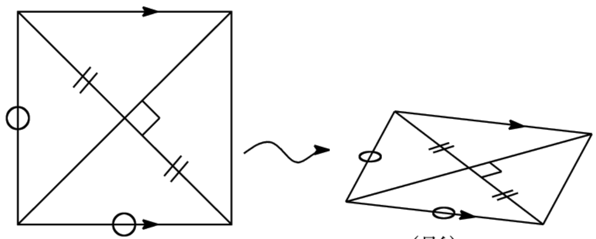
暗記しちゃえこの立体

A 基礎知識

完璧でモレのないものではありません．盲点になりがちで大事なことのみ …

(1) 立体見取り図の描き方



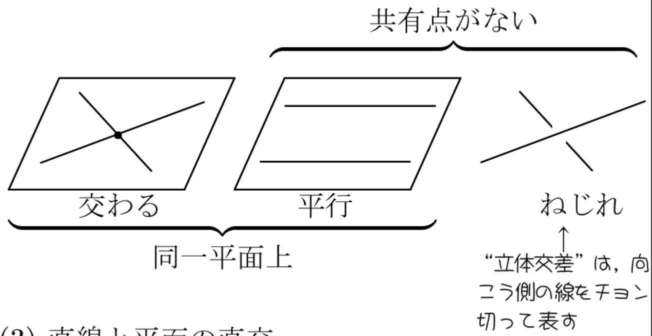
(実物)　　　　(影)

(私の趣味では) 「平行投影」が基本である．すなわち，図形上の各点に太陽光のような平行光線を当てたときスクリーン (平面) に映る影を，そのままキャンバスに描く．このとき …

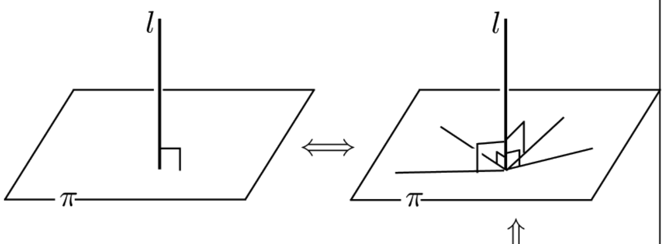
- ○ 平行な 2 直線の影はやはり平行である．
  同一方向の線分比は保存される．
- ○ 角度は (一般には) 変化してしまう．
  異なる方向の線分比は (一般には) 保存されない．

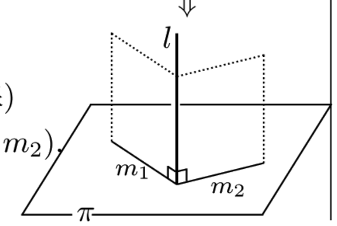
(2) 2 直線の位置関係

以下の 3 種類があり，左の 2 つ，右の 2 つにそれぞれ共通点がある．



(3) 直線と平面の直交





「垂直」の定義

直線 $l \perp$ 平面 π

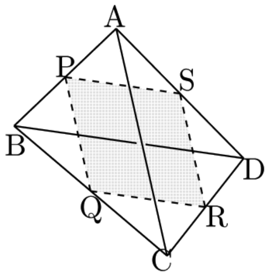
$\Longleftrightarrow l \perp$ (π上の任意の直線)

$\Longleftrightarrow l \perp$ (π上の2直線 m_1, m_2).

ただし，$m_1 \not\parallel m_2$

B 四面体

(1) 4 つの中点



$$\begin{cases} PS \parallel BD,\ PS = \dfrac{1}{2}BD \\ QR \parallel BD,\ QR = \dfrac{1}{2}BD \end{cases}$$

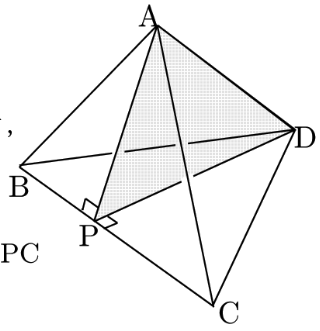
中点連結定理

より

$$PS \parallel QR,\ PS = QR.$$

よって▱PQRS は平行四辺形.

