「隠れた変数説」の終焉 —— 3スピンもつれの応用

Bell の不等式は期待値に対するものであるから，同じ測定を何回も繰り返して平均値を求め，それが不等式を満たすかどうかで判定する必要がある。ここでは平均値ではなくて「Yes/No」で決着をつけた理論を紹介する。これほどクリアカットに，しかも簡単な数理で隠れた変数を葬り去った話はない。

ここでは 1/2 のスピンが 3 つも出てくるので，添え字の煩雑さを避けるため，パウリ演算子 σ_x, σ_y, σ_z を X, Y, Z で，その固有値（観測値）±1 を変数 x, y, z で表すことにする。すなわち，例によって Z の固有値 $z=\pm1$ の固有状態を $|+\rangle$, $|-\rangle$ で表すとき，

$$X|+\rangle=|-\rangle,\ X|-\rangle=|+\rangle,\ Y|+\rangle=i|-\rangle,\ Y|-\rangle=-i|+\rangle \tag{1}$$

また，後で用いる交換関係などは以下の通りである：

$$\begin{array}{l} X^2=Y^2=Z^2=1\ \textbf{（単位行列）},\ XY=-YX,\ \ldots\textbf{（反可換）} \\ \text{異なるスピンの間では交換可能：}\ \ X_2Y_1=Y_1X_2,\ \ldots\ \ \text{etc.} \end{array} \tag{2}$$

今回の話につなぐため，Bell の不等式を導いた際の**隠れた変数**の考えをもう一度整理しておく。2 つのスピンから成る「もつれ」の状態（**EPR 状態**）

$$|\psi\rangle=\frac{1}{\sqrt{2}}(\,|+-\rangle-|-+\rangle\,) \tag{3}$$

を考える。この状態 $|\psi\rangle$ は，Z だけでなく X, Y についても（さらに任意の方向の成分についても），「どちらが $+$ で，どちらが $-$ か」は決まらないが，ともかく「±1 の対」になっているという，強い相関をもつものであった。以下の話に合わせて言えば，この状態 $|\psi\rangle$ は，互いに**可換**[1]な演算子 X_1X_2，Y_1Y_2，Z_1Z_2 の，いずれも固有値 -1 の同時固有状態であって

$$X_1X_2|\psi\rangle=-|\psi\rangle\ ,\ \ Y_1Y_2|\psi\rangle=-|\psi\rangle\ ,\ \ Z_1Z_2|\psi\rangle=-|\psi\rangle \tag{4}$$

である。これは (1) を用いれば簡単に示される。これにより，いくら離れた 2 つのスピンの間でも，この「もつれ」が維持されておれば，Z_1,Z_2（または X_1,X_2 か Y_1,Y_2）を観測したとき,「測定結果はランダムであるが，一方で $+$ であれば他方では必ず $-$」という強い相関が顕れる。——一方を観測した瞬間に，離れた相手に物理的作用が及ぶはずはない！？（**EPR 現象**）この現象を素直に説明しようというのが,「予め知ることはできないが，隠れた変数によりいずれかの状態に決まっている」とする，**隠れた変数**の考えであった。相関のある確率現象ではごく普通の常識的な状態である。

Bell の話は，この重ね合わせの状態に対して，単純に「もし観測する前から半々の確率で $|+-\rangle$ か $|-+\rangle$ のいずれかの状態に決まっていたとすれば...」ということではない。これだけであれば，X の固有状態を $|+'\rangle$, $|-'\rangle$ で表すこととして，

$$|+-\rangle=\frac{1}{2}(|+'+'\rangle+|+'-'\rangle-|-'+'\rangle-|-'-'\rangle)$$

$$|-+\rangle=\frac{1}{2}(|+'+'\rangle-|+'-'\rangle+|-'+'\rangle-|-'-'\rangle)$$

と書き直すことができるから，X_1X_2 を観測すれば $(+1,+1)$ や $(-1,-1)$ の対，つまり $x_1x_2=+1$ となることもあり得る。したがって，不等式を持ち出さなくても仮定の正否の判定は可能である。仮定は,「**観測結果はランダムで予測できないが，スピンのどの成分を観測するにしても，その結果が ±1 のいずれの値になるかが予め決まっているとすれば...** 」ということである。少なくともこれ等の

[1] X_1X_2 と Y_1Y_2 は，$X_1X_2Y_1Y_2=X_1Y_1X_2Y_2=(-Y_1X_1)(-Y_2X_2)=Y_1X_1Y_2X_2=Y_1Y_2X_1X_2$ で可換。

相関を満たす $(x_1,x_2;y_1,y_2;z_1,z_2)$ の値には，$(+1,-1;+1,-1;+1,-1)$，$(-1,+1;+1,-1;+1,-1)$ など，8 通りの組み合わせが可能であるが,「観測される値の組は観測する前から確定しており，量子力学が知らない隠れた確率的変数が，観測したときどの組が実現されるかを決めている」とすればよい。この立場から導かれたのが Bell の不等式であった。

今度は $|\psi\rangle$ の代わりに **GHZ 状態**と呼ばれる，3 スピンのもつれた状態

$$|\Psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\,|+++\rangle - |---\rangle\,\right) \tag{5}$$

を考える。この状態 $|\Psi\rangle$ は，互いに可換な 4 つの演算子

$$Q_0 = X_1X_2X_3\ ,\quad Q_1 = X_1Y_2Y_3\ ,\quad Q_2 = Y_1X_2Y_3\ ,\quad Q_3 = Y_1Y_2X_3 \tag{6}$$

の，それぞれ固有値が -1 と 1 の同時固有状態

$$Q_0|\Psi\rangle = -|\Psi\rangle\ ,\quad Q_i|\Psi\rangle = |\Psi\rangle\quad (i=1,2,3) \tag{7}$$

