $u$  を用いる）

$$\left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial u^2} \right) \phi(x, y, u) = 0 \quad (8)$$

の， $xy$  面上で関数の値  $\{\phi(x, y, 0)\}$  が与えられたときの解（ $u > 0$ ：ただし今の場合には表裏で対称）は，静電気学で Green 関数法として知られた以下のような積分形で与えられる：

$$\phi(x, y, u) = \iint \sigma_{\text{ind}}(x' - x, y' - y; u) \phi(x', y', 0) dx' dy' \quad (9)$$

ここで， $\sigma_{\text{ind}}(x' - x, y' - y; u)$  は，『接地された導体外の点  $(x, y, u)$  に置かれた負の単位点電荷によって，導体面上の位置  $(x', y')$  に静電誘導される表面電荷密度』である。境界が平面（ $xy$  面）である今の場合には，鏡像点  $(x, y, -u)$  に逆符号の仮想電荷を置く鏡像法（電気映像法）を用いて

$$\sigma_{\text{ind}}(x' - x, y' - y; u) = \frac{u}{2\pi [(x' - x)^2 + (y' - y)^2 + u^2]^{3/2}} \quad (10)$$

が得られ，解 (9) は  $|i\nabla^{(2)}|$  を用いて以下のように表すことができる：

$xy$  平面上のベクトルを  $(x, y) = \mathbf{a}$ ，2次元ナブラ演算子  $\nabla^{(2)} = (\partial/\partial x, \partial/\partial y)$  を便宜上， $-i\kappa$  と書く。 $\mathbf{a}' - \mathbf{a}$  をあらためて積分変数  $\mathbf{a}' = (x', y')$  とし，簡略化のため Taylor 展開の指数関数表示

$$\phi(\mathbf{a} + \mathbf{a}', 0) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left( x' \frac{\partial}{\partial x} + y' \frac{\partial}{\partial y} \right)^n \phi(\mathbf{a}, 0) = \exp[\mathbf{a}' \cdot \nabla^{(2)}] \phi(\mathbf{a}, 0) \quad (11)$$

を用いれば，(9) は

$$\begin{aligned} \phi(\mathbf{a}, u) &= \iint \frac{u}{2\pi [x'^2 + y'^2 + u^2]^{3/2}} \exp[-i\mathbf{a}' \cdot \kappa] \phi(\mathbf{a}, 0) dx' dy' \\ &= \left[ u \int_0^{\infty} \frac{a' J_0(a' \kappa)}{(a'^2 + u^2)^{3/2}} da' \right] \phi(\mathbf{a}, 0) = \exp(-u\kappa) \phi(\mathbf{a}, 0) \quad (\kappa = |\kappa|) \end{aligned} \quad (12)$$

となる。この変形では， $\kappa$  を  $c$  数のように扱って以下の Bessel 関数の積分表示（岩波公式集 III，p.178），定積分公式（p.196，p.172）を用いたが，すべて Fourier 変換で考えたと思えばいいだろう：

$$J_0(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{iz \cos \theta} d\theta, \quad \int_0^{\infty} \frac{x J_0(\kappa x)}{(x^2 + u^2)^{3/2}} dx = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \kappa^{1/2} u^{-1/2} K_{-1/2}(\kappa u) = \frac{e^{-\kappa u}}{u} \quad (13)$$

以上より， $\kappa$  に対応する Fourier 逆変換を形式的に  $|i\nabla^{(2)}|$  と書くことにすれば，解 (9) は

$$\phi(x, y, u) = \exp(-u|i\nabla^{(2)}|) \phi(x, y, 0) \quad (14)$$

と書くことができる。あるいは，当初の Dirichlet 型境界条件が，Neumann 型境界条件

$$-\left[ \frac{\partial}{\partial u} \phi(x, y, u) \right]_{u=+0} = |i\nabla^{(2)}| \phi(x, y, 0) \quad (15)$$

に変換されたと考えてもよい。<sup>1</sup>すぐ後で見ると  $|i\nabla^{(2)}|$  は非局所的な積分演算であり，境界のすぐ外の電場でさえ近傍点の電位だけでは決まらず，かなり遠方の電位が影響するのである。