(2) 平面で分割



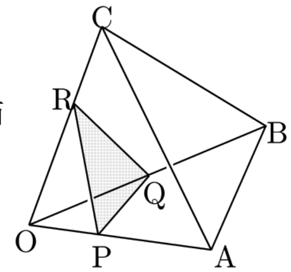
$BC \perp PA$, $BC \perp PD$

i.e. $BC \perp$ 平面 PAD のとき，

四面体 ABCD の体積は

$$\frac{1}{3}\triangle PAD\cdot PB + \frac{1}{3}\triangle PAD\cdot PC$$
$$= \frac{1}{3}\triangle PAD\cdot BC.$$

(3) 線分比と体積比



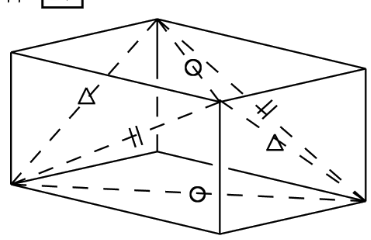
頂点 O を共有する 2 つの四面体の体積比は

OABC : OPQR

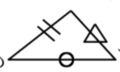
=OA·OB·OC : OP·OQ·OR.

(証明が要るかも … ．△OAB : △OPQ，および C，R から平面 OAB に下ろした垂線の長さの比から示す．)

(4) 直方体と等面四面体 fv



破線で描かれた四面体の 4 つの面は，どれも

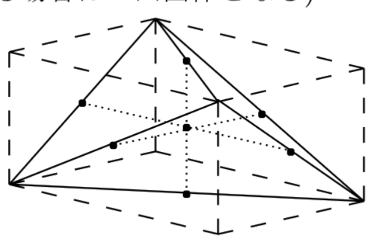


であるから

すべて合同である．

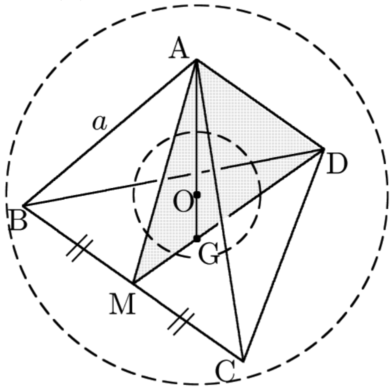
このような四面体を「等面四面体」という．

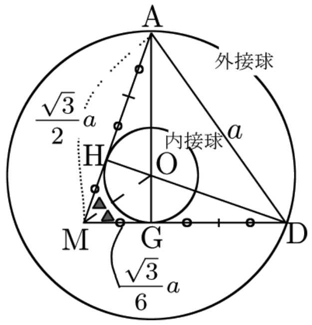
(直方体が立方体である場合は正四面体となる)



四面体の向かい合う 2 辺の中点どうしを結んだ 3 本の線分は，それぞれの中点で交わり，どの 2 本も直交する．

(5) 正四面体の内接球・外接球





M は BC の中点，G，H はそれぞれ △BCD，△ABC の重心とすると，内接球・外接球の中心 O は 2 直線 AG，DH の交点である．

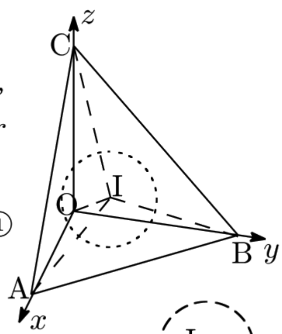
- ○ △AMG で角の二等分線の性質を用いると
  $$\mathrm{AO}:\mathrm{OG}=\mathrm{MA}:\mathrm{MG}=3:1.$$

(O を正四面体 ABCD の重心という．)

