サイクロトロン円運動の波動関数 —— コヒーレント状態の応用

z 方向の一様な磁場 B を表すベクトルポテンシャルは，a を任意の実数として

$$A_x = -aBy\ ,\quad A_y = (1-a)Bx\ ,\quad A_z = 0 \tag{1}$$

で与えられ，特に $a=1$ の場合を**ランダウゲージ**，$a=1/2$ の場合を**対称ゲージ**と呼んでいる。

質量 m，電荷 q の荷電粒子のハミルトニアンは

$$P = p_y - qA_y = p_y - (1-a)qBx\ ,\quad Q = \frac{1}{qB}(p_x - qA_x) = ay + \frac{1}{qB}p_x \tag{2}$$

と置くと，a の値が何であっても 1 次元**調和振動子**の形，

$$H = \frac{1}{2m}(\boldsymbol{p} - q\boldsymbol{A})^2 = \frac{P^2}{2m} + \frac{m\omega^2 Q^2}{2}\ ,\quad [P, Q] = -i\hbar\ ,\ \omega = \frac{qB}{m} \tag{3}$$

に表すことが出来る。（$q>0$ としている。）したがってエネルギー固有値は

$$E_n = \left(n + \frac{1}{2}\right)\hbar\omega\ ,\quad n = 0, 1, 2, 3, ... \tag{4}$$

で与えられ，**ランダウ準位**と呼ばれている。$\omega = qB/m$ は**サイクロトロン周波数**である。

ここで一つ前のノート（**雑書庫** [210]）にある**コヒーレント状態**の波動関数（**波束**）

$$\Psi_\alpha(Q, t) = \mathrm{e}^{-|\alpha|^2/2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}}\ \psi_n(Q)\mathrm{e}^{-iE_nt/\hbar}\ ,\quad \alpha = |\alpha|\mathrm{e}^{i\phi} \tag{5}$$

を構成する。ψ_n は「座標 Q」表示での固有関数である。簡単のため，以後では α は <u>正の実数</u> とする。前のノート [210] の (17) により期待値は

$$\langle Q\rangle = \sqrt{\frac{2\hbar}{m\omega}}\ \alpha\cos\omega t\ ,\quad \langle P\rangle = m\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\langle Q\rangle = -\sqrt{\frac{2\hbar}{m\omega}}\ m\omega\alpha\sin\omega t \tag{6}$$

である。

$$\dot{x} = \frac{\partial H}{\partial p_x} = \frac{p_x - qA_x}{m} = \frac{qBQ}{m}\ ,\quad \dot{y} = \frac{p_y - qA_y}{m} = \frac{P}{m} \tag{7}$$

の関係を用いて書き直せば

$$\langle v_x\rangle = v\cos\omega t\ ,\quad \langle v_y\rangle = -v\sin\omega t\ ,\quad v = \sqrt{2\hbar\omega/m}\ \alpha \tag{8}$$

となり，同じく (18) により不確定性（揺らぎ）は両成分とも $\Delta v = v/2\alpha$ である。これを積分して

$$\langle x\rangle = x_0 + R\sin\omega t\ ,\quad \langle y\rangle = y_0 + R\cos\omega t\ ,\quad R = v/\omega = mv/qB \tag{9}$$

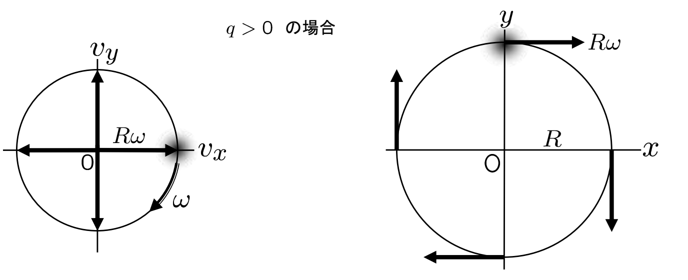
が得られる。x_0，y_0 は任意の積分定数である。実際，

$$x_0 = x + v_y/\omega = x + (p_y - qA_y)/qB\ ,\quad y_0 = y - v_x/\omega = y - (p_x - qA_x)/qB \tag{10}$$

と置くとき，$[H, x_0] = [H, y_0] = 0$，すなわち，x_0，y_0 は保存量である。これを用いると，

$$x - x_0 = -P/qB = -P/m\omega\ ,\quad y - y_0 = Q \tag{11}$$

となり，上の結果が得られる。コヒーレント状態の**波束**の広がりから，$\Delta x = \Delta y = \Delta v/\omega = R/2\alpha$ である。$\alpha \gg 1$ のとき荷電粒子を表す波束は，磁場 B を減らす円電流となるような向きに円運動する（**反磁性**：$q>0$ なら xy-面上で時計回り)。



