2章　位相空間

前章では，衝突する以外は相互作用のない独立な分子からなる系（希薄気体）を考え，一つの分子の運動が分かれば全体が分かるとして，個々の分子の運動状態を表現する速度空間を導入した。相互作用のある一般の系の状態を記述するにはこれでは不十分である。相互作用のある N 粒子系の力学的状態を記述するには，$6N$ 次元の空間を用いる必要がある。

2.1　位相空間と代表点の運動

N 質点系の力学的状態は，$3N$ 個の座標と $3N$ 個の速度の成分，合計 $6N$ 個の変数を与えることにより完全に記述される。この $3N$ 個の座標[1]を通し番号をつけて $\{q_1, q_2, q_3, \cdots, q_{3N}\}$ で表し，また対応する速度成分の代わりに運動量の成分 $\{p_1, p_2, p_3, \cdots, p_{3N}\}$ を用いることにすれば，系の力学的状態は $6N$ 次元空間の点

$$(q_1, q_2, q_3, \cdots, q_{3N},\ p_1, p_2, p_3, \cdots, p_{3N})$$

で表現される。以下ではこれを単に記号 $(\hat{q}, \hat{p})$ で表すことにしよう。この $6N$ 次元空間のことを**位相空間**または **Γ** (がんま)$^{\text{ギ大}}$ **空間**，状態を表す点を**位相点**または**代表点**と呼ぶ。これに対し個々の分子の力学的状態を記述する 6 次元の位相空間のことを $\boldsymbol{\mu}$ (みゅー)$^{\text{ギ}}$ **空間**[2]と呼ぶ。

質点系の力学的状態の時間変化は，Γ 空間における代表点の運動で表される。この代表点の運動を考えてみよう。系に外から働く外力も分子間の相互作用も保存力である場合には，ポテンシャルエネルギーを $\mathit{\Phi}(q_1, q_2, q_3, \cdots, q_{3N})$ (ふぁい)$^{\text{ギ大}}$ として，系のエネルギーは

$$\mathcal{H}(\hat{q}, \hat{p}) = \sum_{i=1}^{3N} \frac{{p_i}^2}{2m} + \mathit{\Phi}(q_1, q_2, q_3, \cdots, q_{3N}) \tag{2.1}$$

で与えられる。変数 $(\hat{q}, \hat{p})$ で表されたこのエネルギー関数 $\mathcal{H}(\hat{q}, \hat{p})$ を**ハミルトニアン**といい

$$\mathcal{H}(\hat{q}, \hat{p}) = \text{constant} \tag{2.2}$$

で定義される $6N$ 次元の Γ 空間の中の（超）曲面を**等エネルギー面**あるいは**エルゴード面**と呼ぶ。各質点の運動方程式

$$\dot{p}_i = -\frac{\partial \mathit{\Phi}}{\partial q_i}\ ,\quad p_i = m\dot{q}_i \qquad (i = 1, 2, \cdots, 3N)$$

[1] 必ずしも普通の意味での座標と運動量である必要はない。例えば 2 原子分子の回転の自由度に対しては，回転角と角運動量の対が用いられる。このような場合を含めて，q_i は**一般化座標**，p_i は**一般化運動量**と呼ばれ，ハミルトンの運動方程式 (2.3) を満たすような組が選ばれる。

[2] Γ，μ はそれぞれ，Gas と molecule に対応するギリシャ文字。

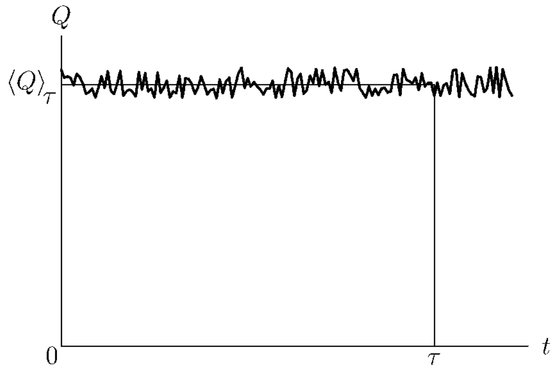

図 2.1 物理量の時間平均

は，(2.1) を用いれば次式のように書くことができる。

$$\dot{q}_i = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_i} \ , \quad \dot{p}_i = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_i} \tag{2.3}$$