である。演算子 $\{Q_i\}$ が互いに可換であることは，公式 (1)，(2) を使えば示される。さらに，異なるスピンの X, Y 演算子が可換であることと，(2) を繰り返し用いれば，これらの演算子の間には

$$\begin{aligned} Q_1Q_2Q_3 &= X_1Y_2Y_3\ Y_1X_2Y_3\ Y_1Y_2X_3 = X_1Y_1Y_1\ Y_2X_2Y_2\ Y_3Y_3X_3 \\ &= X_1\ (-X_2)\ X_3 = -Q_0 \end{aligned} \tag{8}$$

の関係があることが導かれる。最後の負符号は，異なる演算子の間の**反交換関係** $Y_2X_2 = -X_2Y_2$ によってもたらされたものである。

状態 $|\Psi\rangle$ において Q_1,Q_2,Q_3 のいずれかを観測[2]すれば，測定値の積は必ず，それぞれ

$$x_1y_2y_3 = 1\ ,\quad y_1x_2y_3 = 1\ ,\quad y_1y_2x_3 = 1 \tag{9}$$

となり，やはり 3 つのスピンの間には強い相関が見出される（例えば $x_1=+1$ のとき，$y_2=+1$ なら $y_3=+1$，$y_2=-1$ なら $y_3=-1$）。ここで前の話と同様に「Q_1,Q_2,Q_3 のいずれかを観測したとき，$x_i=\pm1$, $y_i=\pm1$ のいずれの値になるか，観測する前から $(x_1,x_2,x_3;\ y_1,y_2,y_3)$ の値は確定していたのだ」としてみよう。Q_1,Q_2,Q_3 のどれを観測するかは予め決まっていないから，この値の組 $(x_1,x_2,x_3;\ y_1,y_2,y_3)$ は，少なくとも (9) の 3 つの式を同時に満たしていなければならない。可能な組は $(+1,+1,+1;+1,+1,+1)$，$(+1,-1,-1;+1,-1,-1)$，... など，8 通りあるが,「隠れた変数」によってその中のどれが選ばれても，${y_i}^2=1$ により

$$x_1y_2y_3 \times y_1x_2y_3 \times y_1y_2x_3 = x_1x_2x_3 = 1 \tag{10}$$

が成り立っている[3]。これは，状態 $|\Psi\rangle$ で Q_0 の固有値が -1，したがって Q_0 を観測した場合の測定値が必ず $x_1x_2x_3=-1$ を満たすことと両立しない。（EPR 状態の場合と違って，いくらがんばってみても，(9) の 3 つの等式と $x_1x_2x_3=-1$ を同時に満たす ±1 の組み合わせは見つからない！）つまり，**「どの組み合わせになるかは確率的であって予知できないが，ともかく観測する前からいずれかの値の組に確定している**」という常識的な確率現象を構成する「古典的」状態は，この場合にはそもそも存在し得ないのである。

---

[2] 例えば「Q_1 を観測する」と言っても，実際は異なるスピン $1,2,3$ でそれぞれ X,Y,Y を個々に同時に測定することになる。同じスピンの X,Y を同時には測定できないから，Q_1,Q_2,Q_3 は可換で $|\Psi\rangle$ の同時固有状態であっても，同時に測定をすることはできない。（$\rightarrow$ **付録**）観測する度に GHZ 状態 $|\Psi\rangle$ を生成，つまりサイコロを振り直す必要がある。

[3] これは普通の数（**c 数**）の計算であって，演算子（**q 数**）の計算 (8) で使ったような（反）交換関係は無縁である。この演算法（代数）の違いのために，掛け算結果の符号が食い違ったと言える。

（付録）

X と Y の固有値 ± 1 の固有状態を，それぞれ $|+'\rangle$, $|-'\rangle$，および $|+''\rangle$, $|-''\rangle$ と書くことにする。これ[4] を用いて GHZ 状態ベクトル $|\Psi\rangle$ を $Q_1 = X_1 Y_2 Y_3$ 向けに書き換えれば，以下の形になる：

$$|\Psi\rangle = \frac{i}{2}\left(\,|+'+''+''\rangle + |+'-''-''\rangle + |-'+''-''\rangle + |-'-''+''\rangle\, \right) \tag{11}$$

すなわち Q_1 の固有値 $+1$ の固有ベクトルによる展開（重ね合わせ）になっていて，Q_1（つまり X_1, Y_2, Y_3）を観測すれば，ランダムにこの中のどれかに決定する。しかしそれは Q_2, Q_3 の固有状態ではない。Q_2, Q_3 の場合の展開形は (11) のスピンの順序が入れ替わったものとなり，観測すれば Q_1 とは別の状態に決定する。Q_0 の場合は

$$|\Psi\rangle = -\frac{1}{2}\left(\,|-'-'-'\rangle + |-'+'+'\rangle + |+'-'+'\rangle + |+'+'-'\rangle\, \right) \tag{12}$$

となり，各項は $X_1 X_2 X_3$ の固有値 -1 の固有ベクトルになっている。

[4] 以下のように逆変換される（必ずしも一意的ではないが結果は同じになる）：

$$|+\rangle = \frac{|+'\rangle - |-'\rangle}{\sqrt{2}} = \mathrm{e}^{i\pi/4}\, \frac{|+''\rangle - |-''\rangle}{\sqrt{2}}, \quad |-\rangle = \frac{|+'\rangle + |-'\rangle}{\sqrt{2}} = \mathrm{e}^{-i\pi/4}\, \frac{|+''\rangle + |-''\rangle}{\sqrt{2}}$$