磁気の単位

MKS 系であっても，磁場の源を専ら電流とするか，磁荷（モノポール）とするかで異なる流派がある。現在のところ前者が主流であると思うが，特に静磁気の場合には後者の方がわかりやすいこともあり，断らずに使われていて μ_0 の入る位置が違うことにとまどうので注意を要する。

（EB 対応）　電流を基本にする。電荷 q が受けるローレンツ力「$\boldsymbol{F} = q\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B}$」から

$$1\ \mathrm{N/m} = 1\ \mathrm{A{\cdot}T}\ （アンペア・テスラ, 1\mathrm{C} = 1\mathrm{A{\cdot}s}) \tag{1}$$

の関係がある。また，面積 S，強さ I の微小閉電流の磁気モーメントを「$m' = IS$」とするので，**磁気モーメント**の単位は (1) により 2 通りの書き方

$$1\ \mathrm{A{\cdot}m^2} = 1\ \mathrm{J/T} \tag{2}$$

がある。右辺は磁場中の磁気モーメントのもつエネルギーを「$\mathcal{H} = -\boldsymbol{B} \cdot \boldsymbol{m}'$」とすることに直結しているが，$\mathrm{A{\cdot}m^2}$ を使うことが推奨されている。磁化 $\boldsymbol{M}'$（単位体積あたりの磁気モーメント）の次元は A/m となり，磁場 $\boldsymbol{H}$ と同じで

$$\boldsymbol{H} = {\mu_0}^{-1}\boldsymbol{B} - \boldsymbol{M}' \tag{3}$$

となる。EB 系では，やむを得ず磁荷の概念を使わざるを得ないときは，**磁荷** q'_m の単位はこれを長さで割って以下で与えられる：

$$1\ \mathrm{A{\cdot}m} = 1\ \mathrm{N/T} \tag{4}$$

（EH 対応）　電荷に対応する**磁荷**（モノポール）q_m があるとして，その単位 Wb（ウェーバー）は磁場をもとにして，磁場 H[A/m] から受ける力が $F = q_m H$[N] になるように定義するから

$$1\ \mathrm{Wb} = 1\ \mathrm{N/(A/m)} = 1\ \mathrm{T{\cdot}m^2} \tag{5}$$

であり，$1\ \mathrm{Wb} = 1\ \mathrm{J/A} = 1\ \mathrm{V{\cdot}s}$ とすることもある。

一方，強さ I，面積 S の閉電流の作る磁場を磁気双極子 m の作る磁場と比較することにより

$$m = \mu_0 IS = \mu_0 m' \qquad [\mathrm{Wb{\cdot}m}] \tag{6}$$

の関係があることがわかる。（**注．** m と m' は本来，異なる量であるから，EB 対応の m' は電流の**磁気モーメント**，EH 対応の m は**磁気双極子モーメント**と使い分けることもある。）磁化 $\boldsymbol{M}$ の次元は $\mathrm{Wb/m^2}$ となり，磁束密度 $\boldsymbol{B}$ と同じで

$$\boldsymbol{B} = \mu_0 \boldsymbol{H} + \boldsymbol{M} \tag{7}$$

となる。

以上により，２つの立場の磁荷の間には

$$q_m = \mu_0 q'_m \tag{8}$$

の違いがあり，磁気におけるクーロンの法則は両者でそれぞれ

$$\boldsymbol{F} = \frac{1}{4\pi\mu_0}\ \frac{q_m^{(1)} q_m^{(2)}}{r^2}\ \frac{\boldsymbol{r}}{r} = \frac{\mu_0}{4\pi}\ \frac{q_m'^{(1)} q_m'^{(2)}}{r^2}\ \frac{\boldsymbol{r}}{r} \tag{9}$$

と書かれ，μ_0 の位置が全く逆の形で入ってくるので注意を要する。

(付）MKSA 系　基本となる**電流の単位** A を，「同じ強さ $I = 1$（単位未定）で間隔 a =1 m の平行電流の長さ l =1 m あたりに働く力が 2×10^{-7} N になるときに $I = 1$ A」と，力学の範囲内で定義する。これにより電荷は 1 C = 1 A·s となる。「真空の透磁率」μ_0 は，平行電流間の力を

$$F = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{I^{(1)} I^{(2)} l}{a} \ [\mathrm{N}] \tag{10}$$

と書くことから決まり，

$$\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \ \mathrm{N/A^2} \tag{11}$$

