EPR パラドックスと Bell の不等式

歴代の最前線の物理学者を悩ませてきた波動関数と確率，重ね合わせの状態，観測による波動関数の収縮などは，量子力学の手法が確立された現在でも，いまだに万人がうなづけるすっきりとした説明の仕方もないと言っていい。ここでは，量子力学的な確率と古典的な確率の違いを明確に示した「Bell の不等式」を，難しい理屈はできるだけ避けて初学者にも理解可能な形で紹介する。

1 スピン状態

量子ビットでは最も簡単な量子構造として「$|0\rangle$ と $|1\rangle$ という 2 状態をとる粒子」が用いられるが，具体的には基本粒子のスピン角運動量を用いて説明するのが最もわかりやすい。大きさ 1/2（角運動量 $S=\hbar/2$）のスピン演算子は，パウリ行列

$$\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \ , \quad \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \ , \quad \sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \tag{1}$$

で表すことができる。

上の 3 成分とも固有値は ± 1 であることは容易に確かめられよう。以下では，任意の方向の成分の固有値，すなわち任意の方向でスピンを観測したときの測定値がやはり ± 1 であることを示し，その固有ベクトルを求めよう。σ_z の固有値 ± 1 に対応する固有ベクトルをそれぞれ

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = |+\rangle, \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = |-\rangle \tag{2}$$

とする。任意の測定方向 $\boldsymbol{n} = (\sin\theta\cos\phi, \sin\theta\sin\phi, \cos\theta)$ に対して

$$\sigma'_z = \boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{\sigma} = n_x\sigma_x + n_y\sigma_y + n_z\sigma_z = \begin{pmatrix} \cos\theta & \mathrm{e}^{-i\phi}\sin\theta \\ \mathrm{e}^{i\phi}\sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix} \tag{3}$$

の固有値も ± 1 であることは，固有値の和 $\mathrm{Tr}\ \sigma'_z = 0$ と積 $\mathrm{Det}\ \sigma'_z = -1$ からわかる。2 行 2 列の行列の固有値問題を解けば，± 1 に対応する固有ベクトルは以下のように求められる（行列をかけて確かめてみよ）：

$$\begin{aligned} |+'\rangle &= \begin{pmatrix} \mathrm{e}^{-i\phi/2}\cos(\theta/2) \\ \mathrm{e}^{i\phi/2}\sin(\theta/2) \end{pmatrix} = \mathrm{e}^{-i\phi/2}\cos\frac{\theta}{2}\ |+\rangle \ + \ \mathrm{e}^{i\phi/2}\sin\frac{\theta}{2}\ |-\rangle \\ |-'\rangle &= \begin{pmatrix} -\mathrm{e}^{-i\phi/2}\sin(\theta/2) \\ \mathrm{e}^{i\phi/2}\cos(\theta/2) \end{pmatrix} = -\mathrm{e}^{-i\phi/2}\sin\frac{\theta}{2}\ |+\rangle + \mathrm{e}^{i\phi/2}\cos\frac{\theta}{2}\ |-\rangle \end{aligned} \tag{4}$$

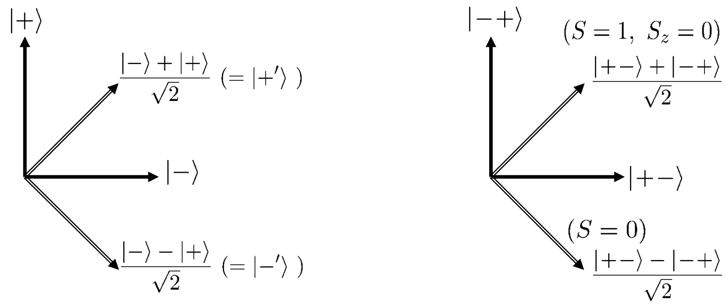
各々に，絶対値 1 の任意の位相係数がかかってよいが，ここではユニタリ変換[1] で得られる形に合わせた。

[1] z 軸の周りに ϕ，y 軸の周りに θ 回転するとき，$U = \exp(-i\phi\sigma_z/2)\exp(-i\theta\sigma_y/2)$ として，$\sigma'_z = U\sigma_z U^\dagger$，固有状態は（以下，複合同順）$\sigma'_z U|\pm\rangle = U\sigma_z U^\dagger U|\pm\rangle = U\sigma_z|\pm\rangle = \pm U|\pm\rangle$ により，$|\pm'\rangle = U|\pm\rangle$ のようにユニタリ変換される。(4) は角度 ϕ についても θ についても**周期** 4π であることに注意。（公式）$\exp(i\alpha\sigma_\nu) = \cos\alpha + i\sigma_\nu\sin\alpha$ $(\nu = x, y, z)$

