[確率：ベースとなる問題]

以下の事象の確率を求めよ.

(1) 白球 4 個，黒球 6 個が入った袋から順に 3 個を取り出すとき，白球が 1 個，黒玉が 2 個取り出される確率.

(2) サイコロを 2 個投げるとき，2 つの目が連続する自然数である確率.

(3) A，B 2 人が繰り返し試合を行う．各試合において，A，B が勝つ確率はそれぞれ p, q $(p+q=1)$ である．7 回試合を行うとき，A の 4 勝 3 敗となる確率.

(4) 10 本中 3 本が当りのくじから，順に 1 本ずつ引く (引いたくじはもとに戻さない)．1 本目が外れで 2 本目が当りである確率.

(5) 10 本中 3 本が当たりのくじから，順に 1 本ずつ引く (引いたくじはもとに戻さない)．2 本目が当たりである確率.

(6) コインを繰り返し投げ，表が出たら終了とする．3 回目までに終了となる確率.

[解答]

(1) ○ 球をすべて区別したときの取り出す 3 個の組合せ: ${}_{10}C_3$ 通りの各々は等確率.

○ 白球 1 個の選び方 … ${}_4C_1$ 通り.

○ 黒球 2 個の選び方 … ${}_6C_2$ 通り.

○ 以上より，$\dfrac{{}_4C_1 \cdot {}_6C_2}{{}_{10}C_3} = \dfrac{4 \cdot 15}{10 \cdot 3 \cdot 4} = \dfrac{1}{2}$.

〈注〉問題文に「順に」とあったとしても,「組合せ」を用いてかまわない．それが等確率でありさえすれば.

$\boxed{C}$(1)〈注 2〉

(2) ○ サイコロ 2 個を A，B と区別したときの目の出方 : 6^2 通りの各々は等確率

○ 連続する 2 つの自然数の組合せは
$\{1, 2\}$, $\{2, 3\}$, $\{3, 4\}$, $\{4, 5\}$, $\{5, 6\}$
の 5 通り.

○ たとえば $\{1, 2\}$ のとき，サイコロ A，B の区別を考えると $\boxed{C}$(1)④
(A の目, B の目) = (1, 2), (2, 1)
の 2! 通りがある．(他の場合も同様)

○ 以上より，$\dfrac{5 \cdot 2!}{6^2} = \dfrac{5}{18}$. 同じ規準で

(3) A :「A が勝つ」，B :「B が勝つ」と表す.

$\left\{\begin{array}{l} AAAABBB \\ AAABABB \\ AABAABB \\ \vdots \\ BBBAAAA \end{array}\right.$

○ A, B の並べ方
… 右図のように ${}_7C_3$ 通り.

○ 上記各々の確率 … p^4q^3.

○ 以上より，${}_7C_3 \cdot p^4q^3 = 35p^4q^3$. $\boxed{D}$ 反復試行

(4) ○ 1 本目が外れである確率 … $\dfrac{7}{10}$. ← $\left\{\begin{array}{l} 当り：3 本 \\ 外れ：7 本 \end{array}\right.$

○ 上記の条件の下で 2 本目が当りである確率 … $\dfrac{3}{9}$. ← $\left\{\begin{array}{l} 当り：3 本 \\ 外れ：6 本 \end{array}\right.$

○ 以上より，$\dfrac{7}{10} \cdot \dfrac{3}{9} = \dfrac{7}{30}$.

〈注〉「$\dfrac{3}{9}$」は，うるさく言えば数学 C 範囲の条件付確率である.

$\boxed{G}$後半

(5) 1 本目が当りか，外れかで場合分けして

$$\frac{7}{10} \cdot \frac{3}{9} + \frac{3}{10} \cdot \frac{2}{9} = \frac{3}{10}.$$

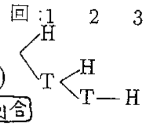
〈本解〉

○ 2 本目に 10 本のうちどれが出るかは等確率.

○ そのうち当りは 3 本. $\boxed{C}$(1)④

○ よって，$\dfrac{3}{10}$.

(6) 右図の 3 通りが考えられるから



$\dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{1}{2} = \dfrac{7}{8}$. $\boxed{C}$(2)

起こり易さの割合

〈注〉途中で表が出てもコインを 3 回までは投げると考えれば,

○ コインの出方 : 2^3 通りの各々は等確率.

○ そのうち条件をみたすもの
… $2^2 + 2 + 1 = 7$(通り).

として求められるが，いささか不自然である.

〈別解〉題意の事象の余事象は,「3 回まで裏ばかりが出る」であるから

$$1 - \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{7}{8}.$$

[確率：ベースとなる問題]

以下の事象の確率を求めよ.

(1) 白球 4 個，黒球 6 個が入った袋から順に 3 個を取り出すとき，白球が 1 個，黒玉が 2 個取り出される確率.

(2) サイコロを 2 個投げるとき，2 つの目が連続する自然数である確率.

(3) A，B 2 人が繰り返し試合を行う．各試合において，A，B が勝つ確率はそれぞれ p, q $(p+q=1)$ である．7 回試合を行うとき，A の 4 勝 3 敗となる確率.

(4) 10 本中 3 本が当りのくじから，順に 1 本ずつ引く (引いたくじはもとに戻さない)．1 本目が外れで 2 本目が当りである確率.

(5) 10 本中 3 本が当たりのくじから，順に 1 本ずつ引く (引いたくじはもとに戻さない)．2 本目が当たりである確率.

(6) コインを繰り返し投げ，表が出たら終了とする．3 回目までに終了となる確率.

〔解答〕

(1) ○ 球をすべて区別したときの取り出す3個の組合せ：

${}_{10}C_3$ 通りの各々は等確率．

○ 白球1個の選び方 … ${}_4C_1$ 通り．

○ 黒球2個の選び方 … ${}_6C_2$ 通り．

○ 以上より，$\dfrac{{}_4C_1\cdot{}_6C_2}{{}_{10}C_3}=\dfrac{4\cdot15}{10\cdot3\cdot4}=\dfrac{1}{2}$.

〈注〉問題文に「順に」とあったとしても,「組合せ」を用いてかまわない．それが等確率でありさえすれば．　C(1)〈注2〉

(2) ○ サイコロ2個をA，Bと区別したときの目の出方：6^2 通りの各々は等確率

○ 連続する2つの自然数の組合せは

$\{1, 2\}$，$\{2, 3\}$，$\{3, 4\}$，$\{4, 5\}$，$\{5, 6\}$

の5通り．

○ たとえば　$\{1, 2\}$　のとき，サイコロA，Bの区別を考えると　C(1)

(Aの目, Bの目) $=(1, 2), (2, 1)$

の $2!$ 通りがある．(他の場合も同様)

○ 以上より，$\dfrac{5\cdot2!}{6^2}=\dfrac{5}{18}$.　同じ規準で

(3) A：「Aが勝つ」，B：「Bが勝つ」と表す．

$\left\{\begin{array}{l} AAAABBB \\ AAABABB \\ AABAABB \\ \vdots \\ BBBAAAA \end{array}\right.$

○ A, B の並べ方

… 右図のように ${}_7C_3$ 通り．

○ 上記各々の確率 … p^4q^3.