- ○ △AMG で三平方の定理を用いると
  $$\text{高さ} = \mathrm{AG} = \frac{\sqrt{6}}{3}a\ ,\ \therefore\ \text{体積} = \frac{\sqrt{2}}{12}a^3.$$
- ○
  $$\text{内接球の半径} = \mathrm{OG} = \frac{1}{4}\cdot\frac{\sqrt{6}}{3}a = \frac{\sqrt{6}}{12}a,$$
  $$\text{外接球の半径} = \mathrm{OA} = \frac{3}{4}\cdot\frac{\sqrt{6}}{3}a = \frac{\sqrt{6}}{4}a.$$

(6) 内接球と体積

四面体 OABC の体積 V は，次のように 2 通りに表せる．(r は内接球の半径)



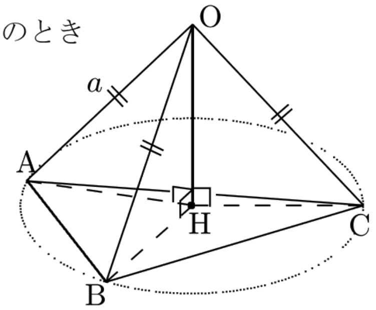
$$V=\frac{1}{3}\triangle\mathrm{OAB}\cdot\mathrm{OC}. \qquad \cdots ①$$

$$\begin{aligned} V &= \text{I-OAB}+\text{I-OBC}\\ &\quad +\text{I-OCA}+\text{I-ABC}\\ &= \frac{1}{3}\triangle\mathrm{OAB}\cdot r+\frac{1}{3}\triangle\mathrm{OBC}\cdot r\\ &\quad +\frac{1}{3}\triangle\mathrm{OCA}\cdot r+\frac{1}{3}\triangle\mathrm{ABC}\cdot r\\ &= \frac{1}{3}(\triangle\mathrm{OAB}+\triangle\mathrm{OBC}+\triangle\mathrm{OCA}+\triangle\mathrm{ABC})\cdot r. \cdots ② \end{aligned}$$

(①，②を比べて r を求めることが多い．②は ∠AOB などが直角でなくても使える．)

(7) OA = OB = OC のとき

頂点 O から底面 ABC へ下ろした垂線の足を H とすると，△OHA，△OHB，△OHC はいずれも直角三角形であるから，



三平方の定理より

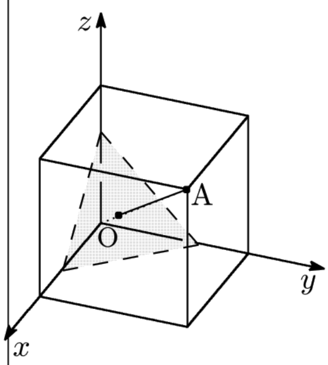
$$\mathrm{HA}=\mathrm{HB}=\mathrm{HC}\ (\text{いずれも}\sqrt{a^2-\mathrm{OH}^2})$$

よって H は △ABC の「外心」である．

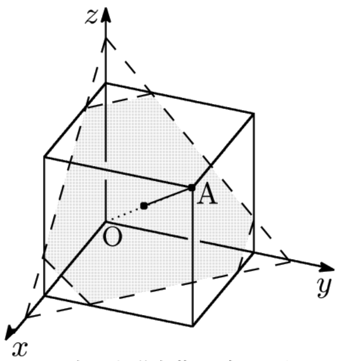
〈注〉正四面体について考える．上記を用いると，外接球の中心が，頂点から対面へ下ろした垂線上 (垂線の足は外心) にあることが示せる．また，正三角形において外心は重心と一致するから，正四面体の外接球の中心は，頂点と対面の重心を結ぶ直線上にある．