<sup>1</sup> 2 相分離の界面の発達過程の問題では，左辺は界面すぐ外側の拡散流を与える濃度勾配（の法線成分），右辺の  $\phi$  は界面の曲率（mean curvature  $H$ ）で決まる界面直近の濃度（Gibbs-Thomson 効果）である。これにより，蒸発・拡散による界面の成長・後退速度を界面の曲率の分布と関係づけることができる。しかしながら至るところで  $H = 0$  の平面では意味がなく，曲率をもつ曲面上の勾配演算子  $\nabla_S$  に対する  $|i\nabla_S|$  を導入する必要がある。残念ながら一般的な曲面に対しては Definite な定式化はできなかった。→ Prog. Theor. Phys. **104**, No.2 (2000), p.307-324. およびその参考文献

形式解 (14) は,  $u$  で微分することにより, 次の微分積分方程式に従うことがわかる:

$$\frac{\partial}{\partial u} \phi(x, y, u) = -|i\nabla^{(2)}| \phi(x, y, u) \quad (16)$$

両辺の演算子を 2 乗すれば, 何のことはない, Laplace 偏微分方程式の変数分離形

$$\frac{\partial^2}{\partial u^2} \phi(x, y, u) = |i\nabla^{(2)}|^2 \phi(x, y, u) = -(\nabla^{(2)})^2 \phi(x, y, u) \quad (17)$$

であり, 今の境界条件には関係なく 調和関数一般 に適用できる。

### [3] 演算子 $|i\nabla|$ の積分表示

関係式 (15) を逆用し, 積分形 (9) と (10) の  $\sigma_{\text{ind}}$  を用いれば, 直ちに明示的な表現が得られる:

$$|i\nabla^{(2)}| \phi(x, y, 0) = -\lim_{u \rightarrow +0} \frac{\partial}{\partial u} \iint \frac{u}{2\pi[(x' - x)^2 + (y' - y)^2 + u^2]^{3/2}} \phi(x', y', 0) dx' dy' \quad (18)$$

$$= -\lim_{u \rightarrow +0} \frac{1}{2\pi} \iint \frac{(x' - x)^2 + (y' - y)^2 - 2u^2}{[(x' - x)^2 + (y' - y)^2 + u^2]^{5/2}} \phi(x', y', 0) dx' dy' \quad (19)$$

界面近傍の電場 (15) に対して境界値  $\{2\phi(x, y, 0)\}$  が双極子シート的な長距離場をもたらしている。

ついでに  $|i\nabla^{(2)}|$  の Green 関数(逆変換)<sup>2</sup> を求めておこう。境界上でのポテンシャルの値  $\{\phi(x, y, 0)\}$  を与える等価電荷シートは, Gauss の法則と (15) により (注: 今の場合は表裏対称である。)

$$\sigma(x, y) = \text{表裏での電場の差} \Delta \left[ -\frac{\partial \phi}{\partial u} \right]_{u=\pm 0} = 2|i\nabla^{(2)}| \phi(x, y, 0) \quad (20)$$

であることから,  $|i\nabla^{(2)}|$  の逆演算は, 任意の関数  $\sigma(x, y)$  に対して

$$|i\nabla^{(2)}|^{-1} \sigma(x, y) = 2\phi(x, y, 0) = 2 \iint G_0^{(3)}(x - x', y - y', 0) \sigma(x', y') dx' dy' \quad (21)$$

で定義される。 $G_0^{(3)}(\mathbf{r} - \mathbf{r}')$  は 3次元 Laplacian  $(i\nabla)^2$  の自由 Green 関数 (Coulomb ポテンシャル)

$$(i\nabla)^2 G_0^{(3)}(\mathbf{r} - \mathbf{r}') = \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}'), \quad G_0^{(3)}(\mathbf{r} - \mathbf{r}') = \frac{1}{4\pi |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \quad (22)$$

