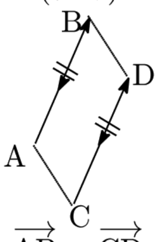
こんなに使える正射影

「垂直」を扱う際，「正射影ベクトル」が使えると断然有利!! でも使えなくてもまあなんとかなります．

A ベクトルとは？

(相等)



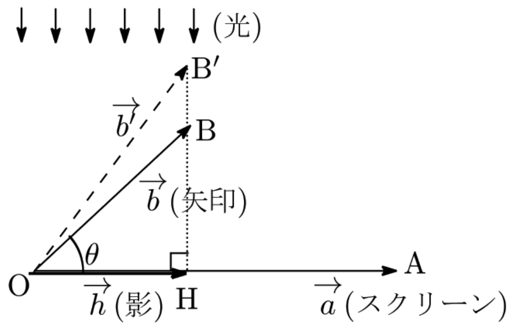
$\overrightarrow{\mathrm{AB}} = \overrightarrow{\mathrm{CD}}$

有向線分（矢印）の「向き」と「大きさ」だけを考えたものが**ベクトル**である．

〈注 1〉ベクトルを考える際は，矢印の「位置」の違いは無視する．

〈注 2〉ベクトルとは，「移動」，もしくは「変位」のようなものだと思えばわかりやすく，「相等」「和」「差」「実数倍」等の規則が自然にわかる．

B 内積の定義・意味



地面に置かれた“スクリーン” $\overrightarrow{a}$ の真上から太陽の光が降り注ぐとき，“矢印” $\overrightarrow{b}$ の“影” $\overrightarrow{h}$ (これも矢印) がスクリーンに映る．この影を用いると，**内積**のもつ図形的意味がよくわかる．

$$\text{内積}: \overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b} = \underbrace{\left|\overrightarrow{a}\right|}_{\text{スクリーン}}\underbrace{\left|\overrightarrow{b}\right|\cos\theta}_{\text{影の符号付長さ}}. \quad \cdots(\text{定義})$$

← 意味

$$\text{i.e. } \overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b} = \overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{h} \quad \cdots$$

ベクトル $\overrightarrow{h}$ を

「$\overrightarrow{b}$ の $\overrightarrow{a}$ への**正射影ベクトル**」

という．つまり，

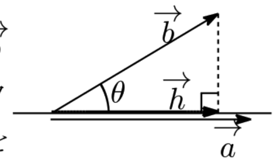
> 内積 $\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}$ とは，スクリーン $\overrightarrow{a}$ の長さに，正射影ベクトル $\overrightarrow{h}$ の ($\overrightarrow{a}$ と同じ向きを正とした) **符号付長さ**を掛けて得られる実数である．

2 点 B，B’ から直線 OA へ下ろした垂線の足が一致 (図の H) するとき

$$\begin{cases} \overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b} = \overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{h}, \\ \overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}' = \overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{h}. \end{cases}$$

$$\therefore\ \overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b} = \overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}'. \quad \cdots$$

C 正射影ベクトル



右図において，ベクトル $\overrightarrow{b}$ のベクトル $\overrightarrow{a}$ への正射影ベクトル $\overrightarrow{h}$ の ($\overrightarrow{a}$ と同じ向きを正とした) **符号付長さ**は，より

$$\left|\overrightarrow{b}\right|\cos\theta = \frac{\left|\overrightarrow{a}\right|\left|\overrightarrow{b}\right|\cos\theta}{\left|\overrightarrow{a}\right|} = \frac{\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}}{|\vec{a}|}. \quad \cdots$$

正射影ベクトル $\overrightarrow{h}$ は

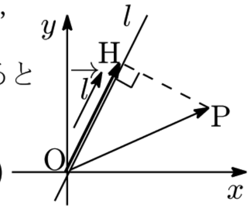
$$\overrightarrow{h} = \underbrace{\frac{\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}}{|\vec{a}|}}_{\text{符号付長さ}}\cdot\underbrace{\frac{\overrightarrow{a}}{\left|\overrightarrow{a}\right|}}_{\text{単位ベクトル}(\overrightarrow{a}\text{ と同じ向き})}$$

← いつでもこうして導けるように！

$$= \frac{\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}}{|\vec{a}|^2}\overrightarrow{a}. \quad \cdots(\text{準公式})$$

D 正射影ベクトルの使用例

(1) 点から直線への垂線の足



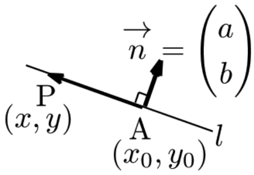
右図において，$l: y = 2x$, $\overrightarrow{l} = \begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$, P(5, 2) とすると

$$\overrightarrow{\mathrm{OH}} = \frac{\overrightarrow{l}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OP}}}{\left|\overrightarrow{l}\right|^2}\overrightarrow{l}\ (\ ) = \frac{1\cdot5+2\cdot2}{5}\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix} = \frac{9}{5}\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}.$$

これを用いれば，l に関する P の対称点の座標も瞬時に求まる．

(2) 点と直線の距離公式

まず，「法線ベクトルによる直線の表現」について予備解説しておく．



右図で，点 A を通り，$\overrightarrow{n}$ を法線ベクトルとする直線 l 上の点 P$(x,\ y)$ がみたすべき条件は，

$$\overrightarrow{n}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AP}} = 0.$$

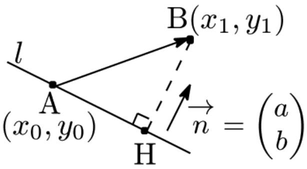
$$\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x-x_0\\y-y_0\end{pmatrix} = 0.$$

$$\therefore\ l: \underbrace{a(x-x_0)+b(y-y_0)}_{f(x)\text{ とおく}} = 0. \quad \cdots①$$