C 立方体

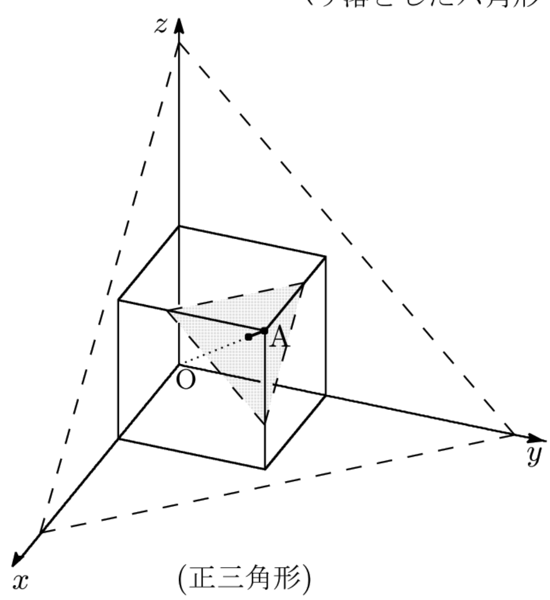
(1) 対角線に垂直な平面との交わり



(正三角形)



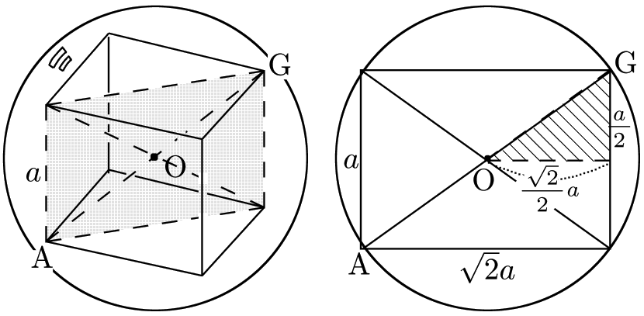
(正三角形“大”1 個から，正三角形“小”3 個を切り落とした六角形)



(正三角形)

D 球

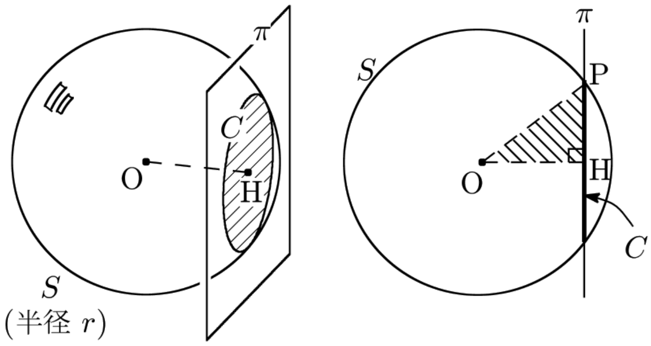
(1) 立方体と外接球



上右図の直角三角形より，外接球の半径は

$$\mathrm{OG} = \frac{\sqrt{3}}{2}a.$$

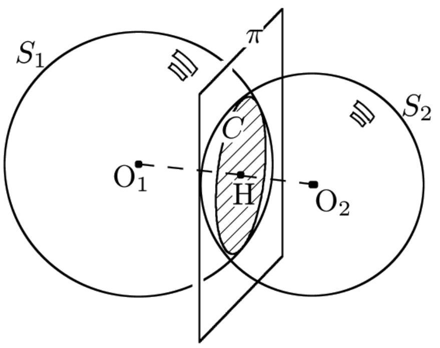
(2) 球と平面の交わり

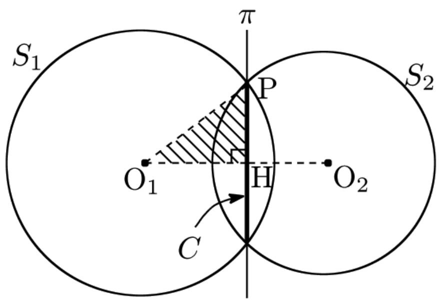


球面 S と平面 π の交わりは円周 C.

C の中心は O から π へに下ろした垂線の足 H であり，半径は直角三角形 OPH に注目して求めるとよい.