である。これにより  $|i\nabla^{(2)}|$  の Green 関数は以下のように, あいまいさなしに定義できる:

$$|i\nabla^{(2)}| G^{(2)}(\mathbf{a} - \mathbf{a}') = \delta(\mathbf{a} - \mathbf{a}') \rightarrow G^{(2)}(\mathbf{a} - \mathbf{a}') = 2G_0^{(3)}(\mathbf{a} - \mathbf{a}', 0) = \frac{1}{2\pi |\mathbf{a} - \mathbf{a}'|} \quad (23)$$

1次元でも同様に, 2次元鏡像法から誘導電荷密度は

$$\sigma_{\text{ind}}(x' - x; u) = \frac{1}{\pi} \frac{u}{(x' - x)^2 + u^2} \quad (24)$$

Green 関数は, 2次元自由 Green 関数  $G_0^{(2)}(\mathbf{a} - \mathbf{a}') = -(1/2\pi) \log |\mathbf{a} - \mathbf{a}'|$  より, 以下となる:

$$\left| i \frac{d}{dx} \right| G^{(1)}(x - x') = \delta(x - x') \rightarrow G^{(1)}(x - x') = 2G_0^{(2)}(x - x', 0) = -\frac{1}{\pi} \log |x - x'| \quad (25)$$

<sup>2</sup> 線形変換  $\mathcal{L}f(x) = f_1(x)$  を積分形  $\int L(x - x')f(x')dx' = f_1(x)$  で表すとき, 逆変換  $f(x) = \int G(x - x')f_1(x')dx'$  を与える積分核  $G(x - x')$  のことで,  $\int L(x - x'')G(x'' - x')dx'' = \delta(x - x')$  を満たす。

3次元の場合は一般次元  $d$  で考える方がわかりやすい。 $d$  次元位置ベクトルを  $\mathbf{r}$  ,  $d$  次元の半径 1 の球の表面積を  $S_d$  とする。先ず, 点電荷による電場は等方的で, Gauss の法則より

$$|\mathbf{E}(\mathbf{r})| = \frac{1}{S_d r^{d-1}} \quad (r = |\mathbf{r}|), \quad S_d = \frac{2\pi^{d/2}}{\Gamma(d/2)} \quad (26)$$

これを積分して Coulomb ポテンシャル ( $d$  次元 Laplacian の自由 Green 関数) は

$$G_0^{(d)}(\mathbf{r}) = \frac{1}{(d-2)S_d} \frac{1}{r^{d-2}} \quad (27)$$

である。接地境界「面」上の静電誘導電荷密度は,  $d+1$  次元鏡像法により以下となる:

$$\sigma_{\text{ind}}^{(d)}(\mathbf{r}' - \mathbf{r}; u) = -2 \left[ \frac{\partial}{\partial u'} G_0^{(d+1)}(\mathbf{r}' - \mathbf{r}, u' - u) \right]_{u'=0} = \frac{2}{S_{d+1}} \frac{u}{[(\mathbf{r}' - \mathbf{r})^2 + u^2]^{(d+1)/2}} \quad (28)$$

この関数の Fourier 変換は, 2次元の場合と同じく Bessel 関数 (1次元では複素積分) を用いて

$$\bar{\sigma}_{\text{ind}}^{(d)}(\mathbf{k}; u) = \int \int \dots \int \sigma_{\text{ind}}^{(d)}(\mathbf{r}; u) e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} d^d\mathbf{r} = e^{-ku} \quad (k = |\mathbf{k}|, u > 0) \quad (29)$$

と, どの次元  $d$  でも同じであり, 1次元でも  $k$  は  $|k|$  を意味する。この結果, 演算  $|i\nabla^{(d)}|$  を

$$|i\nabla^{(d)}| f(\mathbf{r}) = - \lim_{u \rightarrow +0} \frac{\partial}{\partial u} \int \int \dots \int \sigma_{\text{ind}}^{(d)}(\mathbf{r}' - \mathbf{r}; u) f(\mathbf{r}') d^d\mathbf{r}' \quad (30)$$