○ 以上より，${}_7C_3\cdot p^4q^3=35p^4q^3$.　D 反復試行

(4) ○ 1本目が外れである確率 … $\dfrac{7}{10}$. ← $\left\{\begin{array}{l}\text{当り：3本}\\ \text{外れ：7本}\end{array}\right.$

○ 上記の条件の下で2本目が当りである確率 … $\dfrac{3}{9}$. ← $\left\{\begin{array}{l}\text{当り：3本}\\ \text{外れ：6本}\end{array}\right.$

○ 以上より，$\dfrac{7}{10}\cdot\dfrac{3}{9}=\dfrac{7}{30}$.

〈注〉「$\dfrac{3}{9}$」は，うるさく言えば数学C範囲の条件付確率である．　G後半

(5) 1本目が当りか，外れかで場合分けして

$$\frac{7}{10}\cdot\frac{3}{9}+\frac{3}{10}\cdot\frac{2}{9}=\frac{3}{10}.$$

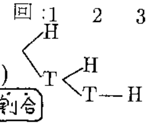
〈本解〉

○ 2本目に10本のうちどれが出るかは等確率．

○ そのうち当りは3本．　C(1)

○ よって，$\dfrac{3}{10}$.

(6) 右図の3通りが考えられるから



$\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{2}=\dfrac{7}{8}$.　C(2)

起こり易さの割合

〈注〉途中で表が出てもコインを3回までは投げると考えれば，

○ コインの出方：2^3 通りの各々は等確率．

○ そのうち条件をみたすもの

… $2^2+2+1=7$(通り).

として求められるが，いささか不自然である．

〈別解〉題意の事象の余事象は,「3回まで裏ばかりが出る」であるから

$$1-\left(\frac{1}{2}\right)^3=\frac{7}{8}.$$

[ベースとなる基本問題]

(1) 区別のない8コのボールを、区別がなく空でない3つの組に分ける仕方。

(2) 1, 2, 3, 4, 5 の5枚のカードのうち3枚を並べる仕方。

(3) A, B, Cの3つのサイコロを1回ずつ投げるときの目の出方

(4) 1, 2, 3, 4, 5の5枚のカードから同時に2枚を抜き出す組合せ。

(5) a, a, a, b, b を1列に並べる仕方。

(6) 1, 2, 3, 4, 5 の5枚のカードのうち3枚を並べて作る3桁の偶数

(7) A, B, C の3つのサイコロを1回ずつ投げるとき，目の和が6になるような出方。

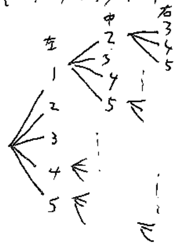
(8) 0, 1, 2, 3, 4 の5枚のカードから，3枚を並べて作る3桁の偶数。

〔略解〕

(1) 3つの組に分けるボールの個数を考えて　全て書出す

{1, 1, 6}, {1, 2, 5}, {1, 3, 4},
{2, 2, 4}, {2, 3, 3}　の $\underline{5\text{とおり}}$.

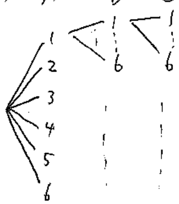
(2)



${}_5P_3 = 5 \times 4 \times 3$ とおり.//

順列

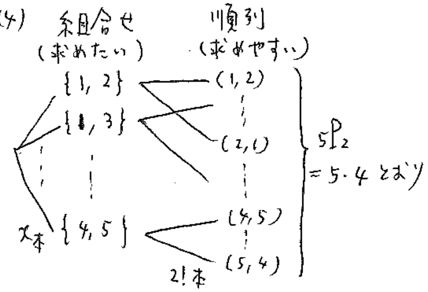
(3)



6^3 とおり.//

重複順列

(4)



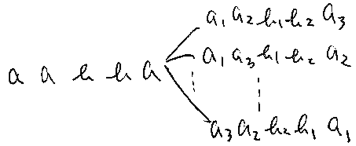
$x \times 2! = 5 \cdot 4$

$\therefore\ x = {}_5C_2 = \dfrac{5 \cdot 4}{2!}$ とおり.//　組合せ

(5) ○ a_1, a_2, a_3, b_1, b_2 と区別すると

$5!$ とおり.

○



求める x とおりの各々に対して,
a 3つを a_1, a_2, a_3 と区別し,
b 2つを b_1, b_2 と区別すると

$3! \cdot 2!$ とおり

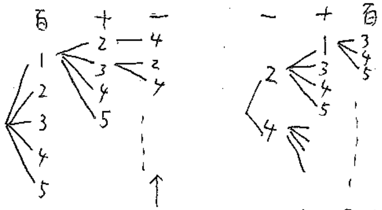
に分かれる.

○ よって, $x \times 3! \cdot 2! = 5!$

$\therefore\ x = \dfrac{5!}{3!\,2!}$ とおり.//

同じものを含む順列

(6) 〔失敗〕　〔成功〕



枝分かれが均等でない!

$2 \times 4 \times 3$ とおり.//

条件のきツイ所から数える.

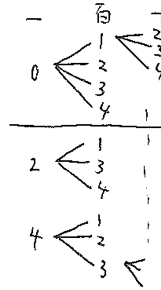
(7) まず初めに, 和が6になる目の組合せを考える.

{1, 1, 4} ……3 とおり（並べ方）
{1, 2, 3} ……3! 〃
{2, 2, 2} ……1 〃

2段階に分けて

よって　$3 + 3! + 1$ とおり.

(8) 〔解1: 場合分け〕



$1 \times 4 \times 3$

場合分け

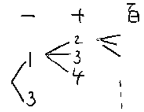
$2 \times 3 \times 3$

$12 + 18 = \underline{30\text{とおり}}$.

〔解2: 補集合利用〕

○ 3桁の数の総数 …… $4 \times 4 \times 3 = 48$ とおり.

○ 3桁の奇数



$2 \times 3 \times 3 = 18$ とおり.

○ よって偶数を x とおりとすると

$x + 18 = 48$.　$\therefore\ x = 48 - 18 = \underline{30\text{とおり}}$

[期待値について]

X (確率変数) $\longleftrightarrow$ $\boxed{\text{事象}}$ $\longrightarrow$ 確率

コレが中心!!