(3) 球と球の交わり



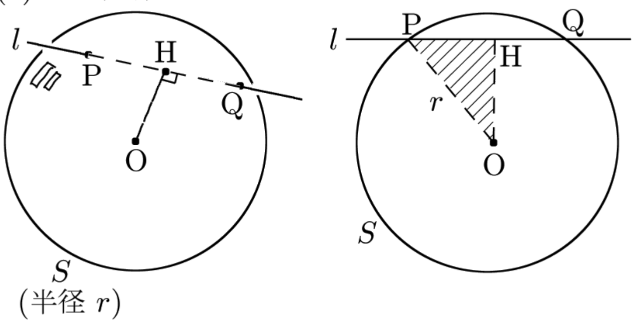


2 つの球面 S_1, S_2 の交わりは円周 C.

C を含む平面を π とすると，直線 O_1O_2 と π の交点 H が C の中心であり，H は O_1, O_2 から π へ下ろした垂線の足である.

〈注〉一般に，空間内においては，“面” と “面” の交わりは “線” となることが多い.

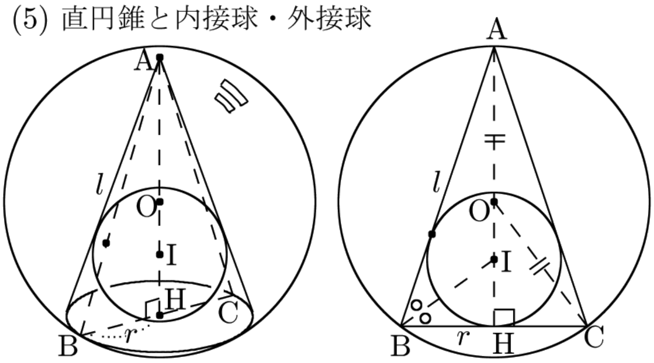
(4) 球と直線



球面 S が直線 l から切り取る線分 PQ の長さは，直角三角形 OPH を利用して求める．つまり，S の中心 O から l へ下ろした垂線 OH に注目する.

S と l が共有点をもつか否かを調べるときも，OH と S の半径 r の大小関係に注目する.

(5) 直円錐と内接球・外接球



外接球，内接球の中心 O，I は，いずれも頂点 A から底面に下ろした垂線 OH 上にある.

- I は ∠ABH の 2 等分線上にあるから

$$\mathrm{AI} : \mathrm{IH} = l : r.$$

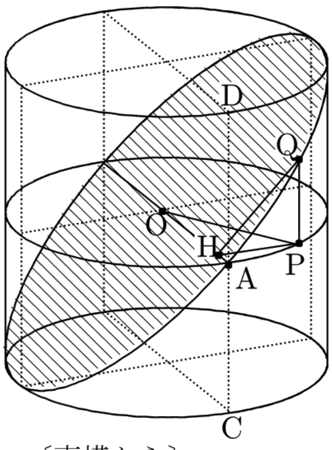
内接球の半径 ↑　母線 ↑　↑ 底円の半径

- A，C は外接球上の点だから

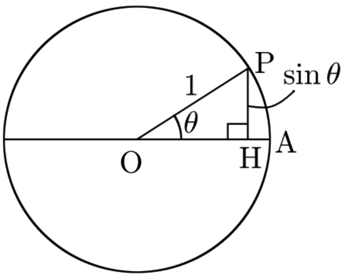
$$\mathrm{OA} = \mathrm{OC}.$$

E 円柱

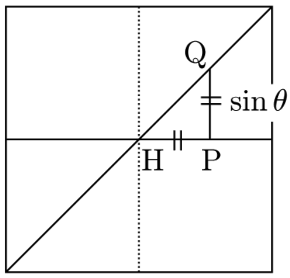
(1) 直円柱の断面 (Ⅲ C)
円柱を，その底面と斜めに (ここでは 45°) 交わる平面で切ると，切り口は「楕円」であり，側面の展開図には「サインカーブ」が現れる．