である。単位は実用上の便宜からインダクタンスの単位 H（ヘンリー，$1\mathrm{H} = 1\mathrm{J/A^2}$）を用いて，H/m とされる。EH 対応では本来，2 つの磁荷が及ぼしあう力から Wb を定義するが，電流を基本にする今日の MKSA 系では先ず電流から磁場の強さが決められるため，上の説明では「$F = q_m H$」を用いた定義にした。

「真空の誘電率」ϵ_0 は MKSA 系では後追いとなり，光速を c として「$\epsilon_0 = 1/c^2\mu_0$」（あるいは $1/4\pi\epsilon_0 = c^2/10^7$ [N/A^2]）と定義され，以下の数値と単位をもつ：

$$\epsilon_0 \simeq 8.854 \times 10^{-12} \ \mathrm{A^2 s^2/N{\cdot}m^2} \qquad (1\mathrm{A{\cdot}s} = 1\mathrm{C}) \tag{12}$$

単位は電気容量の単位 F（ファラッド，$1\mathrm{F} = 1\mathrm{C/V} = 1\mathrm{C^2/J}$）を用いて，F/m が使われる。

伝統的な電磁気学は静電気のクーロンの法則から始まるため，MKSA 系との整合性から，形式的には電荷の単位 C を力学の範囲で以下のように定めてもよい。「1m 離れた，等しい電気量[1]の 2 つの電荷が及ぼし合う力が

$$\frac{|c|^2}{10^7} \ \mathrm{N} \tag{13}$$

のとき，電気量を 1C とする。」ここで，$|c|$ は MKS 単位で表したときの光速の大きさ（単位を除いた**数値**）である。（※）（標準通り電流から 1C=1A·s によって C を定めた場合には,「1m 離れた，1C の 2 つの電荷の間には，(13) の力が働く」ことが前提となる。）こうして定められた電気量 [C] をもつ 2 つの電荷の間のクーロンの法則の係数を,（後から導かれるマクスウェル方程式に**無理数** π が入ってこないように）

$$\boldsymbol{F} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q^{(1)} Q^{(2)}}{r^2} \frac{\boldsymbol{r}}{r} \ [\mathrm{N}] \tag{14}$$

と書く（有理単位系）。これにより ϵ_0 が定義され，以下で与えられる：

$$4\pi\epsilon_0 = \frac{10^7}{|c|^2} \ \mathrm{C^2/(N{\cdot}m^2)} \tag{15}$$

同様に（EH 対応の）磁荷は,「1m 離れた，等量の 2 つの磁荷が及ぼし合う力が

$$\frac{10^7}{(4\pi)^2} \ \mathrm{N} \tag{16}$$

のとき，磁気量を 1Wb とする。」以下同様に，磁気量 [Wb] をもつ磁荷の間のクーロンの法則を

$$\boldsymbol{F} = \frac{1}{4\pi\mu_0} \frac{q_m^{(1)} q_m^{(2)}}{r^2} \frac{\boldsymbol{r}}{r} \ [\mathrm{N}] \tag{17}$$

と書くことで，真空の透磁率 μ_0 が定義され，以下で与えられる：

$$4\pi\mu_0 = \frac{(4\pi)^2}{10^7} \ \mathrm{Wb^2/(N{\cdot}m^2)} \tag{18}$$

[1] 「等量」ということをどう確保するかが実際上は難しい。電流の場合は往復電流にすればよい。

電流の単位を 1A=1C/s とし，ϵ_0 と μ_0 がマクスウェルの法則から導かれる電磁波（光）の速さ

$$\frac{1}{\sqrt{\epsilon_0\mu_0}} = c \tag{19}$$

を与えることから，1Wb=1N·m/A である。

（※）あっさりと 1 C と言うが，実は静電力は非常に強い力である。$c = 3.0 \times 10^8$ m/s であるから，1 C の 2 つの電荷が 1 m 離れているとき及ぼし合う力は，およそ 10^{10} N にもなる。水素イオンが 1 モル，すなわち 1 g あれば電気量は 10^5 C 程度になるから，同じ距離で働く万有引力〜6.7×10^{-17} N と比較すると比率で 10^{37} くらいの隔たりがある。もし 1 C の電荷が直径 1 m の球に閉じこめられておれば，10^{10} J 前後のエネルギーをもち，TNT 火薬 2 ～ 3 トンの破壊力をもつ恐ろしい代物となる。自然界では，電荷は原子のように正負が近接して共存して中性になっているため，こんな大きな力が目に見えるところに現れることはないが，物質（金属や結晶，化合物）の凝集力は原子・分子レベルでの電気的な力であることを思い出せば納得できよう。