で定義すると, 平面波はこの演算子の固有関数であることが示される。すなわち

$$\begin{aligned} |i\nabla^{(d)}| e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} &= - \lim_{u \rightarrow +0} \frac{\partial}{\partial u} \int \int \dots \int \sigma_{\text{ind}}^{(d)}(\mathbf{r}' - \mathbf{r}; u) e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}'} d^d\mathbf{r}' \\ &= - \lim_{u \rightarrow +0} \frac{\partial}{\partial u} \int \int \dots \int \sigma_{\text{ind}}^{(d)}(\mathbf{r}' - \mathbf{r}; u) e^{-i\mathbf{k}\cdot(\mathbf{r}' - \mathbf{r})} e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} d^d\mathbf{r}' \\ &= - \lim_{u \rightarrow +0} \frac{\partial}{\partial u} e^{-ku} e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} = k e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} \end{aligned} \quad (31)$$

となり, 固有値は実数  $k$  ( $= |\mathbf{k}|$ ) である。さらに,  $|i\nabla^{(d)}|^2$  に現れる

$$\int_{-\infty}^{\infty} \sigma_{\text{ind}}^{(d)}(\mathbf{r}' - \mathbf{r}''; u_1) \sigma_{\text{ind}}^{(d)}(\mathbf{r}'' - \mathbf{r}; u_2) d^d\mathbf{r}'' \quad (32)$$

の Fourier 変換は, たたみ込み定理を用いれば Fourier 変換の積

$$\bar{\sigma}_{\text{ind}}^{(d)}(\mathbf{k}; u_1) \bar{\sigma}_{\text{ind}}^{(d)}(\mathbf{k}; u_2) = e^{-ku_1} e^{-ku_2} \quad (33)$$

で表される。これにより, 当初の目論みであった以下の対応が示される:

$$|i\nabla^{(d)}|^2 \longleftrightarrow \lim_{u_1 \rightarrow +0} \lim_{u_2 \rightarrow +0} \frac{\partial}{\partial u_1} \frac{\partial}{\partial u_2} e^{-ku_1} e^{-ku_2} = k^2 = \mathbf{k}^2 \longleftrightarrow (i\nabla^{(d)})^2 \quad (34)$$

最後に

$$\int \int \dots \int \sigma_{\text{ind}}^{(d)}(\mathbf{r}' - \mathbf{r}; u) d^d\mathbf{r}' = 1, \quad \lim_{u \rightarrow +0} \sigma_{\text{ind}}^{(d)}(\mathbf{r}' - \mathbf{r}; u) = \delta(\mathbf{r}' - \mathbf{r}) \quad (35)$$

$$\int \int \dots \int \frac{\partial}{\partial u} \sigma_{\text{ind}}^{(d)}(\mathbf{r}' - \mathbf{r}; u \neq 0) d^d\mathbf{r}' = \frac{\partial}{\partial u} \int \int \dots \int \sigma_{\text{ind}}^{(d)}(\mathbf{r}' - \mathbf{r}; u \neq 0) d^d\mathbf{r}' = 0 \quad (36)$$

$$f(\mathbf{r}) = \lim_{u \rightarrow +0} \int \int \dots \int \sigma_{\text{ind}}^{(d)}(\mathbf{r}' - \mathbf{r}; u) f(\mathbf{r}') d^d\mathbf{r}' \quad (37)$$

を用いて，連続で滑らかな関数  $f(\mathbf{r})$  に対する各種演算の明示的な積分表式が得られる：

$$\nabla^{(d)} f(\mathbf{r}) = \lim_{u \rightarrow +0} \int \int \dots \int \frac{2(d+1)u}{S_{d+1}} \frac{\mathbf{r}' - \mathbf{r}}{[(\mathbf{r}' - \mathbf{r})^2 + u^2]^{(d+3)/2}} f(\mathbf{r}') d^d \mathbf{r}' \quad (38)$$

$$(\nabla^{(d)})^2 f(\mathbf{r}) = \lim_{u \rightarrow +0} \int \int \dots \int \frac{2(d+1)u}{S_{d+1}} \frac{(d+2)(\mathbf{r}' - \mathbf{r})^2 - du^2}{[(\mathbf{r}' - \mathbf{r})^2 + u^2]^{(d+5)/2}} f(\mathbf{r}') d^d \mathbf{r}' \quad (39)$$