(例)「1, 2, 3, …, n の n 枚のカードから2枚をとり出す．そのうち大きい方の数を X とする．ただし，$n \geq 2$ とする．

(1) X の期待値 $E(X)$ を求めよ．

(2) $Y = 2X - n$ とする．Y の期待値 $E(Y)$ を求めよ．」

[解] とり出す2枚の組合せ：${}_nC_2$ とおりの各々は等確率．

(1) ◦ $X = k$ ($k = 2, 3, \cdots, n$) のとき，小さい方は $1 \sim k-1$ の $k-1$ とおり．

◦ $\therefore\ P(X=k) = \dfrac{k-1}{{}_nC_2}$．

◦ $\therefore\ E(X) = \displaystyle\sum_{k=2}^{n} k \cdot P(X=k)$

$= \dfrac{1}{{}_nC_2} \displaystyle\sum_{k=2}^{n} k(k-1)$

⋮

$= \dfrac{2}{n(n-1)} \cdot \dfrac{(n-1)n(n+1)}{3}$

$= \dfrac{2}{3}(n+1)$．//

(2) 〈方針〉

(1) は

$X = k \longrightarrow$ 事象 $\begin{cases} \text{大}: k \\ \text{小}: 1 \sim k-1 \end{cases}$

の向きに考えてできたが…

(2) では

$Y = 2k - n = l \rightarrow k = \underbrace{\dfrac{n+l}{2}}$

$n+l$ の奇，偶で場合分け??

となり難しい．

そこで

$Y = 2k - n \leftarrow$ 事象 $\begin{cases} \text{大}: k \\ \text{小}: 1 \sim k-1 \end{cases}$

の向きに考える．とにかく

$\boxed{\text{事象}}$ が中心！

◦ $k = 2, 3, 4, \cdots, n$ に対して

$P(Y = 2k-n) = P(X=k)$

事象としては同じ．

$= \dfrac{k-1}{{}_nC_2}$．

◦ $\therefore\ E(Y) = \displaystyle\sum_{k=2}^{n} (2k-n) \cdot P(Y = 2k-n)$

$= \dfrac{1}{{}_nC_2} \displaystyle\sum_{k=2}^{n} (2k-n)(k-1)$

⋮

$= \dfrac{2}{n(n-1)} \cdot \dfrac{n(n-1)(n+4)}{6} = \dfrac{n+4}{3}$．//

〈参考〉(↑)

期待値の性質を用いれば

数学C

$E(Y) = E(2X - n)$

$= 2E(X) - n$

$= 2 \cdot \dfrac{2}{3}(n+1) - n = \dfrac{n+4}{3}$．//

[整数係数整方程式の有理数解]

「3次方程式

$$ax^3+bx^2+cx+d=0\ (a, b, c, d \in \mathbb{Z}) \quad \cdots (*)$$

が有理数

$$\frac{m}{n}\ (m, n \text{は互いに素な整数で} n>0)$$

を1つの解とするならば

$$m|d,\ n|a$$

であることを示せ.」

〔解〕

$\frac{m}{n}$ が(*)の1つの解であることより

$$a\left(\frac{m}{n}\right)^3+b\left(\frac{m}{n}\right)^2+c\cdot\frac{m}{n}+d=0.$$

$$am^3+bm^2n+cmn^2+dn^3=0. \quad \cdots ①$$

①より

$$m\times(\text{整数})=dn^3.$$

この等式において,

$m|$左辺.

$\therefore m|$右辺.

しかるに m と n^3 は $\overbrace{\text{互いに素}}^{\text{共通素因数なし}}$ だから,

$$m|d.$$

また, ①より

$$n\times(\text{整数})=am^3.$$

上と同様にして

$$n|a. \quad \square$$

〈注〉(*)の左辺が「3次式」でなくても「整式」であれば, 同様な結論が得られる. つまり, 整数係数整方程式の有理数解は,

$$\pm\frac{\text{定数項の約数}}{\text{最高次の項の係数の約数}}$$

以外にはない. (もちろん, 必ずしも有理数解があるとは限らない.)

[よく用いる同値変形]

- $ab = 0 \iff a = 0$ or $b = 0$.

  (「行列」に関しては成り立たない！)

- $a, b \in \mathbb{R}$ のとき

  $a^2 + b^2 = 0 \iff a = 0$ かつ $b = 0$.

- $|a| + |b| = 0 \iff a = 0$ かつ $b = 0$.

- $a, b \in \mathbb{R}$ のとき

  $ab > 0 \iff a, b$ は同符号

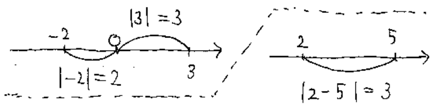
- $a, b \in \mathbb{R}$ のとき

$$\begin{cases} a + b > 0 \\ \text{かつ} \\ ab > 0 \end{cases} \iff \begin{cases} a > 0 \\ \text{かつ} \\ b > 0 \end{cases}.$$

「絶対値」について

［定義］

$|x| \overset{\text{def}}{=}$ 数直線上での原点 O と x の距離.



〈注〉 $|a-b|$ は, 数直線上での 2点 a, b の距離を表す.

［定理］

$$|a| = \begin{cases} a & (a \geq 0 \text{ のとき}), \\ -a & (a \leq 0 \text{ のとき}). \end{cases} \quad \cdots ①$$

［よく用いる同値変形］（文字は実数）

- $|a| = |b| \Leftrightarrow a = \pm b \Leftrightarrow a^2 = b^2$.
- $|a| = b \Leftrightarrow b \geq 0,\ a = \pm b$.
- $|a| > |b| \Leftrightarrow a^2 > b^2$.
- $|a| < b \Leftrightarrow \begin{cases} b > 0 \\ -b < a < b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b > 0 \\ a^2 < b^2 \end{cases}$.

〈注〉「$-b < a < b$」から「$b > 0$」は導かれる.

例：$|x| < 3 \Leftrightarrow -3 < x < 3 \Leftrightarrow x^2 < 9$.

- $|a| > b \Leftrightarrow \begin{cases} b < 0 \ \text{(or)} \\ a < -b \ \text{(or)} \ b < a \end{cases}$ 「さもなくば」 「または」

$\Leftrightarrow \begin{cases} b < 0 \ \text{or} \\ a^2 > b^2 \end{cases}$.

例：$|x| > 3 \Leftrightarrow x < -3,\ 3 < x$.

- $|a| = \sqrt{b}\ (b \geq 0) \Leftrightarrow a^2 = b$.

〈注〉「$a^2 = b$」から「$b \geq 0$」は導かれる.