状態ベクトルと測定　上で求めた σ'_z の固有状態は，元の $|+\rangle$, $|-\rangle$ から見れば**重ね合わせの状態**である。つまり，重ね合わせの状態というのは別の物理量の固有状態になっている。一般の系の重ね合わせ状態の場合には，それが固有状態となるような簡単な物理量を思い浮かべるのが難しいだけである。（**注．**次節の例は全角運動量 0 の固有状態である。脚注参照）

量子力学における状態は（やや抽象的な）**ヒルベルト空間**のベクトルであり，基底ベクトルの（一般には複素係数の）一次結合で作られる様々な方向のベクトルが可能である。これが重ね合わせの状態である。この状態ベクトルに対してある物理量を測定すれば，状態ベクトルはその物理量のいずれかの固有ベクトル（新たな基底ベクトル）の方向に**射影**される。

下の図は，ヒルベルト空間（状態ベクトル空間）の例である。ユニタリ変換の係数は複素数でもよいから，これはその一部分（部分空間）であり，実数係数の直交変換の範囲に限定している。



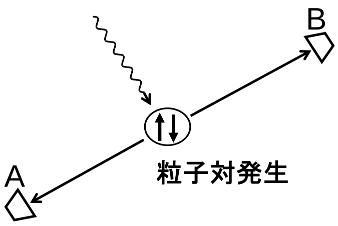
$|+'\rangle, |-'\rangle$ は σ_x の固有ベクトル

（複素係数の重ね合わせの状態は この平面では表すことができない。）

$\pm$ スピン対の状態ベクトル空間

（これ以外に $S=1$ で $S_z=\pm1$ の 2つの状態 $|++\rangle$, $|--\rangle$ がある。）

2　EPR パラドックスと Bell の不等式



スピン 1/2 粒子の対が発生し，スピン角運動量の和が 0 であることだけは確かだったとしよう。その後，$\pm$ スピン対は重ね合わせの波動関数[2]

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\ |+-\rangle\ -\ |-+\rangle\ \right) \tag{5}$$

で表された**もつれた状態**のまま，一方は A に，他方は B に到達したとする。この離れた 2 点の粒子の間には非常に強い**非局所的相関**がある。——A で粒子のスピンを観測して例えば $+$ であったとき，波動関数は $|+-\rangle$ に収縮し，B では必ず $-$ であることが自動的に**決まる**。

これは不可解である。状態の変化は何らかの物理的原因で起きる。A の粒子で例えば $+$ であることを観測した瞬間には，離れた B の粒子に何も物理的な影響は及んでいないから（**局所性**），この瞬間に B の粒子に変化が起きるはずはない。したがって B の粒子はそれ以前から $-$ でなければならず，$+$ の可能性ももつ重ね合わせの状態 (5) であったことと矛盾す

[2] 全スピン角運動量 $\boldsymbol{S}=\boldsymbol{S}_1+\boldsymbol{S}_2$ がベクトル量として 0 である状態は **Singlet** 状態と呼ばれ，必然的にこの形の重ね合わせの状態になる。(4) で与えられるどの方向の成分表示でも $|\psi\rangle = (|+'-'\rangle - |-'+'\rangle)/\sqrt{2}$ と書け，どの方向でも反平行対となっている。一方，$S=1$ の状態は $S_z=0,\ \pm1$ の 3 状態が縮退しており，**Triplet** 状態と呼ばれる。

る。さもなくば，いかに離れていても連携する非局所的物理量が存在する（あるいは相互作用が光速を超えて瞬時に伝わった）かのごとく見える。このことを **EPR 現象**（あるいは **EPR パラドックス**）という。[3]

この現象を納得するには，常識的に「スピン対の状態は，測定したときに $|+-\rangle$，$|-+\rangle$ のどちらになるか，観測する前から決まっているが，我々にわかっていないだけだ」と考えればよい。波動関数による状態の記述は不完全で，対の状態を決定している**隠れた変数**があるのではないか？しかしながらこの考えは，簡単な不等式によって明確に否定された。