$$|i\nabla^{(d)}| f(\mathbf{r}) = - \lim_{u \rightarrow 0} \int \int \dots \int \frac{2}{S_{d+1}} \frac{(\mathbf{r}' - \mathbf{r})^2 - du^2}{[(\mathbf{r}' - \mathbf{r})^2 + u^2]^{(d+3)/2}} f(\mathbf{r}') d^d \mathbf{r}' \quad (40)$$

$$= - \lim_{u \rightarrow 0} \int \int \dots \int \frac{2}{S_{d+1}} \frac{(\mathbf{r}' - \mathbf{r})^2 - du^2}{[(\mathbf{r}' - \mathbf{r})^2 + u^2]^{(d+3)/2}} [f(\mathbf{r}') - f(\mathbf{r})] d^d \mathbf{r}' \quad (41)$$

$$= -\mathcal{P} \int \int \dots \int \frac{2}{S_{d+1}} \frac{1}{|\mathbf{r}' - \mathbf{r}|^{d+1}} [f(\mathbf{r}') - f(\mathbf{r})] d^d \mathbf{r}' \quad (\text{主値積分}) \quad (42)$$

通常の微分演算は  $u \rightarrow +0$  で積分の有効範囲が原点に集中するため局所的になるが， $|i\nabla^{(d)}|$  では有効範囲はいずれの次元でも，体積要素の広がり  $|\mathbf{r}' - \mathbf{r}|^{d-1}$  と合わせて  $|\mathbf{r}' - \mathbf{r}|^{-2}$  の形で遠方に及び，非局所的である。原点での発散  $|\mathbf{r}' - \mathbf{r}|^{-1}$  は， $f(\mathbf{r})$  が連続である限り，(42) の形で回避される。

$|i\nabla^{(d)}|$  の Green 関数は，2次元の場合と同様にして，任意の関数  $\rho(\mathbf{r})$  に対して以下となる：

$$|i\nabla^{(d)}|^{-1} \rho(\mathbf{r}) = 2 \int \dots \int G_0^{(d+1)}(\mathbf{r} - \mathbf{r}', 0) \rho(\mathbf{r}') d^d \mathbf{r}' \quad (43)$$

$$|i\nabla^{(d)}| G^{(d)}(\mathbf{r} - \mathbf{r}') = \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \rightarrow G^{(d)}(\mathbf{r} - \mathbf{r}') = 2G_0^{(d+1)}(\mathbf{r} - \mathbf{r}', 0) = \frac{2}{(d-1)S_{d+1}} \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^{d-1}} \quad (44)$$

(積分表示のまとめ)

[3次元]

$$\sigma_{\text{ind}}^{(3)}(\mathbf{r}' - \mathbf{r}; u) = \frac{1}{\pi^2} \frac{u}{[(\mathbf{r}' - \mathbf{r})^2 + u^2]^2} \quad (45)$$

$$f(\mathbf{r}) = \lim_{u \rightarrow +0} \int \int \int \sigma_{\text{ind}}^{(3)}(\mathbf{r}' - \mathbf{r}; u) f(\mathbf{r}') d^3 \mathbf{r}' \quad (46)$$

$$\nabla f(\mathbf{r}) = \lim_{u \rightarrow +0} \int \int \int \frac{4u}{\pi^2} \frac{\mathbf{r}' - \mathbf{r}}{[(\mathbf{r}' - \mathbf{r})^2 + u^2]^3} f(\mathbf{r}') d^3 \mathbf{r}' \quad (47)$$

$$\nabla^2 f(\mathbf{r}) = \lim_{u \rightarrow +0} \int \int \int \frac{4u}{\pi^2} \frac{5(\mathbf{r}' - \mathbf{r})^2 - 3u^2}{[(\mathbf{r}' - \mathbf{r})^2 + u^2]^4} f(\mathbf{r}') d^3 \mathbf{r}' \quad (48)$$

$$|i\nabla| f(\mathbf{r}) = - \lim_{u \rightarrow +0} \int \int \int \frac{1}{\pi^2} \frac{(\mathbf{r}' - \mathbf{r})^2 - 3u^2}{[(\mathbf{r}' - \mathbf{r})^2 + u^2]^3} f(\mathbf{r}') d^3 \mathbf{r}' \quad (49)$$