$c = -ax_0 - by_0$ とおくと

$$l: \underbrace{ax+by+c}_{\text{これも } f(x)} = 0. \quad \cdots②$$

以上をもとに距離公式を導こう．点 $\mathrm{B}(x_1,\,y_1)$ から直線 l へ下ろした垂線の足



をHとするとき，$\overrightarrow{\mathrm{HB}}$ は，$\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ の $\overrightarrow{n}$ への正射影ベクトルである．よって，$\overrightarrow{\mathrm{HB}}$ の ($\overrightarrow{n}$ と同じ向きを正とした) **符号付長さ**は，☆より

$$\frac{\overrightarrow{n}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AB}}}{\left|\overrightarrow{n}\right|}.$$

よってBと l の距離は

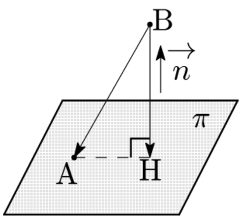
$$\left|\overrightarrow{\mathrm{HB}}\right|=\frac{\left|\overrightarrow{n}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AB}}\right|}{\left|\overrightarrow{n}\right|}$$
$$=\frac{|a(x_1-x_0)+b(y_1-y_0)|}{\sqrt{a^2+b^2}}$$
$$=\frac{|f(x_1,\,y_1)|}{\sqrt{a^2+b^2}}.\qquad(①より)$$

したがって，l が②のように表されていれば

$$\mathrm{BH}=\frac{|ax_1+by_1+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}.$$

(3)　点から平面への垂線の足

点 $\mathrm{A}(1,\,1,\,1)$ を通り，ベクトル $\overrightarrow{n}=\begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix}$ と垂直な平面を π とし，点 $\mathrm{B}(3,\,3,\,3)$ から π へ下ろした垂線の足をHとする．



$\overrightarrow{\mathrm{BH}}$ は $\overrightarrow{\mathrm{BA}}=\begin{pmatrix}-2\\-2\\-2\end{pmatrix}$ の $\overrightarrow{n}$ への正射影ベクトルである．よって，$\overrightarrow{\mathrm{BH}}$ の ($\overrightarrow{n}$ と同じ向きを正とした) 符号付長さは，☆より

$$\frac{\overrightarrow{n}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BA}}}{\left|\overrightarrow{n}\right|}=\frac{1\cdot(-2)+2\cdot(-2)+2\cdot(-2)}{\sqrt{1+4+4}}$$
$$=\frac{-10}{3}.$$

Bと π の距離は

$$\mathrm{BH}=\left|\frac{-10}{3}\right|=\frac{10}{3}.$$

また，★より

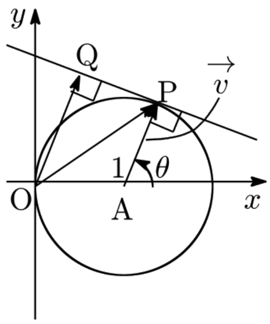
$$\overrightarrow{\mathrm{BH}}=\frac{\overrightarrow{n}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BA}}}{\left|\overrightarrow{n}\right|^2}\overrightarrow{n}=\frac{-10}{9}\begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix}.$$

$$\therefore\ \overrightarrow{\mathrm{OH}}=\overrightarrow{\mathrm{OB}}+\overrightarrow{\mathrm{BH}}$$
$$=\begin{pmatrix}3\\3\\3\end{pmatrix}+\frac{-10}{9}\begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix}.$$

よって，$\mathrm{H}\left(\frac{17}{9},\,\frac{7}{9},\,\frac{7}{9}\right)$.

(4)　垂足曲線

中心 $\mathrm{A}(1,\,0)$，半径1の円を C とし，C 上の点 $\mathrm{P}(1+\cos\theta,\,\sin\theta)$ における C の接線を l とする．$\mathrm{O}(0,\,0)$ から l へ下ろした垂線の足Qの座標を θ で表してみよう．



$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}$ は，$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\begin{pmatrix}1+\cos\theta\\\sin\theta\end{pmatrix}$ の $\overrightarrow{v}=\begin{pmatrix}\cos\theta\\\sin\theta\end{pmatrix}$ への正射影ベクトルであるから，★より

$$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=\frac{\overrightarrow{v}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OP}}}{\left|\overrightarrow{v}\right|^2}\overrightarrow{v}$$
$$=\frac{(1+\cos\theta)\cos\theta+\sin^2\theta}{1^2}\begin{pmatrix}\cos\theta\\\sin\theta\end{pmatrix}$$
$$=(1+\cos\theta)\begin{pmatrix}\cos\theta\\\sin\theta\end{pmatrix}.$$

(5)　ベクトル方程式

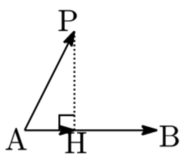
平面上で，異なる2定点A，Bと動点Pが

$$\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AP}}<\frac{1}{2}\mathrm{AB}^2$$

をみたすとき，点Pの存在範囲 D を求める．

Pから直線ABへ下ろした垂線の足をHとすると，●より

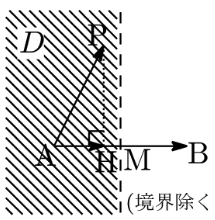
$$\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AP}}=\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AH}}.$$



よって与式は

$$\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AH}}<\mathrm{AB}\cdot\frac{1}{2}\mathrm{AB}.$$

したがって，$\overrightarrow{\mathrm{AH}}$ の ($\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ と同じ向きを正とした) 符号付長さは，$+\frac{1}{2}\mathrm{AB}$ より小さい．つまり，HはABの中点MよりAに近い側にあるから，求める D は右図．



(境界除く)

(他にもいろいろたくさん…)