これを**ハミルトンの運動方程式**といい，この式が Γ 空間における代表点の（$6N$ 次元ベクトル）"速度" $\hat{v} = (\hat{\dot{q}}, \hat{\dot{p}})$ を与えることになる。エネルギー保存則により代表点は与えられたエネルギー値に対応する等エネルギー面上を動くが，面上の各点における速度が (2.3) により一意的に決まるから，軌道は決して交わることはない。

2.2　時間平均と統計平均

注目している質点系の力学的状態を表すのは Γ 空間の 1 点である。エネルギーが一定に保たれる孤立系では，この代表点は与えられたエネルギー値に対応した等エネルギー面上を動き回る。したがって，たとえ熱平衡状態であっても，代表点のこの運動 $\{\hat{q}(t), \hat{p}(t)\}$ に伴って系の物理量 $Q(\hat{q}, \hat{p})$ の値は刻々変化する。一般に実験で測定される物理量の巨視的な観測値は，次式で定義される**時間的平均**である：

$$\langle Q \rangle_\tau = \frac{1}{\tau} \int_0^\tau Q(\hat{q}(t), \hat{p}(t)) \ \mathrm{d}t \tag{2.4}$$

熱平衡状態では，測定時間 τ (たう)ギ がある程度大きければ，τ によらない一定の観測値が得られるはずである。すなわち観測値は，$\tau = \infty$ として

$$\langle Q \rangle = \lim_{\tau \to \infty} \frac{1}{\tau} \int_0^\tau Q(\hat{q}(t), \hat{p}(t)) \ \mathrm{d}t \tag{2.5}$$

である。熱平衡状態においてこのような巨視的な観測値が存在して熱力学が成立するためには，代表点の軌道が次のような性質をもっていなければならない。

軌道が等エネルギー面上の各点を通過する頻度（確率）は，
極限 $\tau \to \infty$ で出発点すなわち初期状態によらない値をもつ

これは，すべての出発点について要請するのであるから

軌道は等エネルギー面上のすべての点を通過する

と表すこともできる。これをボルツマンの**エルゴード仮説**といい，軌道がこのような性質を持つとき，力学系はエルゴード的であるという。この場合，軌道が交わらないことから，時間が無限に経過するうちに軌道はすべての点を１回ずつ通過することになり，一様な通過確率を持つことになる。しかしながら，曲面を太さを持たない曲線で一様に埋め尽くすことは不可能であるから,「すべての点を通過する」というのは不適当で，点の代わりに「いくら小さくてもよいが有限な広がりを持つ小領域のすべてを一様に通過する」という意味に理解しなければならない。そこで，Γ 空間を体積要素

$$\mathrm{d}\hat{q}\mathrm{d}\hat{p} = \mathrm{d}q_1\mathrm{d}q_2\mathrm{d}q_3 \cdots \mathrm{d}q_{3N}\mathrm{d}p_1\mathrm{d}p_2\mathrm{d}p_3 \cdots \mathrm{d}p_{3N}$$

に分け，各体積要素を軌道が通過する確率（重率）$\rho(\hat{q},\hat{p})\mathrm{d}\hat{q}\mathrm{d}\hat{p}$ を導入しよう。もし，以上のように出発点によらない通過確率が決まるならば，(2.5) の時間平均は，この確率を用いた**統計平均**

$$\overline{Q} = \int Q(\hat{q},\hat{p})\rho(\hat{q},\hat{p})\ \mathrm{d}\hat{q}\mathrm{d}\hat{p} \tag{2.6}$$

で置き換えてよいことになる。すなわち

$$\textbf{時間平均}\ \langle \mathbf{Q} \rangle = \textbf{統計平均}\ \overline{\mathbf{Q}} \tag{2.7}$$