$$= -\mathcal{P} \int \int \int \frac{1}{\pi^2} \frac{1}{|\mathbf{r}' - \mathbf{r}|^4} [f(\mathbf{r}') - f(\mathbf{r})] d^3 \mathbf{r}' \quad (50)$$

$$G_0^{(3)}(\mathbf{r} - \mathbf{r}') = \frac{1}{4\pi} \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}, \quad G^{(3)}(\mathbf{r} - \mathbf{r}') = \frac{1}{2\pi^2} \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^2} \quad (51)$$

[ 2 次元 ]

$$\sigma_{\text{ind}}^{(2)}(\mathbf{a}' - \mathbf{a}; u) = \frac{1}{2\pi} \frac{u}{[(\mathbf{a}' - \mathbf{a})^2 + u^2]^{3/2}} \quad (52)$$

$$f(\mathbf{a}) = \lim_{u \rightarrow +0} \iint \sigma_{\text{ind}}^{(2)}(\mathbf{a}' - \mathbf{a}; u) f(\mathbf{a}') d^2\mathbf{a}' \quad (53)$$

$$\nabla^{(2)} f(\mathbf{a}) = \lim_{u \rightarrow +0} \iint \frac{3u}{2\pi} \frac{\mathbf{a}' - \mathbf{a}}{[(\mathbf{a}' - \mathbf{a})^2 + u^2]^{5/2}} f(\mathbf{a}') d^2\mathbf{a}' \quad (54)$$

$$(\nabla^{(2)})^2 f(\mathbf{a}) = \lim_{u \rightarrow +0} \iint \frac{3u}{2\pi} \frac{4(\mathbf{a}' - \mathbf{a})^2 - 2u^2}{[(\mathbf{a}' - \mathbf{a})^2 + u^2]^{7/2}} f(\mathbf{a}') d^2\mathbf{a}' \quad (55)$$

$$|i\nabla^{(2)}| f(\mathbf{a}) = - \lim_{u \rightarrow +0} \iint \frac{1}{2\pi} \frac{(\mathbf{a}' - \mathbf{a})^2 - 2u^2}{[(\mathbf{a}' - \mathbf{a})^2 + u^2]^{5/2}} f(\mathbf{a}') d^2\mathbf{a}' \quad (56)$$

$$= -\mathcal{P} \iint \frac{1}{2\pi} \frac{1}{|\mathbf{a}' - \mathbf{a}|^3} [f(\mathbf{a}') - f(\mathbf{a})] d^2\mathbf{a}' \quad (57)$$

$$G_0^{(2)}(\mathbf{a} - \mathbf{a}') = -\frac{1}{2\pi} \log |\mathbf{a} - \mathbf{a}'|, \quad G^{(2)}(\mathbf{a} - \mathbf{a}') = \frac{1}{2\pi} \frac{1}{|\mathbf{a} - \mathbf{a}'|} \quad (58)$$

[ 1 次元 ]

$$\sigma_{\text{ind}}^{(1)}(x' - x; u) = \frac{1}{\pi} \frac{u}{(x' - x)^2 + u^2} \quad (59)$$

$$f(x) = \lim_{u \rightarrow +0} \int_{-\infty}^{\infty} \sigma_{\text{ind}}^{(1)}(x' - x; u) f(x') dx' \quad (60)$$

$$\frac{d}{dx} f(x) = \lim_{u \rightarrow +0} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{2u}{\pi} \frac{x' - x}{[(x' - x)^2 + u^2]^2} f(x') dx' \quad (61)$$