［その他の性質］（文字は実数）

- $|a|^2 = a^2$.
- $\sqrt{a^2} = |a|$. $\cdots ②$
- $a = \begin{cases} \sqrt{a^2} & (a \geq 0) \\ -\sqrt{a^2} & (a \leq 0) \end{cases}$. $(\because ①, ②)$
- $-|a| \leq a \leq |a|$.

[整式の一致]

$$\underbrace{ax^2+bx+c}_{f(x)\text{とおく.}}=0 \quad \cdots ①$$

2次以下の整式 $f(x)$ に関する等式①が異なる $\underset{2+1}{3}$ 個の x の値 α, β, γ について成り立つとする.

α, β は2次方程式①の異なる2解だから

$$f(x) \overset{\text{式として一致.}}{=} a(x-\alpha)(x-\beta) \quad \cdots ②$$

と因数分解（式変形）できる. これと, ①が $x=\gamma$ についても成り立つことから

$$a(\gamma-\alpha)(\gamma-\beta) \overset{\text{数として等しい}}{=} 0.$$

$\gamma-\alpha \neq 0,\ \gamma-\beta \neq 0$ だから,

$$a=0.$$

これと②より

$$f(x) \overset{\text{式として.}}{=} 0.$$

すなわち

「①は x についての恒等式である.」

$(a=b=c=0.)$

同様にして, 自然数 n に対して

「x の n 次以下の整式に関する等式が, x の異なる $n+1$ 個の値について成立する」

ならば

「その等式は x についての恒等式である.」

[相加平均≧相乗平均の一般証明] ⓐ

$P(n)$：「$x_1, x_2, \cdots, x_n > 0$ なる任意の $x_1, x_2, \cdots, x_n$ に対して、

$$\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n} \geqq \sqrt[n]{x_1x_2\cdots x_n}$$」

を $n=2, 3, 4, \cdots$ について示す。

◦ $P(2)$：「$x_1, x_2 > 0$ ならば

$$\frac{x_1+x_2}{2} \geqq \sqrt{x_1x_2}$$」を示す。

$$\text{左辺}-\text{右辺} = \frac{1}{2}(x_1+x_2-2\sqrt{x_1x_2})$$
$$= \frac{1}{2}(\sqrt{x_1}-\sqrt{x_2})^2 \geqq 0.$$

よって $P(2)$ は成立。

◦ m を固定する。

$P(2^m)$ を仮定し、$P(2^{m+1})$ を示す。

$x_1, x_2, \cdots, x_{2^{m+1}} > 0$ のとき

$$\frac{x_1+x_2+\cdots+x_{2^{m+1}}}{2^{m+1}}$$
$$= \frac{1}{2}\left(\frac{x_1+x_2+\cdots+x_{2^m}}{2^m} + \frac{x_{2^m+1}+\cdots+x_{2^{m+1}}}{2^m}\right)$$
$$\geqq \frac{1}{2}\left(\sqrt[2^m]{x_1x_2\cdots x_{2^m}} + \sqrt[2^m]{x_{2^m+1}\times\cdots\times x_{2^{m+1}}}\right) \quad (\because P(2^m))$$
$$\geqq \sqrt{\sqrt[2^m]{x_1x_2\cdots x_{2^m}}\ \sqrt[2^m]{x_{2^m+1}\times\cdots\times x_{2^{m+1}}}}$$
$$= \sqrt[2^{m+1}]{x_1x_2\cdots x_{2^m}\times x_{2^m+1}\times\cdots\times x_{2^{m+1}}}.$$

よって $P(2^{m+1})$ も正しい。

◦ n を固定する。

$P(n+1)$ を仮定し $P(n)$ を示す。

$P(n+1)$：$\dfrac{x_1+x_2+\cdots+x_{n+1}}{n+1} \geqq \sqrt[n+1]{x_1x_2\cdots x_{n+1}}$

$(x_1, x_2, \cdots, x_{n+1} > 0)$ において、

x_{n+1} は任意の正数であるから

$$x_{n+1} = \frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}$$

とおくと

$$\text{左辺} = \frac{1}{n+1}\left(x_1+x_2+\cdots+x_n+\frac{x_1+\cdots+x_n}{n}\right)$$
$$= \frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n} \quad (=\alpha とおく),$$

$$\therefore\ \alpha \geqq \sqrt[n+1]{x_1x_2\cdots x_n\alpha}$$
$$\alpha^{n+1} \geqq x_1x_2\cdots x_n\alpha,$$
$$\alpha^n \geqq x_1x_2\cdots x_n.$$

よって

$$\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n} \geqq \sqrt[n]{x_1x_2\cdots x_n}.$$

したがって、$P(n)$ も正しい。

◦ 以上より $P(n)$ $(n=2, 3, \cdots)$ が示された。□

[1の虚3乗根"ω"について]

$x^3 = 1 \quad \cdots ①$

を変形すると

$(x-1)(x^2+x+1) = 0$

i.e. $\begin{cases} x = 1 \text{ or} \\ x^2+x+1 = 0 \quad \cdots ② \end{cases}$

よって①の3つの解は

$x = 1,\ \dfrac{-1 \pm \sqrt{3}i}{2}.$

$\omega = \dfrac{-1+\sqrt{3}i}{2}$ $\left(\text{i.e. } \overline{\omega} = \dfrac{-1-\sqrt{3}i}{2} \right)$ とおく.

逆でも以下同様.

∘ ωは①の1つの解だから

$\omega^3 = 1. \quad \cdots ①'$

∘ ωは②の1つの解だから

$\omega^2 + \omega + 1 = 0. \quad \cdots ②'$

∘ $\omega, \overline{\omega}$ は②の2つの解だから

$$\left(\begin{aligned} x^2+x+1 &= 1 \cdot (x-\omega)(x-\overline{\omega}) \\ &= x^2 - (\omega+\overline{\omega})x + \omega\overline{\omega} \end{aligned} \right.$$

よって…)

解と係数の関係より

$\begin{cases} \omega + \overline{\omega} = -1, & \cdots ③ \\ \omega\overline{\omega} = 1. & \cdots ④ \end{cases}$

③と②'より

$\overline{\omega} = -\omega - 1 = \omega^2.$

また, ④と①'からでも

$\overline{\omega} = \dfrac{1}{\omega} = \dfrac{\omega^3}{\omega} = \omega^2.$

〈領域 $xy \leq 1$ の描き方〉

〔解1：xの範囲で分ける〕

i) $x>0$のとき，

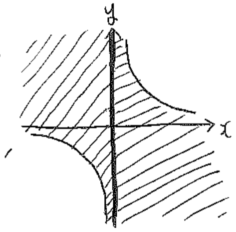
$y \leq \frac{1}{x}$.

ii) $x<0$のとき，

$y \geq \frac{1}{x}$.

iii) $x=0$のとき，

yは任意.