としてよい。この等式が成り立つことをエルゴード的と呼ぶこともある。代表点の軌道が先に述べた厳密な意味でのエルゴード性を持たなくても（あるいは持つことがわからなくても），この実用的な等式が成り立つことは十分に期待できるからである。この関係により，物理量の観測値を計算する際に，N 質点系の運動方程式を解き代表点の運動を追跡して時間平均を求めるという厄介な計算をする代わりに，よく知られている統計平均の計算をすればよいことになる。

2.3 リウビルの定理

定義式 (2.6) で導入された統計平均は，考えている系とまったく同等な系の仮想的な集団を考え，この集団について平均することを意味する。エネルギーが一定の場合に限らず，統

計平均を与えるこのような仮想的な代表点の集団のことをギブスの**統計集団**という。この場合，$\rho(\hat{q},\hat{p})$ は集団を構成する代表点の Γ 空間における分布密度を表す。

そこで，Γ 空間における代表点の連続な集合，すなわち $6N$ 次元の"流体"を考えてみよう。ある時刻に代表点の閉じた集合を与えれば，代表点が運動してもその軌道は交わらないので，この集合に新たな代表点が出入りすることはなく，以後その個数は保存される。つまり，代表点は生まれたり消えたりすることはないから，代表点の密度を $\rho(\hat{q},\hat{p})$ (ろー)ギ と表すとき，3次元からの類推により次の形の**連続の方程式**[3]が成り立つ。

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\hat{\nabla}\cdot\rho\hat{v} = -\sum_{i=1}^{3N}\left\{\frac{\partial(\rho\dot{q}_i)}{\partial q_i} + \frac{\partial(\rho\dot{p}_i)}{\partial p_i}\right\} \tag{2.8}$$

$\hat{\nabla}$ は3次元での div 演算（発散）すなわち

$$\nabla\cdot\boldsymbol{a} = \frac{\partial a_x}{\partial x} + \frac{\partial a_y}{\partial y} + \frac{\partial a_z}{\partial z} = \sum_{i=x,y,z}\frac{\partial a_i}{\partial x_i}$$

を $6N$ 次元ベクトルに拡張した演算である。(2.3) で表された $6N$ 次元の速度 $\hat{v} = (\dot{\hat{q}},\dot{\hat{p}})$ は

$$\hat{\nabla}\cdot\hat{v} = \sum_{i=1}^{3N}\left\{\frac{\partial\dot{q}_i}{\partial q_i} + \frac{\partial\dot{p}_i}{\partial p_i}\right\} = \sum_{i=1}^{3N}\left\{\frac{\partial}{\partial q_i}\frac{\partial\mathcal{H}}{\partial p_i} - \frac{\partial}{\partial p_i}\frac{\partial\mathcal{H}}{\partial q_i}\right\} = 0 \tag{2.9}$$

を[4]満たす。これを用いれば，連続方程式 (2.8) は次の**リウビルの方程式**[5]となる。

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} = -\sum_{i=1}^{3N}\left(\frac{\partial\rho}{\partial q_i}\dot{q}_i + \frac{\partial\rho}{\partial p_i}\dot{p}_i\right) = -\sum_{i=1}^{3N}\left(\frac{\partial\rho}{\partial q_i}\frac{\partial\mathcal{H}}{\partial p_i} - \frac{\partial\rho}{\partial p_i}\frac{\partial\mathcal{H}}{\partial q_i}\right) \tag{2.10}$$

これは，Γ 空間の各位置における代表点密度の，流れの出入りによる時間変化を表す。

リウビルの方程式で与えられる $\partial\rho/\partial t$ は，Γ 空間内で静止した点から見た時間変化である。これに対し，流れに乗って移動していく点からみた時間変化を考えるときは，Γ 空間での場所が微小変化することによる時間変化も考慮しなければならない。すなわち，変数 $\hat{q}(t),\hat{p}(t)$ を通しても時間 t に依存するから，この場合の代表点の密度の時間変化は

$$\frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial\rho}{\partial t} + \sum_{i=1}^{3N}\left(\frac{\partial\rho}{\partial q_i}\,\dot{q}_i + \frac{\partial\rho}{\partial p_i}\dot{p}_i\right)$$