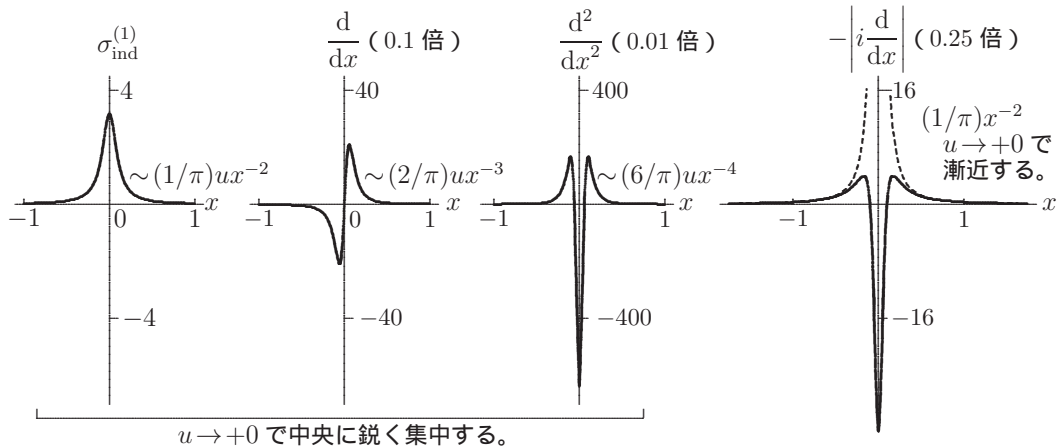
$$\left(\frac{d}{dx}\right)^2 f(x) = \lim_{u \rightarrow +0} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{2u}{\pi} \frac{3(x' - x)^2 - u^2}{[(x' - x)^2 + u^2]^3} f(x') dx' \quad (62)$$

$$\left|i \frac{d}{dx}\right| f(x) = - \lim_{u \rightarrow +0} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\pi} \frac{(x' - x)^2 - u^2}{[(x' - x)^2 + u^2]^2} f(x') dx' \quad (63)$$

$$= -\mathcal{P} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\pi} \frac{1}{(x' - x)^2} [f(x') - f(x)] dx' \quad (64)$$

$$G_0^{(1)}(x - x') = -\frac{1}{2} |x - x'|, \quad G^{(1)}(x - x') = -\frac{1}{\pi} \log |x - x'| \quad (65)$$

通常の微分演算に対する積分形の局所性と  $|id/dx|$  の非局所性の対比を明確にするため，積分変換の核関数 (kernel) を図示しておく (いずれも  $u = 0.1$ ):



(付録 1)  $|i\nabla^{(d)}|$  がエルミート演算子であることは、直接以下のように示すことができる。

$$\begin{aligned}\int g(\mathbf{r}) |i\nabla^{(d)}| f(\mathbf{r}) d^d \mathbf{r} &= - \lim_{u \rightarrow +0} \frac{\partial}{\partial u} \int \int g(\mathbf{r}) \sigma_{\text{ind}}^{(d)}(\mathbf{r}' - \mathbf{r}; u) f(\mathbf{r}') d^d \mathbf{r}' d^d \mathbf{r} \\ &= - \lim_{u \rightarrow +0} \frac{\partial}{\partial u} \int \int f(\mathbf{r}') \sigma_{\text{ind}}^{(d)}(\mathbf{r} - \mathbf{r}'; u) g(\mathbf{r}) d^d \mathbf{r}' d^d \mathbf{r} \\ &= \int f(\mathbf{r}) |i\nabla^{(d)}| g(\mathbf{r}) d^d \mathbf{r}\end{aligned}\quad (66)$$

したがって、(6) 式は

$$\frac{i}{c} \frac{\partial}{\partial t} \phi(\mathbf{r}, t) = |i\nabla| \phi(\mathbf{r}, t), \quad -\frac{i}{c} \frac{\partial}{\partial t} \phi^*(\mathbf{r}, t) = |i\nabla| \phi^*(\mathbf{r}, t)$$

となり、通常通りにして確率の保存則が導かれる：

$$\frac{\partial}{\partial t} \int \phi(\mathbf{r}, t)^* \phi(\mathbf{r}, t) d\mathbf{r} = \frac{c}{i} \int [-(|i\nabla| \phi^*) \phi + \phi^* (|i\nabla| \phi)] d\mathbf{r} = 0 \quad (67)$$