スピンの相関　後ほど必要になる，方向が θ 異なる２つの方向の成分の相関，$\langle\sigma_z^{\mathrm{A}}\sigma_z'^{\mathrm{B}}\rangle$ を量子力学から求めておこう。ベクトル $|\psi\rangle$ を，B の方（ $|..\rangle$ の後ろの $\pm$ ）だけ，(4) の逆変換を用いて $|+'\rangle$，$|-'\rangle$ で表して書き直せば以下のように求められ，素朴な予想と合う結果が得られる：

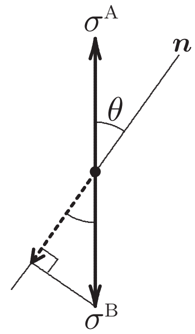
(G.4) の逆変換

$$|+\rangle = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi/2}\left(\cos\frac{\theta}{2}|+'\rangle - \sin\frac{\theta}{2}|-'\rangle\right)$$

$$|-\rangle = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\phi/2}\left(\sin\frac{\theta}{2}|+'\rangle + \cos\frac{\theta}{2}|-'\rangle\right)$$

$$\begin{aligned}|\psi\rangle \;\; = \;\; \frac{1}{\sqrt{2}}\Bigg(&\mathrm{e}^{-i\phi/2}\sin\frac{\theta}{2}|++'\rangle + \mathrm{e}^{-i\phi/2}\cos\frac{\theta}{2}|+-'\rangle \\ &-\mathrm{e}^{i\phi/2}\cos\frac{\theta}{2}|-+'\rangle + \mathrm{e}^{i\phi/2}\sin\frac{\theta}{2}|--'\rangle\Bigg)\end{aligned}$$

$$\langle\sigma_z^{\mathrm{A}}\sigma_z'^{\mathrm{B}}\rangle = \langle\psi|\sigma_z^{\mathrm{A}}\sigma_z'^{\mathrm{B}}|\psi\rangle = \sin^2\frac{\theta}{2} - \cos^2\frac{\theta}{2} = -\cos\theta \qquad (6)$$



Bell の不等式　A と B のそれぞれにおいて，対粒子のスピンをいくつかの方向 $\{\boldsymbol{n}_i\}$ のいずれかで繰り返し測定してスピン成分の相関 $\langle\sigma_i^{\mathrm{A}}\sigma_j^{\mathrm{B}}\rangle$ を求めるとする。隠れた変数の考えでは，A（および B）で測定したときに得られる各 $\boldsymbol{n}_i$ 方向のスピン成分の値 σ_i (B では $-\sigma_i$) は粒子対ができたときに決まる。±1 のどちらになるかは，未知の確率的な変数（複数個も可）に支配されていて，その変数の値が u のとき $\sigma_i(u)$，すなわち u の値に応じて ±1 のどちらかになるとし，値 u の実現確率を $P(u)$ (≥ 0) としよう。A，B は十分に離れていて一方の測定が他方に影響を与えることはない（**局所性**）。このとき，A，B におけるスピン成分の相関は

$$\langle\sigma_i^{\mathrm{A}}\sigma_j^{\mathrm{B}}\rangle = -\sum_u \sigma_i(u)\sigma_j(u)P(u), \quad \sum_u P(u) = 1 \qquad (7)$$

で与えられる。ここで，$\sigma_i = \pm1$ $(i = 1, 2, 3)$ のどの組み合わせでも，

$$-\sigma_1\sigma_3 + (\sigma_1 + \sigma_3)\sigma_2 = 1 \text{ または } -3$$

であり，8 通りの組み合わせが確率 $P(u)$ で実現されるわけだから，その期待値であるスピンの相関に関する **Bell の不等式**が得られる：

$$-3 \;\leq \langle\sigma_1^{\mathrm{A}}\sigma_3^{\mathrm{B}}\rangle - \langle\sigma_1^{\mathrm{A}}\sigma_2^{\mathrm{B}}\rangle - \langle\sigma_2^{\mathrm{A}}\sigma_3^{\mathrm{B}}\rangle \leq 1 \qquad (8)$$