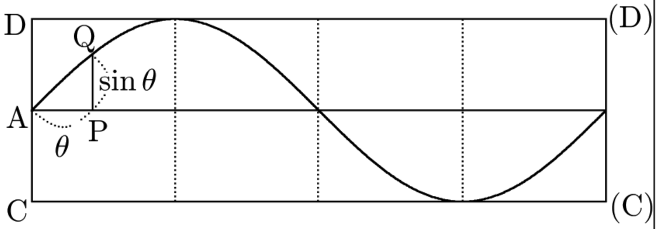
〔真上から〕



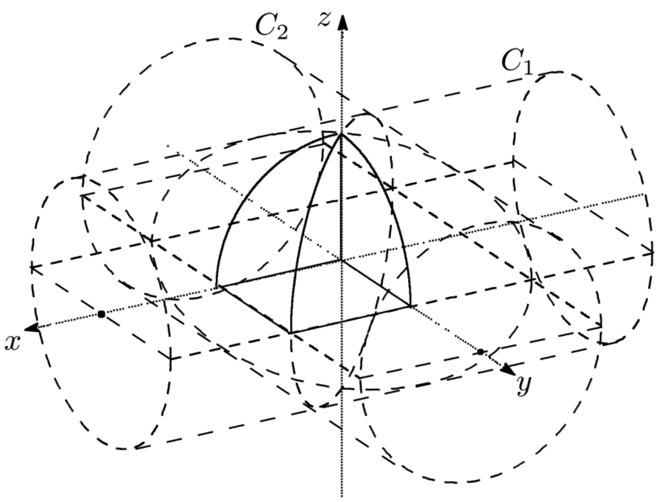
〔真横から〕



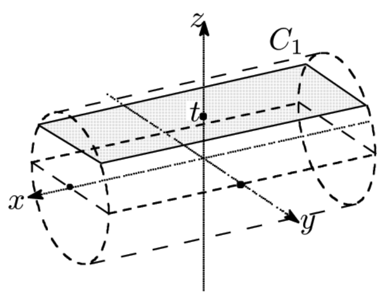
〔展開図〕

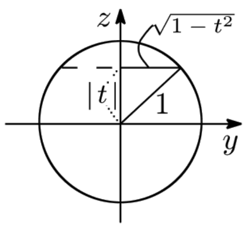


(2) 直円柱どうしの交わり (Ⅲ C)

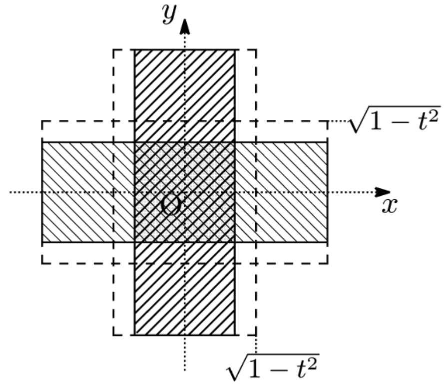


軸が直交する 2 つの直円柱 C_1, C_2 の共通部分 K を考える．(上図では，K の 8 分の 1 が実線で描いてある．)





円柱 C_1 の平面 $z=t$ $(-1 \leqq t \leqq 1)$ による断面は，上左図のような長方形であり，その“幅”は上右図より $2\sqrt{1-t^2}$ である．円柱 C_2 の断面も同様であるから，C_1, C_2 の共通部分 K の断面は，2 つの長方形の共通部分で下図の 部となる．この面積を積分すれば K の体積が求まる．(いわゆる“切ってから交わらせる”手法)