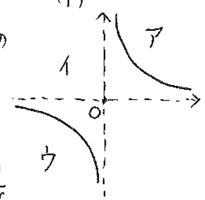
i)〜iii)より右図.

〔解2：「正領域，負領域」〕

与式を変形すると

$f(x,y) := xy-1 \leq 0$. …(＊)

ここで，xy平面上の各点(x,y)に対する$f(x,y)$の符号を考える.



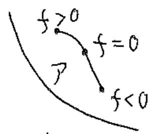
。$f(x,y)=0$ i.e. $y=\frac{1}{x}$

をみたす点(x,y)は，上図の曲線を描く.

。この曲線によって，xy平面全体はア，イ，ウの3つの領域（境界除く）に分けられる.

。各領域内において，$f(x,y)$の符号は不変である.

なぜなら，仮に1つの領域内に$f>0$，$f<0$となる点がどちらも含まれていたとすると，その2点を結ぶ曲線上のどこかで$f=0$と



なるが，$f=0$となる点は境界の曲線上にしかないから不合理である.

。領域イに属する1点，たとえば原点$(0,0)$の座標を$f(x,y)$に代入すると

$f(0,0)=-1<0$.

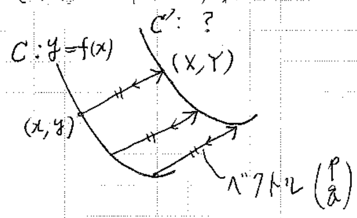
よって，領域イ内のすべての点に対して，$f(x,y)<0$が成り立つ.

このイのような領域のことを「$f(x,y)$の負領域」という.

。境界の曲線を越えると，$f(x,y)$は符号を変えるから，アとウは「$f(x,y)$の正領域」である.

。以上より，(＊)が表す領域，すなわち$f(x,y)<0$ or $f(x,y)=0$をみたす点(x,y)の範囲は，〔解1〕の答と同じものになる．//

[グラフの平行移動]



$$\begin{cases} X = x + p, \\ Y = y + q \end{cases}$$

i.e. $\begin{cases} x = X - p, \\ y = Y - q. \end{cases}$

これと $y = f(x)$ より，(X, Y) が

みたす条件は

$$Y - q = f(X - p).$$

この「X, Y」を，改めて「x, y」と

書き換えると…

「

$$C : \boxed{y} = f(x)$$

$\downarrow$ ベクトル $\begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}$ だけ平行移動

$$C' : \boxed{y - q} = f(x - p)$$

」

$\left.\begin{array}{l} x \text{ を } x - p \text{ に,} \\ \boxed{y} \text{ を } \boxed{y - q} \text{ に} \end{array}\right\}$ 換えればよい．

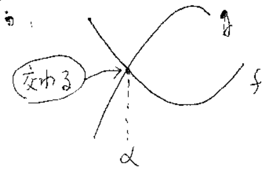
〈注〉曲線 $f(x, y) = 0$ についても

同様．

[共有点と解の関係]

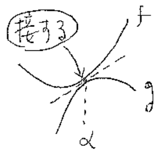
（以下において，関数はすべて整関数とする．）

・



$f(x)-g(x)=(x-\alpha)(\cdots\cdots)$

・



$\cdots$ ①

$f(x)-g(x)=(x-\alpha)^2(\cdots\cdots)$ $\cdots$ ②

（方程式 $f(x)=g(x)$ は，$x=\alpha$ を重解としてもつ．）

[証明]

① $\Leftrightarrow \begin{cases} f(\alpha)=g(\alpha) \\ f'(\alpha)=g'(\alpha) \end{cases}$ であり，

$P(x)=f(x)-g(x)$ とおくと，これは

$P(\alpha)=0,\ P'(\alpha)=0$ $\cdots$ ①′

と同値．また，

② $\Leftrightarrow$ $P(x)$ が $(x-\alpha)^2$ で割り切れる． $\cdots$ ②′

そこで，①′ $\Leftrightarrow$ ②′ を示す．

$P(x)=(x-\alpha)^2Q(x)+a(x-\alpha)+b$

とおくと，

$P(\alpha)=b$．

また，両辺を x で微分すると，

$P'(x)=2(x-\alpha)Q(x)+(x-\alpha)^2Q'(x)+a$，

$\therefore\ P'(\alpha)=a$．

よって，$P(x)$ を $(x-\alpha)^2$ でわった余りは

$P'(\alpha)(x-\alpha)+P(\alpha)$． $\cdots$ ③

③のもとで考えると，

①′ $\Leftrightarrow$ ②′． □

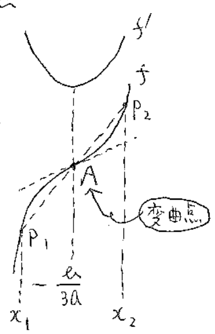
[3次関数のグラフ]

$f(x)=ax^3+bx^2+cx+d\ (a>0)$ とおく.

$f'(x)=3ax^2+2bx+c$

$\quad =3a\left(x+\frac{b}{3a}\right)^2+\underset{\sim\sim\sim}{c-\frac{b^2}{3a}}$

よって $A\left(-\frac{b}{3a}, f\left(-\frac{b}{3a}\right)\right)$ において接線の傾きは最小となる.



A を通り曲線 $C: y=f(x)$ と他の2点を共有する直線 $y=mx+n$ を考え, 右のように x_1, x_2 をとると, 方程式

$f(x)=mx+n$

i.e. $ax^3+bx^2+(c-m)x+(d-n)=0$

の3解が $x_1, x_2, -\frac{b}{3a}$ だから,

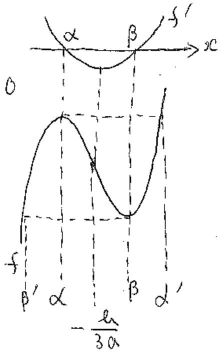
$x_1+x_2-\frac{b}{3a}=-\frac{b}{a}$.

$\therefore \frac{x_1+x_2}{2}=\frac{-\frac{b}{a}+\frac{b}{3a}}{2}$

$\quad =-\frac{b}{3a}$.

よって A は線分 P_1P_2 の中点だから C は点 A に関して対称な曲線である.

次に, $\underset{\sim\sim\sim}{c-\frac{b^2}{3a}}<0$ のとき, $f(x)$ は極大値, 極小値をもつ. 図のように α, β, α' をとると



方程式 $f(x)=f(\alpha)$,

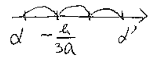
i.e. $ax^3+bx^2+cx+d-f(\alpha)=0$

の3解が $\underset{\text{接点}\Leftrightarrow\text{重解}}{\alpha, \alpha}, \alpha'$ だから

$\alpha+\alpha+\alpha'=-\frac{b}{a}$.