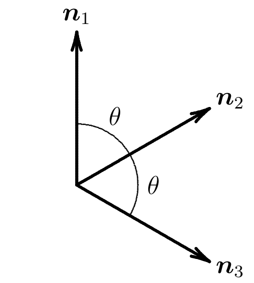
[3] Einstein-Podolsky-Rosen の頭文字。原論文の「運動量と座標の同時決定の可能性」など，様々なバージョンがあり，次のように表すこともできよう。―― 可換な物理量は共通の固有状態をもち，同時に決定できる。非可換なため固有状態を同時に実現できない２つの物理量（例えば σ_z と σ_x）を A と B で手分けして，（あらかじめ時刻をあわせておいて）同時に測定（**注**）したとする。もし一方における測定（＝ある固有状態に決まる）により他方の状態も瞬時に決まるとすると，A において（B においても）非可換な２つの物理量の固有状態が同時に実現されることになり，矛盾が生じるかに見える。（**注．** 異なる粒子の σ_z と σ_x は可換で同時測定可能ある。）　　$\rightarrow$ **『雑書庫』[209]**

不等式の破れ　ここで $\boldsymbol{n}_i$，$\boldsymbol{n}_j$ の間の角度を θ_{ij} とする。量子力学に基づく計算ではスピンの相関は，(6) の結果を一般化することにより，[4]

$$\langle \sigma_i^{\mathrm{A}} \sigma_j^{\mathrm{B}} \rangle = -\cos\theta_{ij} \tag{9}$$

で与えられ，Bell の不等式 (8) に現れた相関の式は以下となる：

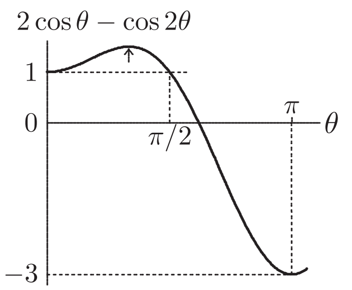
$$\langle \sigma_1^{\mathrm{A}} \sigma_3^{\mathrm{B}} \rangle - \langle \sigma_1^{\mathrm{A}} \sigma_2^{\mathrm{B}} \rangle - \langle \sigma_2^{\mathrm{A}} \sigma_3^{\mathrm{B}} \rangle = -\cos\theta_{13} + \cos\theta_{12} + \cos\theta_{23}$$



$\boldsymbol{n}_1$，$\boldsymbol{n}_2$，$\boldsymbol{n}_3$ がこの順番で同一平面上にあり，$\theta_{12} = \theta_{23} = \theta$，$\theta_{13} = 2\theta$ である場合には，右辺は

$$-\cos 2\theta + 2\cos\theta = 2\cos\theta(1-\cos\theta) + 1 \tag{10}$$

となる。下図のように $0 < \theta < \pi/2$ の配置では 1 より大きく，Bell の不等式 (8) は満たされない。$\theta = \pi/3$ で右辺は最大値 3/2 となる。



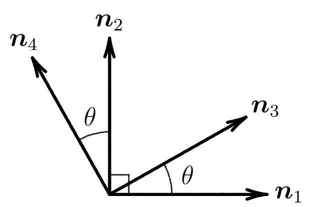
実験による検証　ある実験は上と少し異なる設定で行われた。A では $\boldsymbol{n}_1$，$\boldsymbol{n}_2$ のいずれかの方向，B では $\boldsymbol{n}_3$，$\boldsymbol{n}_4$ のいずれかの方向で同時に測定し，A，B における測定値の４通りの組み合わせで相関を求める。この場合，$\sigma_i = \pm 1$ $(i = 1, 2, 3, 4)$ のどの組み合わせであっても

$$(\sigma_1 + \sigma_2)\sigma_3 + (\sigma_2 - \sigma_1)\sigma_4 = \pm 2$$

のいずれかであるから，先ほどと同様にして４通りの相関に関する新たな不等式が得られる：　**注．**この不等式では $\sigma_i^{\mathrm{A}} = -\sigma_i^{\mathrm{B}}$ は不要

$$-2 \leq \langle \sigma_1^{\mathrm{A}} \sigma_4^{\mathrm{B}} \rangle - \langle \sigma_1^{\mathrm{A}} \sigma_3^{\mathrm{B}} \rangle - \langle \sigma_2^{\mathrm{A}} \sigma_4^{\mathrm{B}} \rangle - \langle \sigma_2^{\mathrm{A}} \sigma_3^{\mathrm{B}} \rangle \leq 2 \tag{11}$$

