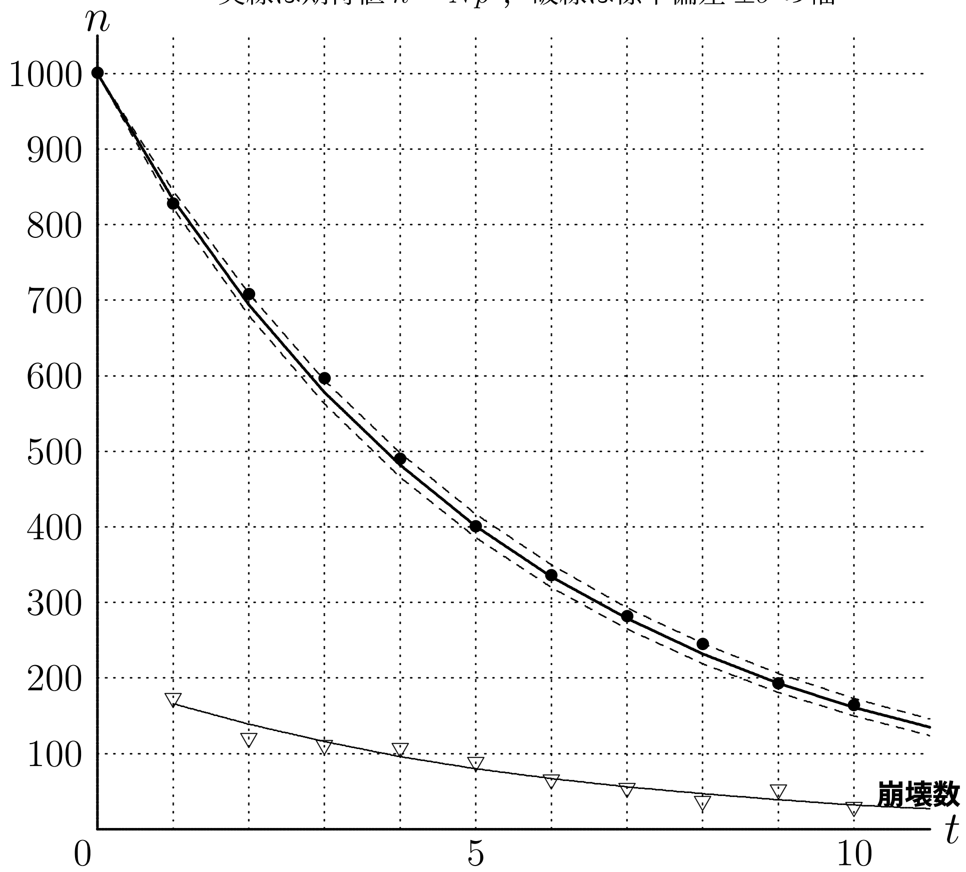
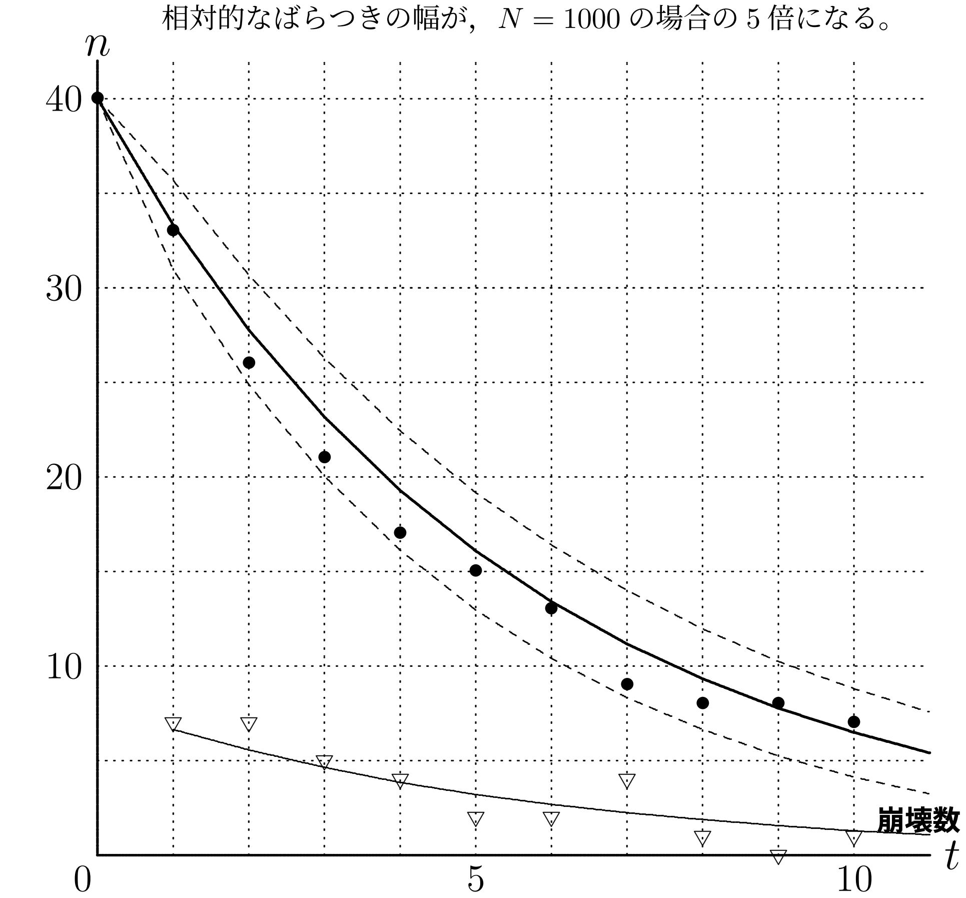
$\underline{N = 1000}$