で表される。ここで上で得られたリウビルの方程式 (2.10) を用いれば

$$\frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}t} = 0 \tag{2.11}$$

となり

[3] 空間に固定されたある体積内に含まれる"粒子数"の時間変化は，"粒子"が生まれたり消えたりすることがない場合には，その体積の表面を通過する"粒子流"の流入・流出の収支だけで与えられる。→章末に**（付）**

[4] これは流体力学で「非圧縮性の条件」「縮まない流体」と呼ばれる性質に対応する。

[5] 各質点の座標と運動量の関数である一般の物理量 $Q(\hat{q},\hat{p})$ の運動方程式（ポアソン括弧式）は，右辺の符号が異なることに注意。

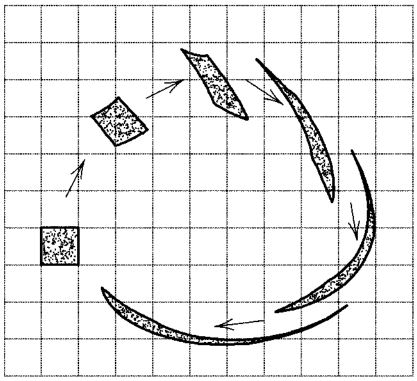

図 2.2 リウビルの定理

代表点の密度は軌道に沿って一定である。（非圧縮性条件）

これを**リウビルの定理**という。見方を変えれば，はじめに Γ 空間内のある閉曲面で囲まれていた代表点の集合に着目すると，閉曲面の場所が移ってもこの中に含まれる代表点の数は保存される。したがって，軌道に沿って密度が一定であるということは，図のように閉曲面が移動して形は変わっても，この集合が占める Γ 空間の体積（一般に測度）は不変であることを意味する。

リウビル方程式の定常解 リウビルの定理は代表点の分布の形が時間的に変わらないこと，すなわち定常状態を意味しているのではない。定常状態は，Γ 空間で静止したた各点で見た時間的変化がないこと，すなわち

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$$

が成り立つ状態である。少なくとも代表点の分布密度 $\rho(\hat{q}, \hat{p})$ がハミルトニアン $\mathcal{H}(\hat{q}, \hat{p})$ を通してのみ $(\hat{q}, \hat{p})$ に依存し，

$$\rho = \rho_0(\mathcal{H}(\hat{q}, \hat{p})\ )$$

の形になっておれば

$$\frac{\partial \rho}{\partial q_i} = \frac{\mathrm{d}\rho_0}{\mathrm{d}\mathcal{H}} \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_i}, \quad \frac{\partial \rho}{\partial p_i} = \frac{\mathrm{d}\rho_0}{\mathrm{d}\mathcal{H}} \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_i}$$

であるから，これを (2.10) の右辺に代入することにより，$\partial\rho/\partial t = 0$，すなわち代表点の流れがあるにもかかわらず，分布の形としては定常分布であることがわかる。

2.4 統計的平衡

熱平衡状態において時間によらない観測値が得られるということは，統計集団を構成する代表点の密度が定常（**統計的平衡**）になっていることに対応する。上で見たように，ハ

ミルトニアン $\mathcal{H}(\hat{q},\hat{p})$ を通してのみ $(\hat{q},\hat{p})$ に依存する形 $\rho_0(\mathcal{H}(\hat{q},\hat{p}))$ をもつ代表点の分布はリウビル方程式の定常解である。したがって，エネルギーが保存される孤立系では，熱平衡状態に対応する定常解は，与えられたエネルギー値 E に対応する等エネルギー面上でのみ 0 でない一様な密度を持つような分布であると考えられる。ただし，2.3 節で考えた密度は Γ 空間の体積密度であるから，ここで導入した一様分布は等エネルギー面上で一様な分布ではなくて，エネルギー E と $E+\Delta E$ の近接した 2 枚の等エネルギー面の間にはさまれた体積空間で一様な分布

$$\rho_0(\mathcal{H}(\hat{q},\hat{p})) = \begin{cases} \text{constant} & E \le \mathcal{H}(\hat{q},\hat{p}) \le E+\Delta E \ \text{の領域} \\ \\ 0 & \text{それ以外の領域} \end{cases} \tag{2.12}$$