しかしながら  $|i\nabla|$  が非局所的演算だから、確率密度の連続の方程式の形を導くことはできない。

(付録 2)  $\sigma_{\text{ind}}^{(d)}$  の Fourier 変換： $\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} = kr \cos \theta$  において、先ず角  $\theta$  についての積分は

$$\begin{aligned}\int_0^{\pi/2} S_{d-1} e^{-ikr \cos \theta} r^{d-1} \sin^{d-2} \theta d\theta &= S_{d-1} r^{d-1} \int_0^{\pi/2} \cos(kr \cos \theta) \sin^{d-2} \theta d\theta \\ &= S_{d-1} r^{d-1} \sqrt{\pi} \Gamma\left(\frac{d-1}{2}\right) \left(\frac{2}{kr}\right)^{(d-2)/2} J_{(d-2)/2}(kr) = \frac{(2\pi)^{d/2}}{k^{(d-2)/2}} r^{d/2} J_{(d-2)/2}(kr)\end{aligned}\quad (68)$$

$$\begin{aligned}\int \int \dots \int \sigma_{\text{ind}}^{(d)}(\mathbf{r}; u) e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} d^d \mathbf{r} &= \frac{2(2\pi)^{d/2}}{S_{d+1} k^{(d-2)/2}} \int_0^\infty \frac{ur^{d/2} J_{(d-2)/2}(kr)}{(r^2 + u^2)^{(d+1)/2}} dr \\ &= \frac{2^{d/2} \Gamma\left(\frac{d+1}{2}\right)}{\pi^{1/2} k^{(d-2)/2}} \times \frac{k^{(d-1)/2} u^{1/2}}{2^{(d-1)/2} \Gamma\left(\frac{d+1}{2}\right)} K_{-1/2}(ku) = \left(\frac{2ku}{\pi}\right)^{1/2} K_{-1/2}(ku)\end{aligned}\quad (69)$$

$K$  は変形された Bessel 関数で

$$K_{-1/2}(z) = \sqrt{\pi/2z} e^{-z} \quad (70)$$

以上より

$$\int \int \dots \int \sigma_{\text{ind}}^{(d)}(\mathbf{r}; u) e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} d^d \mathbf{r} = e^{-ku} \quad (71)$$

となる。1次元の場合は

$$\frac{u}{\pi} \int_{-\infty}^\infty \frac{e^{-ikx}}{x^2 + u^2} dx = \frac{u}{\pi} \int_{-\infty}^\infty \frac{e^{-ikx}}{(x - iu)(x + iu)} dx \quad (72)$$

を複素経路積分で求めればよいが、 $k$  の正負に応じて  $k \text{Im } z < 0$  となるよう上半円を通るか、下半円を通るか使い分ける必要があり、結果は  $e^{-|k|u}$  である。

逆に言えば、逆変換は  $\sigma_{\text{ind}}^{(d)}(\mathbf{r}; u)$  を与える。これも公式集、p.198 の (iii) の 5 番目の公式を使えばちゃんと導かれる。先ず角度についての積分は、上の式 (68) で  $r$  と  $k$  を入れ替えるだけだから

$$\begin{aligned}\frac{1}{(2\pi)^d} \int \int \dots \int e^{-uk} e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} d^d \mathbf{k} &= \frac{1}{(2\pi)^d} \frac{(2\pi)^{d/2}}{r^{(d-2)/2}} \int_0^\infty k^{d/2} e^{-uk} J_{(d-2)/2}(kr) dk \\ &= \frac{\Gamma\left(\frac{d+1}{2}\right)}{\pi^{(d+1)/2}} \frac{u}{(r^2 + u^2)^{(d+1)/2}} = \frac{2}{S_{d+1}} \frac{u}{(r^2 + u^2)^{(d+1)/2}} = \sigma_{\text{ind}}^{(d)}(\mathbf{r}; u)\end{aligned}\quad (73)$$

したがって、 $k = |\mathbf{k}|$  の Fourier 逆変換で定義した  $|i\nabla^{(d)}|$  の積分核関数は以下で与えられる：

$$\frac{1}{(2\pi)^d} \int \int \dots \int k e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} d^d \mathbf{k} = - \lim_{u \rightarrow +0} \frac{\partial}{\partial u} \sigma_{\text{ind}}^{(d)}(\mathbf{r}; u) \quad (74)$$