さらに，運動エネルギーの期待値は

$$\frac{m}{2}(\langle v_x^2\rangle + \langle v_y^2\rangle) = \hbar\omega\left(\alpha^2 + \frac{1}{2}\right) = \hbar\omega\left(\langle n\rangle + \frac{1}{2}\right) \tag{12}$$

となる。(...) の中の 1/2 は，この場合は速度成分の不確定性から生じる。

波束の波動関数　先ほどの波束の議論は簡単であるが，難点は x_0, y_0 が c 数ではなくて**演算子**であることであり，得られるのは $y - y_0$（あるいは $x - x_0$）の波束である。「(11) で，それぞれ特定の**固有値** x_0, y_0 を選んで...」としたいところだが，$[x_0, y_0] = -i\hbar$ と非可換なため，同時に固有状態になることはない。波動関数の具体的な形を求めて結論を確認しておこう。

コヒーレント状態の波動関数 (5) は，$s = (2m\omega/\hbar)^{1/2}Q$ を用いれば

$$\Psi_\alpha \propto \exp\left[-\frac{1}{4}(s-2z)^2 + \frac{z^2}{2} - \frac{\alpha^2}{2} - \frac{i\omega t}{2}\right] \ , \quad z = \alpha \mathrm{e}^{-i\omega t} \tag{13}$$

である。（前のノート [210] の (13) 式：α は正の実数とする。）$qB = m\omega$ を用いて変数 s を

$$s = \sqrt{\frac{2}{m\hbar\omega}}\,(p_x - qA_x) = \sqrt{\frac{2\hbar}{m\omega}}\ k_x - \sqrt{\frac{2}{m\hbar\omega}}\ qA_x = \kappa - \mathcal{A} \tag{14}$$

とおき，無次元化した「波数」κ についてフーリエ変換[1] すれば，

$$\begin{aligned} \hat{\Psi}_\alpha(\xi) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} \Psi_\alpha \mathrm{e}^{i\kappa\xi}\ \mathrm{d}\kappa \\ &\propto \exp\left[-(\xi - \alpha\sin\omega t)^2 + i\left((\mathcal{A} + 2\alpha\cos\omega t)\xi - \frac{\alpha^2}{2}\sin 2\omega t - \frac{\omega t}{2}\right)\right] \end{aligned} \tag{15}$$

となる。ベクトルポテンシャル A_x に由来する（変数 y を含む）$\mathcal{A}$ の項は虚数部，すなわち**位相**に影響するだけである。以上より，ξ の確率分布はガウス型の

$$|\hat{\Psi}_\alpha(\xi)|^2\ \mathrm{d}\xi = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\ \exp\left[-2(\xi - \alpha\sin\omega t)^2\right]\mathrm{d}\xi \tag{16}$$

したがって

$$\langle\xi\rangle = \alpha\sin\omega t \ , \quad \Delta\xi = \frac{1}{2} \tag{17}$$

となり，$\kappa\xi = k_x x$ により

$$\langle x\rangle = \sqrt{\frac{2\hbar}{m\omega}}\ \alpha\sin\omega t = R\sin\omega t \ , \quad \Delta x = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{2\hbar}{m\omega}} = \frac{\Delta v}{\omega} = \frac{R}{2\alpha} \tag{18}$$

が得られる。

y については，Q に対する波動関数を，先ず Q についてフーリエ変換して P に対する波動関数に変換することにより，同様の結果が得られる：

$$\langle y\rangle = R\cos\omega t \ , \quad \Delta y = \frac{\Delta v}{\omega} = \frac{R}{2\alpha} \tag{19}$$

[1] この変数 ξ の**原点は任意**である。このとき選ばれた $\xi = 0$ が，後で得られる振動（円運動）の中心 x_0 を与える。なお，指数関数を $\mathrm{e}^{-i\kappa\xi}$ ではなく $\mathrm{e}^{+i\kappa\xi}$ とするのは，以下の理由による：　運動量 $p = -i\hbar\mathrm{d}/\mathrm{d}x$ の固有値 $\hbar k$ の固有関数は e^{ikx} だから，p 表示での波動関数（＝この固有関数で展開したときの p 成分の係数）を $\psi(p)$ とするとき，

$$\hat{\psi}(x) = \sum_p \psi(p)\ \mathrm{e}^{ipx/\hbar} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\psi(\hbar k)\ \mathrm{e}^{ikx}\ \mathrm{d}k$$