である。この一様な分布[6] のことを**ミクロカノニカル分布**，この分布に従う統計集団のことを**ミクロカノニカル集団**という。

2.5 等確率の原理

ここまでは，力学的考察からエルゴード仮説に基づいて統計的手法を導入したが，力学系のエルゴード性は一般的に成り立つことが示されているわけではなく，考えている力学系がエルゴード的であるかどうかは，個々の系について直接確かめてみるよりほかはない。そこで，平衡状態を問題にする限りでは，エルゴード仮説を用いる代わりに，次のように考えてミクロカノニカル分布を導入することもできる。

平衡状態において同じ巨視的な観測値（たとえば同じエネルギー値）を与える非常に多くの異なる微視的状態（力学的状態）が存在するが，熱力学ではこの微視的状態の差異は区別されない。したがって，巨視的な観測量で区別しない以上，個々の微視的状態にあらかじめ偏見を持ち込むわけにはいかないと考え，

孤立系では，同じエネルギーをもつすべての微視的状態は等しい実現確率を持つ

と仮定する。この仮定を**等確率の原理**，または等しい先験的確率の仮定といい，この原理に基づいて統計理論を組み立てていく立場をとるのである。これは，コイン投げで表・裏

[6] これをどうしても等エネルギー面上の分布で表したいなら，等エネルギー面間の間隔，すなわちエネルギー勾配の逆数 $1/|\hat{\nabla}\mathcal{H}(\hat{q},\hat{p})|$ に比例する面密度を持つとすればよい。$\hat{\nabla}$ は，ここでは $6N$ 次元座標での勾配演算であり，エネルギー勾配の大きさは以下で与えられる：

$$|\hat{\nabla}\mathcal{H}| = \left\{ \sum_{i=1}^{3N} \left(\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_i}\right)^2 + \sum_{i=1}^{3N} \left(\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_i}\right)^2 \right\}^{1/2}$$

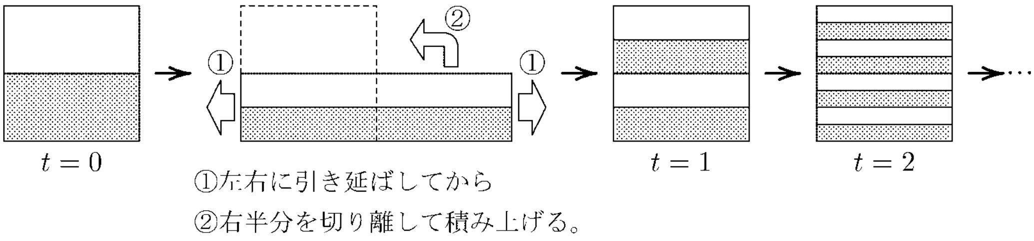

図 2.3 パイこね変換

の出る確率が1/2ずつ，あるいはサイコロの6つの目が出る確率が1/6ずつということを前提にしてゲームに興じるのと同じであって，このことが正しいかどうかを原理的に証明できる性質のものではない。

エルゴード仮説，等確率の原理のいずれの立場をとるにしても，これが正しいかどうかは，これを出発点にして組み立てられた統計力学から得られる結論が，実際の自然法則と矛盾しないかどうかによって確かめるしかない。極論すれば，両者とも厳密に成り立っている必要さえないのである。実際，平衡状態において物理量を観測する有限の時間内——ほとんどの物理測定は一瞬のうちに行われる！——に，等エネルギー面上のすべての微視的状態が実現されるわけではない。すべての微視的状態が実現されるには$10^{10^{10}}$（10の「10の10乗」乗）という途方もない時間を要するのである。こんな宇宙の年齢10^{10}（10の10乗）年をさえもはるかに超えた時間ではなく，現実的な時間内で実用的なエルゴード性(2.7)が成り立っていないと困るのである。統計学的な言い方をすれば，有限時間内に実現される微視的状態のほとんどは母集団の中の「ありふれた標本」であって，特異な標本ばかり次々にサンプリングしているようなことになっていなければよいのである。この問題については次章で検討しよう。