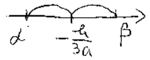
$\therefore \frac{2\alpha+1\cdot\alpha'}{1+2}=-\frac{b}{3a}$.

よって右図の位置関係,

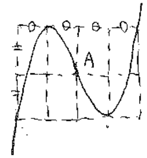


β と β' についても同様であり,

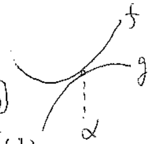
$\frac{\alpha+\beta}{2}=-\frac{b}{3a}$ でも



あるから, 右図



[接点と重解.]



f, g が $x=\alpha$ で $\boxed{\text{接する}}$

$\Leftrightarrow f(\alpha)=g(\alpha),\ f'(\alpha)=g'(\alpha)$

($P(x)=f(x)-g(x)$ とおくと)

$\Leftrightarrow P(\alpha)=P'(\alpha)=0$ ($P(x)$が整関数のとき)

$\overset{(*)}{\Leftrightarrow}$ $P(x)=(x-\alpha)^2(\cdots\cdots)$ と表せる

$\Leftrightarrow$ 方程式 $f(x)=g(x)$ は $x=\alpha$ を $\boxed{\text{重解}}$ とする.

[(*)の証明]

$P(x)=(x-\alpha)^2Q(x)+a(x-\alpha)+b$

とおくと, $P(\alpha)=b$. …①

両辺を x で微分すると

ここだけ数Ⅲ

$P'(x)=2(x-\alpha)Q(x)+(x-\alpha)^2Q'(x)+a$.

$\therefore P'(\alpha)=a$. …②

①, ② より, $P(x)$ を $(x-\alpha)^2$ で割ったときの余り $R(x)$ は

$R(x)=P'(\alpha)(x-\alpha)+P(\alpha)$

これを用いると

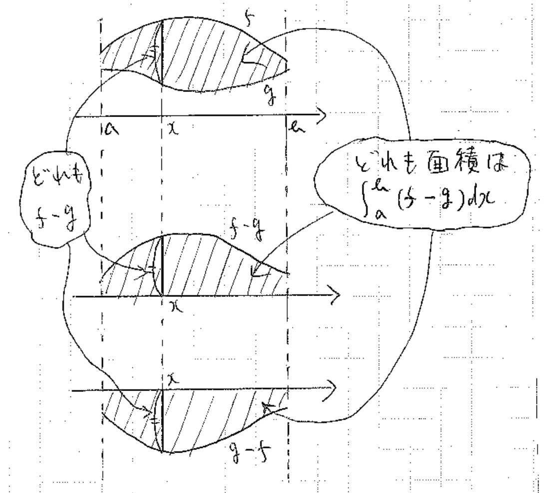
$P(x)$ が $(x-\alpha)^2$ で割り切れる

$\Leftrightarrow R(x)=0$ (式として一致)

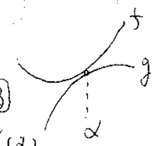
$\Leftrightarrow P'(\alpha)=0,\ P(\alpha)-\alpha P'(\alpha)=0$

$\Leftrightarrow P(\alpha)=P'(\alpha)=0$. □

[2曲線が囲む部分の面積]



[接点と重解]



f, g が $x=\alpha$ で $\boxed{\text{接する}}$

$\Leftrightarrow$ $f(\alpha)=g(\alpha),\ f'(\alpha)=g'(\alpha)$

($P(x)=f(x)-g(x)$ とおくと)

$\Leftrightarrow$ $P(\alpha)=P'(\alpha)=0$ ($P(x)$ が整関数のとき)

$\overset{(*)}{\Leftrightarrow}$ $P(x)=(x-\alpha)^2(\cdots\cdots)$ と表せる

$\Leftrightarrow$ 方程式 $f(x)=g(x)$ は $x=\alpha$ を $\boxed{\text{重解}}$ とする.

[(*) の証明]

$P(x)=(x-\alpha)^2Q(x)+a(x-\alpha)+b$

とおくと, $P(\alpha)=b$. $\cdots$ ①

両辺を x で微分すると

$P'(x)=2(x-\alpha)Q(x)+(x-\alpha)^2Q'(x)+a$.

$\therefore\ P'(\alpha)=a$. $\cdots$ ②

①, ② より, $P(x)$ を $(x-\alpha)^2$ で割ったときの余り $R(x)$ は

$R(x)=P'(\alpha)(x-\alpha)+P(\alpha)$

これを用いると

$P(x)$ が $(x-\alpha)^2$ で割り切れる

$\Leftrightarrow$ $R(x)=0$ (式として一致)

$\Leftrightarrow$ $P'(\alpha)=0,\ P(\alpha)-\alpha P'(\alpha)=0$

$\Leftrightarrow$ $P(\alpha)=P'(\alpha)=0$. □

$a_{n+1} = pa_n + q^n$ 型漸化式

例題 1

$$a_1 = 1, \quad \cdots ①$$

$$a_{n+1} = 3a_n + 2^n \quad \cdots ②$$

で定まる数列 (a_n) の一般項を求めよ.

〔解法 1：特殊解を利用→等比型へ〕

〈着眼〉

$$\underbrace{a_{n+1} = 3a_n}_{\text{等比型}} + \underbrace{2^n}_{\text{ジャマ}} \quad \cdots ②$$

〈方針〉

ジャマな「2^n」と類似の「$\alpha{\cdot}2^n$」の中で，②を満たすもの（②の特殊解）を（①は無視して）見つける.

〈らくがき〉

数列 $(\alpha{\cdot}2^n)$ が②を満たすための条件は

$$\alpha{\cdot}2^{n+1} = 3{\cdot}\alpha{\cdot}2^n + 2^n. \quad \cdots ③$$

$$2\alpha = 3\alpha + 1. \text{ i.e. } \alpha = -1.$$

このとき③は

$$-2^{n+1} = -3{\cdot}2^n + 2^n. \quad \cdots ③$$

② − ③ より …

〈解答〉

②を変形して

$$a_{n+1} + 2^{n+1} = 3(a_n + 2^n).$$

よって，(数列 $(a_n + 2^n)$ は公比 3 の等比数列だから)

$$a_n + 2^n = (a_1 + 2){\cdot}3^{n-1}$$

$$\therefore a_n = (1+2)3^{n-1} - 2^n = \mathbf{3^n - 2^n}.$$

〔解法 2：解法 1 という背景を隠して〕

〈着眼〉

〔解法 1〕と同じ.

〈方針〉

ジャマな「2^n」を，うまい具合に a_{n+1}, a_n に“分配”する.