ここで，同一平面上で $\boldsymbol{n}_1$ と $\boldsymbol{n}_2$，$\boldsymbol{n}_3$ と $\boldsymbol{n}_4$ がそれぞれ直交する方向に測定器を置き，$\boldsymbol{n}_1$ と $\boldsymbol{n}_3$ を角 θ だけずらせて測定するとする。Singlet 対の場合，量子力学から計算される相関では，結論 (9) を用いて



$$(11)\text{ の相関の式} = 2(\cos\theta + \sin\theta) = 2\sqrt{2}\sin\left(\theta + \frac{\pi}{4}\right) \tag{12}$$

となり，$0 < \theta < \pi/2$ では右辺は 2 より大きい。$\theta = \pi/4$ で最大値 $2\sqrt{2}$ となり，不等式を大きく破る可能性がある。

以上を光の偏光に応用した実験により,「測定する前から決まっている」とする隠れた変数の考え方は量子力学とは相反することが実証された。[5]

---

[4] 以下のように直接求めることもできる：状態 $|\psi\rangle$ では角運動量ベクトルの和が 0 であるから，$\boldsymbol{\sigma}^{\mathrm{B}}|\psi\rangle = -\boldsymbol{\sigma}^{\mathrm{A}}|\psi\rangle$，よって $\langle\psi|(\boldsymbol{n}_i\cdot\boldsymbol{\sigma}^{\mathrm{A}})(\boldsymbol{n}_j\cdot\boldsymbol{\sigma}^{\mathrm{B}})|\psi\rangle = -\langle\psi|(\boldsymbol{n}_i\cdot\boldsymbol{\sigma}^{\mathrm{A}})(\boldsymbol{n}_j\cdot\boldsymbol{\sigma}^{\mathrm{A}})|\psi\rangle$，これに公式　$(\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{\sigma})(\boldsymbol{n}'\cdot\boldsymbol{\sigma}) = \boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{n}' + i(\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{n}')\cdot\boldsymbol{\sigma}$　と，$\langle\psi|\boldsymbol{\sigma}^{\mathrm{A}}|\psi\rangle = 0$ を用いて $\langle\psi|(\boldsymbol{n}_i\cdot\boldsymbol{\sigma}^{\mathrm{A}})(\boldsymbol{n}_j\cdot\boldsymbol{\sigma}^{\mathrm{B}})|\psi\rangle = -\boldsymbol{n}_i\cdot\boldsymbol{n}_j = -\cos\theta_{ij}$ となる。公式はパウリ行列の性質，${\sigma_x}^2 = {\sigma_y}^2 = {\sigma_z}^2 = \sigma_0$（単位行列），$\sigma_y\sigma_z = -\sigma_z\sigma_y = i\sigma_x$ etc. から導かれる。

[5] スピンと光の偏光との対応については →**「雑書庫」**[**228**]。なお，実験を繰り返して得られる期待値ではなく，１回の測定で決着をつける話もある。→[**208**]。

（追記） A で観測を行うことは，B に何も物理的影響を与えない。確かに観測前は「+ か − かは決まっていない」**重ね合わせの状態**であり，観測後は「半々の確率で + か − かのどちらかに決まっている」状態（**混合状態**という）である。しかしながら,（A で観測を行ったことを伏せておいて,）B で独自に観測を行うとすれば「半々の確率で + か − が期待される」という点では，A の観測の前後で何も変化は起きていない（起きるはずがない）のである。ただし，対全体では明らかに物理的変化が起きている。A の観測後に決まる $|+-\rangle$ あるいは $|-+\rangle$ の状態では「もつれ」が解消していて，σ_x や σ_y については ± の対になっているとは限らず，ベクトル量としての角運動量保存則が破れている。これは，A においてスピン角運動量を測定することで，対の全角運動量に影響を与えたからであり，量子力学の対象となるミクロの世界では，ごく普通のことである。

なお，A で σ_z の観測をした後では，結果がまだ知らされていない場合でも，B では「（σ_x や σ_y ではなくて）$\underline{\sigma_z\ \text{の固有状態のいずれか}}$ になった」ことだけは確かだと思うかもしれないが，そうではない。混合状態では,「半々の確率で σ_z の固有状態のいずれかになっている」ことは「半々の確率で σ_x（または σ_y）の固有状態のいずれかになっている」ことと全く同じである。（→**雑書庫 [207]**）