2.6　力学系*

ハミルトンの運動方程式を2.3節のリウビルの定理のような見方をするならば，力学はΓ空間の代表点の集合から集合への連続な写像（変換）ということになる。このような点の集合から集合への変換Tで時間発展についての推移則$T(t_1,t_2)=T(t_1,t)T(t,t_2)$をみたすものを，一般に**力学系**と呼ぶことがある。ハミルトンの運動方程式に従いリウビルの定理を満たす通常の力学系は，集合の用語を用いるならば測度を保存する**保測変換**である。

保測変換の簡単な例として**パイこね変換**と呼ばれるものがある。これは2次元平面の正

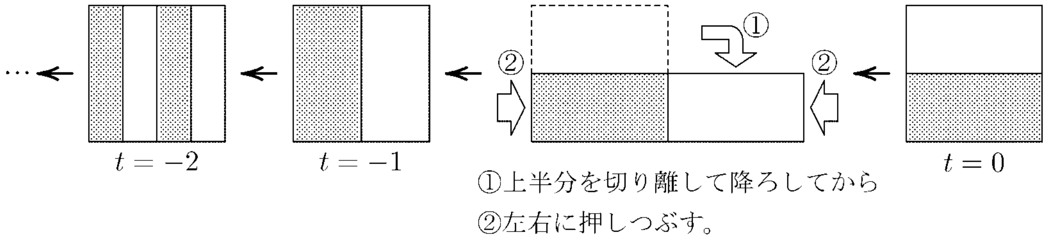

図 2.4 時間反転（逆変換）

方形内の点の集合 $\mathrm{S} = \{(x, y); 0 < x \leq 1,\ 0 < y \leq 1\}$ から S 自身への写像であって，変換式

$$F(x,y) = \begin{cases} (2x,\ y/2) & 0 < x \leq \frac{1}{2} \text{ のとき} \\ \\ (2x-1,\ (y+1)/2) & \frac{1}{2} < x \leq 1 \text{ のとき} \end{cases} \tag{2.13}$$

で表される。はじめに上半分は白，下半分は赤と色をつけておけば，図 2.3 で示されているように，この変換を何度か繰り返すうちに混じり合って，一様なピンク色になっていくことが想像できよう。半々でなくても，いくら小さくてもよいから有限な広がりを持つどこか一か所に色をつけておくと，必ず位相空間全体（今の場合は正方形内）に一様に混じってしまう。このような性質を**混合性**という。

色が必ず混じっていく一方という意味でこの過程は非可逆過程である。しかしながら，これは１回１回の変換が非可逆であることを意味しない。実際，１点の運動に注目する限りでは，点は正方形の中をあちこちとうろつき回るだけで何も非可逆らしい振る舞いを示さない。また，図 2.4 のように**逆変換**をたどっていっても，やはり色は一様に混じっていくことがわかる。このように，非可逆性は変換すなわち運動方程式そのものがもっているのではなく，ある瞬間に上半分（あるいは，いくら小さくても有限な広がりを持った領域）に色をつけ，その集合の変化を追ったことによって現れたものと考えられる。

Γ 空間についても同じことが想像される。ハミルトンの運動方程式に従う１つの代表点の運動はあくまでも可逆であるが，もし代表点の集合としての力学系が混合的であれば，Γ 空間の近接した代表点の差，すなわち状態の微視的な差を無視した見方をするとき，非可逆性が現れることになる。統計力学では，この微視的な差を無視する見方を**粗視化**と呼んでいる。これは Γ 空間を適当な大きさのセルに分けたとき，同一セル内の微視的状態を区別しないことに相当する。図 2.2 で示されているように[7]，最初にある１つのセルに入っていた代表点の集合は，時間がたつにつれてその体積を保ちながら次第に多くのセルにまたがるようになり，最初に持っていた色，すなわち状態を区別する情報が薄められていく。