〈らくがき〉

②を

$$a_{n+1} - \alpha{\cdot}2^{n+1} = 3(a_n - \alpha{\cdot}2^n), \quad \cdots ④$$

$$\text{i.e. } a_{n+1} = 3a_n \underbrace{-\alpha{\cdot}2^n}_{\text{ジャマ}}$$

と変形するには，②「ジャマな部分」を比較して

$$-\alpha{\cdot}2^n = 2^n \text{ i.e. } \alpha = -1$$

であればよく，このとき④は …

〈解答〉

②を変形して

$$a_{n+1} + 2^{n+1} = 3(a_n + 2^n).$$

⋮

以下同様

〔解法 3：→階差型へ〕

〈着眼〉

$$a_{n+1} = \underbrace{3}_{\text{ジャマ}} a_n + 2^n \quad \cdots ②$$

コレが無ければ階差型

〈解答〉

② ÷ 3^{n+1} より

$$\frac{a_{n+1}}{3^{n+1}} = \frac{3a_n}{3^{n+1}} + \frac{2^n}{3^{n+1}}.$$

$$\text{i.e. } \frac{a_{n+1}}{3^{n+1}} - \frac{a_n}{3^n} = \frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^n.$$

よって $n \geqq 2$ のとき

$$\frac{a_n}{3^n} = \frac{a_1}{3^1} + \sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^k$$

$$= \frac{1}{3} + \frac{1}{3}{\cdot}\frac{2}{3}{\cdot}\frac{1 - \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}}{1 - \frac{2}{3}}$$

$$= \frac{1}{3} + \frac{2}{3} - \left(\frac{2}{3}\right)^n$$

$$= 1 - \left(\frac{2}{3}\right)^n \quad (n = 1 \text{ でも成立}).$$

$$\therefore a_n = \mathbf{3^n - 2^n}.$$

〔解法 4：→遠回り？〕

〈方針〉

$a_{n+1} = pa_n + q$ 型へ帰着

〈解答〉

② ÷ 2^{n+1} より

$$\frac{a_{n+1}}{2^{n+1}} = \frac{3a_n}{2^{n+1}} + \frac{2^n}{2^{n+1}}.$$

$$\text{i.e. } \frac{a_{n+1}}{2^{n+1}} = \frac{3}{2}{\cdot}\frac{a_n}{2^n} + \frac{1}{2}.$$

〔解法 1〕，〔解法 2〕と同様にして

$$\frac{a_{n+1}}{2^{n+1}} + 1 = \frac{3}{2}\left(\frac{a_n}{2^n} + 1\right).$$

よって，(数列 $\left(\frac{a_n}{2^n} + 1\right)$ は公比 $\frac{3}{2}$ の等比数列だから)

$$\frac{a_n}{2^n} + 1 = \left(\frac{a_1}{2^1} + 1\right)\left(\frac{3}{2}\right)^{n-1}$$

$$= \left(\frac{3}{2}\right)^n.$$

$$\therefore a_n = \mathbf{3^n - 2^n}.$$

例題 2

$a_1 = 1,$ $\cdots$①

$a_{n+1} = \underbrace{3a_n + 3^n}_{\text{一致！}}$ $\cdots$②

で定まる数列 (a_n) の一般項を求めよ．

〈注意！〉

〔解法 1〕，**〔解法 2〕** が使えない例外タイプ．(適切な「α」が存在しない．)

〈方針〉

〔解法 3〕 = **〔解法 4〕** を用いる．

〈解答〉

②÷ 3^{n+1} より

$$\frac{a_{n+1}}{3^{n+1}} = \frac{3a_n}{3^{n+1}} + \frac{3^n}{3^{n+1}}.$$

$$\text{i.e. } \frac{a_{n+1}}{3^{n+1}} - \frac{a_n}{3^n} = \frac{1}{3}.$$

よって，(数列 $\left(\frac{a_n}{3^n}\right)$ は公差 $\frac{1}{3}$ の等差数列だから)

$$\frac{a_n}{3^n} = \frac{a_1}{3^1} + \frac{1}{3}(n-1)$$
$$= \frac{n}{3}.$$

$$\therefore\ a_n = \boldsymbol{n3^{n-1}}.$$

〈参考〉

3 項間漸化式：

$a_{n+2} = 5a_{n+1} - 6a_n$型

の例外タイプ：

$a_1 = 1,\ a_2 = 6,$ $\cdots$①

$a_{n+2} = 6a_{n+1} - 9a_n$ (~~固~~有方程式重解)． $\cdots$②

が，$a_{n+1} = pa_n + q^n$ 型の例外タイプ (例題 2) に帰着する．

②を変形して

$$a_{n+2} - 3a_{n+1} = 3(a_{n+1} - 3a_n).$$

$$\therefore\ a_{n+1} - 3a_n = (a_2 - 3a_1)3^{n-1} = 3^n.$$

$$\therefore\ a_{n+1} = 3a_n + 3^n.$$ (例題 2 の②と同じ)

〔各解法比較〕

(1) 前記「例外タイプ」を気にしなくてよいという点では，**〔解法 3〕**，**〔解法 4〕** が楽．

(2) トップ層はスピード重視で **〔解法 1〕** または **〔解法 2〕** をマスターしたい．「例外タイプ」があることを承知した上で．

(3) 例題 1 ②式の「2^n」が「2」,「$2n-1$」に変わっただけの漸化式：

$a_{n+1} = 3a_n + 2$ $\cdots$②'

$a_{n+1} = 3a_n + 2n - 1$ 2012センター $\cdots$②''

について．**〔解法 1〕** および **〔解法 2〕** では，「$\alpha \cdot 2^n$」を

②'$\cdots$「α」，②''$\cdots$「$\alpha n + \beta$」

に変えるだけ．つまり，より体系的に学べる．

(4) すこし複雑化した漸化式：

$a_{n+1} = 3a_n + 2^n + 2$

でも，**〔解法 1〕** および **〔解法 2〕** なら，例題 1 の「$\alpha \cdot 2^n$」を「$\alpha \cdot 2^n + \beta$」にするだけでほぼ同様に

$$a_{n+1} + 2^{n+1} + 1 = 3(a_n + 2^n + 1)$$

と変形して解決する．

〔解法 3〕 でも少し面倒だが解ける．**〔解法 4〕** は有効でない．

ユードー付：例：2012 W 入ポ外

［漸化式の解き方］

$\boxed{1}$ $a_{n+1} = ra_n + (\text{ジャマ})$ 型

(1) $\begin{cases} a_1 = 4, \\ \underbrace{a_{n+1} = 3a_n}_{\text{トーセ}} + \underbrace{2}_{\text{ジャマ}} & \cdots ① \end{cases}$

$\boxed{\text{らくがき}}$

①を

"分配"

$a_{n+1} - \alpha = 3(a_n - \alpha) \cdots ②$

i.e. $a_{n+1} = 3a_n - 2\alpha$

と変形するには

$2 = -2\alpha$ より $\alpha = -1$

であればよく，このとき②は…

$a_{n+1} + 1 = 3(a_n + 1)$.