実線は期待値 $\overline{n} = Np^t$，破線は標準偏差 $\pm\sigma$ の幅



$\underline{N = 40}$

相対的なばらつきの幅が，$N = 1000$ の場合の 5 倍になる。



（2 項分布）

各粒子が $t\ (=1,\,2,\,3,\,...\,)$ まで生き残っている確率は $p^{\,t}$，t までに崩壊する確率は $1-p^{\,t}$ だから，時刻 t に n 個生き残っている確率は,「どの n 個が生き残り，残りの $N-n$ 個が崩壊したか」の場合の数を考慮して

$$\textbf{2 項分布} \qquad P_N(n,\,t) = {}_N C_n\,(p^{\,t})^n\,(1-p^{\,t})^{N-n} \tag{1}$$

で与えられる。**期待値**と**分散**は母関数

$$f_N(x,\,t) = \sum_{n=0}^{N} P_N(n,\,t)\,x^n = (p^{\,t}x + 1 - p^{\,t})^N \tag{2}$$

を用いて計算できて

$$\overline{n} = f'_N(1,\,t) = Np^{\,t}\,, \quad \sigma^2 = \overline{(n-\overline{n})^2} = \overline{n^2} - \overline{n}^2 = Np^{\,t}\,(1-p^{\,t}) \tag{3}$$

である。N が大きければ主要部分は**正規分布**で近似できて，上の図の $\pm\sigma$ の幅には試行の <u>約 68%</u> が入る。σ^2 は以下の等式で計算する：

$$f''_N(1,t) = N(N-1)\,p^{2t} = \overline{n(n-1)} = \overline{n^2} - \overline{n} \tag{4}$$

（漸化式で 2 項分布を求める）

ある時刻に n' 個が生き残っているとき，そのうちの $n\,(\le n')$ 個が次の時刻まで生き延びる確率は，サイコロを n' 回（または同時に n' 個）振るベルヌーイ試行の確率であり，過去の履歴に依存せず

$$P(n|n') = {}_{n'}C_n\,p^n(1-p)^{n'-n}\,, \quad f_{n'}(x,\,1) = \sum_{n=0}^{n'} P(n|n')x^n = (px+1-p)^{n'} \tag{5}$$

だから，

$$P_N(n,\,t) = \sum_{n'=n}^{N} P(n|n')\,P_N(n',\,t-1) \tag{6}$$

$$\begin{aligned} f_N(x,\,t) &= \sum_{n=0}^{N}\left(\sum_{n'=n}^{N} P(n|n')\,P_N(n',\,t-1)\right)x^n \\ &= \sum_{n'=0}^{N}\left(\sum_{n=0}^{n'} P(n|n')\,x^n\right)P_N(n',\,t-1) \\ &= \sum_{n'=0}^{N}(px+1-p)^{n'}\,P_N(n',\,t-1) = f_N(px+1-p,\,t-1) \end{aligned} \tag{7}$$

ここで等式

$$p^{k-1}(px+1-p) + 1 - p^{k-1} = p^k x + 1 - p^k \tag{8}$$

を $k = 2, 3, ..., t$ と順に適用していけば母関数

$$f_N(x,\,t) = (p^{\,t}x + 1 - p^{\,t})^N \tag{9}$$

が決まり，これを展開した x^n の係数として上の $P_N(n,\,t)$ が求まる：

$$\sum_{n=0}^{N} P_N(n,\,t)\,x^n = \sum_{n=0}^{N} {}_N C_n\,(p^{\,t})^n\,(1-p^{\,t})^{N-n}\,x^n \tag{10}$$