[7] ただし，図 2.2 で示された振舞いは正確な意味では混合的ではなく，いくら待っても全てのセルにまたがることはない。

（付）連続の方程式

連続の方程式というのは，次の事実を表現するものである。「粒子数が保存される，すなわち粒子が途中で生まれたり消えたりしないならば，空間に固定された任意の閉曲面で囲まれた領域に含まれる粒子数の時間的変化は，領域の表面を通過して出入りする粒子流の差し引きだけで与えられる。」これは粒子数だけでなく，エネルギーや電荷など保存則が成り立つ量であれば適用される。人の流れでもいいだろう。

$\rho(x,y,z,t)$ を単位体積当たりの粒子数（粒子数密度），$\boldsymbol{v}(x,y,z,t)$ を流れの速度としよう。このとき $\boldsymbol{j}=\rho\boldsymbol{v}$ が粒子流密度，すなわち流れに垂直な断面を通過する，単位面積・単位時間あたりの粒子数を与える，流れの方向のベクトルである。ρ が電荷密度なら $\boldsymbol{j}$ は電流密度である。

一辺が $\mathrm{d}x$，$\mathrm{d}y$，$\mathrm{d}z$ の微小な直方体（平行６面体）領域を考えよう。x-軸に垂直な面積 $\mathrm{d}y\mathrm{d}z$ の２つの面を通過する流量は，流れ密度ベクトルの x 成分で与えられる。他の４つの面についても同様だから，直方体に含まれる全粒子数 $\rho\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$ の時間的変化率（単位時間当たりの変化量）は，６つの面での出入りを考慮して

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t}\rho(x,y,z,t)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z &= [j_x(x,y,z,t)-j_x(x+\mathrm{d}x,y,z,t)]\mathrm{d}y\mathrm{d}z\\ &+ [j_y(x,y,z,t)-j_y(x,y+\mathrm{d}y,z,t)]\mathrm{d}z\mathrm{d}x\\ &+ [j_z(x,y,z,t)-j_z(x,y,z+\mathrm{d}z,t)]\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\ &= -\frac{\partial j_x}{\partial x}\mathrm{d}x\ \mathrm{d}y\mathrm{d}z-\frac{\partial j_y}{\partial y}\mathrm{d}y\ \mathrm{d}z\mathrm{d}x-\frac{\partial j_z}{\partial z}\mathrm{d}z\ \mathrm{d}x\mathrm{d}y \end{aligned}\tag{2.14}$$

すなわち

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}=-\frac{\partial j_x}{\partial x}-\frac{\partial j_y}{\partial y}-\frac{\partial j_z}{\partial z}\tag{2.15}$$

で与えられる。ここで $(\partial/\partial x,\partial/\partial y,\partial/\partial z)$ を成分とするベクトル的な演算記号（ナブラ）

$$\nabla=\left(\frac{\partial}{\partial x},\frac{\partial}{\partial y},\frac{\partial}{\partial z}\right)\tag{2.16}$$

を導入し，二つのベクトルのスカラー積の記号

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z\tag{2.17}$$

を用いれば，上式は

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}=-\nabla\cdot\boldsymbol{j}=-\nabla\cdot\rho\boldsymbol{v}\tag{2.18}$$

と書くことが出来る。∇ をベクトル量にスカラー積的に演算したときには，これを**発散**といい，div という記号を用いることもある。すなわち

$$\textbf{連続の方程式}\qquad \frac{\partial\rho}{\partial t}=-\mathrm{div}(\rho\boldsymbol{v})\tag{2.19}$$

である。∇ はもともと１階微分演算だから，関数の積に対する微分の規則を適用できて

$$\nabla\cdot\rho\boldsymbol{v}=(\nabla\rho)\cdot\boldsymbol{v}+\rho(\nabla\cdot\boldsymbol{v})\tag{2.20}$$

である。∇ をスカラー量に演算したときは**勾配**といい，grad という記号を用いて

$$\nabla\rho=\mathrm{grad}\ \rho\tag{2.21}$$

と書くこともある。これは密度の勾配の大きさと方向を与えるベクトル量である。