2 つの円柱側面の方程式は

$$C_1 : y^2+z^2=1, \qquad \cdots ①$$
$$C_2 : x^2+z^2=1. \qquad \cdots ②$$

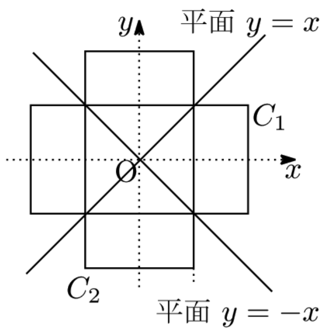
①, ②を連立すると，① − ② より

$$y^2-x^2=0 \text{ i.e. } y=\pm x.$$

よって 2 つの円柱側面の交わりは，平面

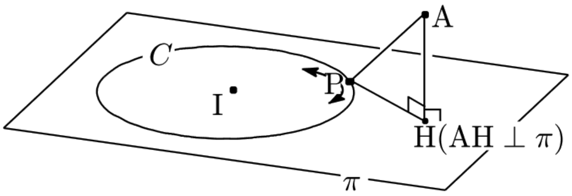
$$y=x,\ y=-x$$

上にある．よって前記 E (1) より，立体 K の表面の展開図にはサインカーブが現れる．

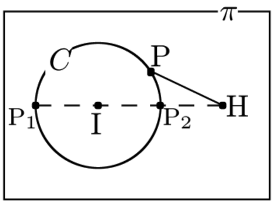


F 最短（最長）距離

(1) 定点と円周上の点との距離



定点 A と，平面 π 上の円 C 上を動く点 P の距離の最大・最小を考える際には．直角三角形 AHP に注目する．



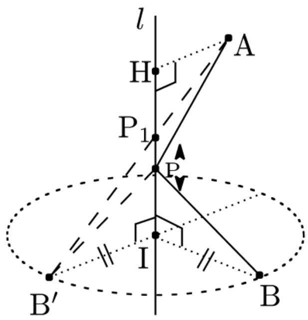
$\begin{pmatrix}\mathrm{P}=\mathrm{P_1}\text{で最大,}\\ \mathrm{P}=\mathrm{P_2}\text{で最小}\end{pmatrix}$

$$\underset{\text{空間内を動く}}{\mathrm{AP}^2} = \underset{\text{一定}}{\mathrm{AH}^2} + \underset{\text{平面上を動く}}{\mathrm{HP}^2}$$

だから，けっきょく HP の最大・最小に帰着される．

(2) 折れ線の長さ

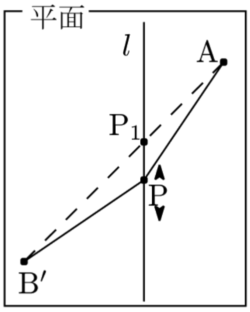
A，B は定点，P は定直線 l 上の動点とするとき，“折れ線”の長さ AP + PB の最小値を考える．



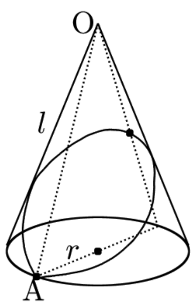
図のような定点 B′ (A, B′, l は共面) をとると

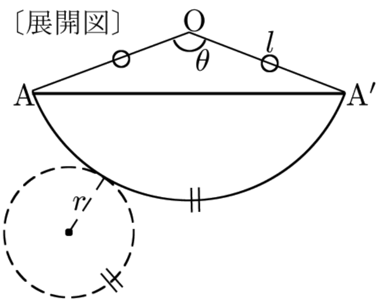
$$\mathrm{AP}+\mathrm{PB}=\mathrm{AP}+\mathrm{PB'}$$

だから，AP + PB は，$\mathrm{P}=\mathrm{P_1}$ (A, $\mathrm{P_1}$, B′は共線) のとき最小となる．



(3) 直円錐側面上の最短経路





○ 2 つの長さ ＋＋ が等しいことにより

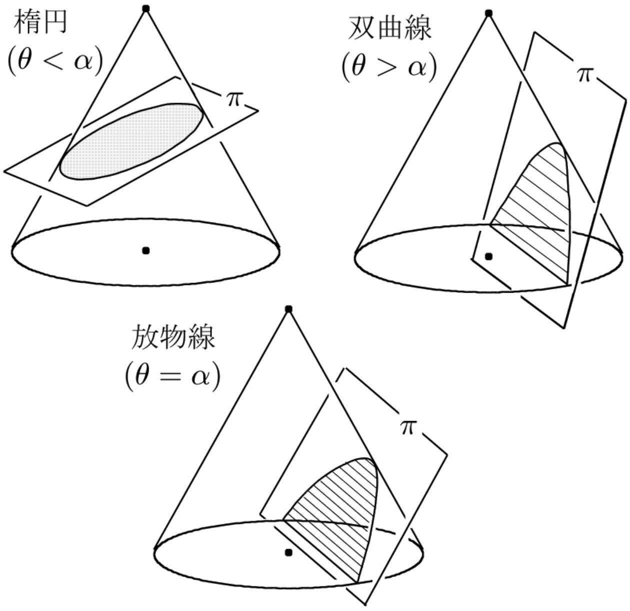
$$\frac{\theta}{2\pi} = \frac{r}{l} \begin{array}{l}\cdots\text{底円の半径}\\ \cdots\text{母線}\end{array}$$

○ 点 A をスタートして円錐側面上を通って A に戻る最短経路は，展開図における線分 AA′．(展開図を用いて最短経路を考えるこの手法は，直方体などでも利用できる．)

G 2 次曲線（円錐曲線）(Ⅲ C)

(1) 直円錐の断面

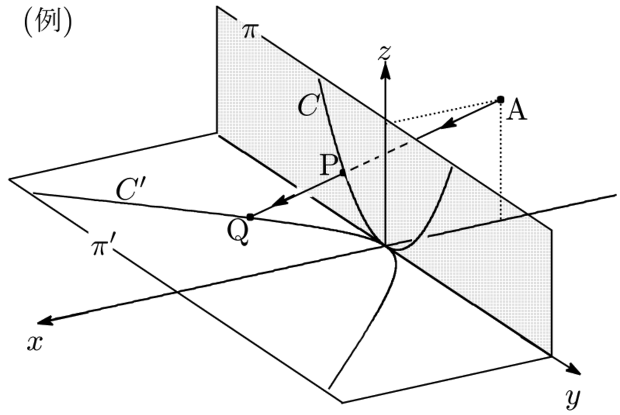
直円錐側面の平面 π による断面は，π の向きに応じて以下のような 2 次曲線となる．(母線と底面のなす角を α，π と底面のなす角を θ とする．)



(2) 射影

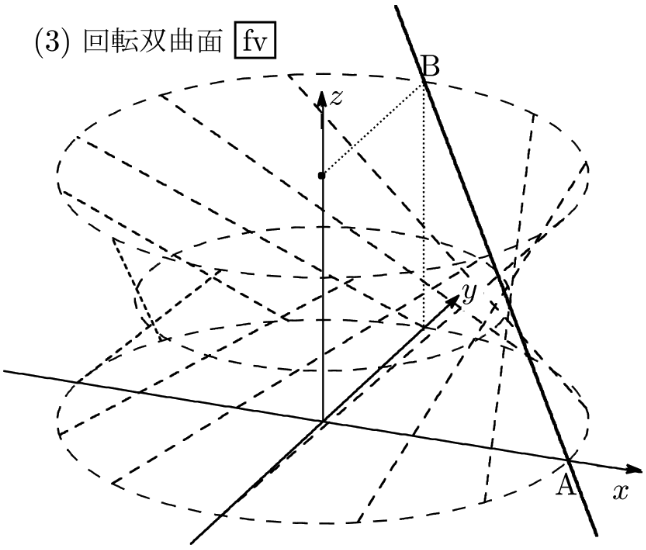
ある平面 π に含まれる2 次曲線を C とする．一般に，定点 A と，C 上の動点 P とを結ぶ直線が，別の平面 π' と交わる点を Q とすると，Q の軌跡 C' もまた2 次曲線である．

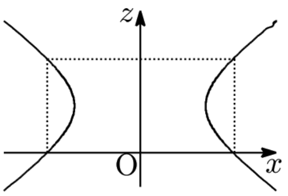
(例)



C : 放物線　　C' : 双曲線

(3) 回転双曲面 $\boxed{\text{fv}}$





z 軸とねじれの位置にある直線 AB を z 軸のまわりに回転してできる曲面は, “真横” から見ると (つまり xz 平面との交わりは) 双曲線になる．この曲面を「回転双曲面」という．