(よって $(a_n + 1)$ は公比 3 の等比数列だから)

$a_n + 1 = (a_1 + 1)\cdot 3^{n-1}$.

$a_n = 5\cdot 3^{n-1} - 1$. //

〔別〕

$\boxed{\text{らくがき}}$

①で a_n, a_{n+1} を α でおきかえた式

$\alpha = 3\alpha + 2$

を解くと $\alpha = -1$.

i.e. $-1 = 3(-1) + 2$. $\cdots ③$

①−③より

$a_{n+1} + 1 = 3(a_n + 1)$.

⋮

(2) $\begin{cases} a_1 = 1, \\ \underbrace{a_{n+1} = 3a_n}_{\text{トーセ}} + \underbrace{2n}_{\text{ジャマ}} & \cdots ① \end{cases}$

$\boxed{\text{らくがき}}$

①を

"分配"

$a_{n+1} - \{\alpha(n+1) + \beta\} = 3\{a_n - (\alpha n + \beta)\} \cdots ②$

i.e. $a_{n+1} = 3a_n - 2\alpha n + \alpha - 2\beta$

と変形するには

$2n = -2\alpha n + \alpha - 2\beta$ より

$2 = -2\alpha$, $0 = \alpha - 2\beta$

i.e. $\alpha = -1$, $\beta = -\frac{1}{2}$ でよく，このとき②は…

$a_{n+1} + (n+1) + \frac{1}{2} = 3(a_n + n + \frac{1}{2})$.

$\therefore a_n + n + \frac{1}{2} = (a_1 + 1 + \frac{1}{2})3^{n-1}$.

$a_n = -n - \frac{1}{2} + \frac{5}{2}3^{n-1}$. //

(3) $\begin{cases} a_1 = 12, \\ \underbrace{a_{n+1} = 9a_n}_{\text{トーセ}} + \underbrace{6\cdot 3^n}_{\text{ジャマ}} & \cdots ① \end{cases}$

$\boxed{\text{らくがき}}$

①を

"分配"

$a_{n+1} - \alpha\cdot 3^{n+1} = 9(a_n - \alpha\cdot 3^n) \cdots ②$

i.e. $a_{n+1} = 9a_n - 6\alpha 3^n$

と変形するには

$6\cdot 3^n = -6\alpha\cdot 3^n$ より $\alpha = -1$

でよく，このとき②は…

$a_{n+1} + 3^{n+1} = 9(a_n + 3^n)$

$\therefore a_n + 3^n = (a_1 + 3^1)\cdot 9^{n-1}$

$a_n = 15\cdot 9^{n-1} - 3^n$. //

〔別〕①÷9^{n+1} より

$\frac{a_{n+1}}{9^{n+1}} = \frac{9a_n}{9^{n+1}} + \frac{6}{9}\cdot\frac{3^n}{9^n}$.

$\frac{a_{n+1}}{9^{n+1}} - \frac{a_n}{9^n} = \frac{2}{3}\left(\frac{1}{3}\right)^n$.

よって $n \geq 2$ のとき

$$\frac{a_n}{9^n} = \frac{a_1}{9^1} + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{2}{3}\left(\frac{1}{3}\right)^k$$

$$= \frac{4}{3} + \frac{2}{9} \cdot \frac{1-\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}}{1-\frac{1}{3}}$$

$$= \frac{4}{3} + \frac{1}{3} - \left(\frac{1}{3}\right)^n.$$

$\therefore a_n = \frac{5}{3} \cdot 9^n - 3^n.$ //

（これは $n=1$ でも成立）

〈参考〉

$$\begin{cases} a_1 = 1, \\ a_{n+1} = 3a_n + 3^n \end{cases}$$

ココが一致

だと，〔別〕の方しか使えない．

$$\frac{a_{n+1}}{3^{n+1}} - \frac{a_n}{3^n} = \frac{1}{3}.$$

$$\therefore \frac{a_n}{3^n} = \frac{a_1}{3^1} + \frac{1}{3}(n-1)$$

$$= \frac{n}{3}.$$

$\therefore a_n = n \cdot 3^{n-1}.$ //

$\boxed{2}$ 3項間漸化式

$$\begin{cases} a_1 = 2,\ a_2 = 7, \\ a_{n+2} = \underline{4}\, a_{n+1} \underset{\sim}{-a_n}. \quad \cdots ① \end{cases}$$

$\boxed{\text{らくがき}}$

①を

$$a_{n+2} - \alpha a_{n+1} = \beta (a_{n+1} - \alpha a_n) \cdots ②$$

i.e. $a_{n+2} = \underline{(\alpha+\beta)}\, a_{n+1} \underset{\sim}{-\alpha\beta}\, a_n$

と変形するには

$$\alpha + \beta = 4, \quad \alpha\beta = 1$$

でよく，このとき α, β は，方程式

$$x^2 - 4x + 1 = 0$$

の2解だから，

$$\{\alpha, \beta\} = \{2 \pm \sqrt{3}\}.$$

$p = 2+\sqrt{3},\ q = 2-\sqrt{3}$ とおく．

$(\alpha, \beta) = (p, q)$ のとき，② は…

$$a_{n+2} - p a_{n+1} = q(a_{n+1} - p a_n).$$

$$a_{n+1} - p a_n = (a_2 - p a_1) q^{n-1}$$

$$= (3 - 2\sqrt{3}) q^{n-1} = -\sqrt{3} q^n \cdots ③$$

同様にして

$$a_{n+1} - q a_n = (a_2 - q a_1) p^{n-1}$$

$$= (3 + 2\sqrt{3}) p^{n-1} = \sqrt{3} p^n \cdots ④$$

④－③より

$$\underbrace{(p-q)}_{2\sqrt{3}} a_n = \sqrt{3} p^n + \sqrt{3} q^n.$$

$\therefore a_n = \frac{1}{2}\left\{(2+\sqrt{3})^n + (2-\sqrt{3})^n\right\}.$ //

〈参考〉

$$\begin{cases} a_1 = 1,\ a_2 = 6, \\ a_{n+2} = 6a_{n+1} - 9a_n \end{cases}$$

だと，同様にして

$\alpha = \beta = 3$ となり

$$a_{n+2} - 3a_{n+1} = 3(a_{n+1} - 3a_n).$$

$$a_{n+1} - 3a_n = (a_2 - 3a_1) 3^{n-1}$$

$$= 3^n.$$

あとは↖と同じ

3 連立漸化式

$$\begin{cases} a_{n+1} = 2a_n + 3b_n & \cdots ① \\ b_{n+1} = a_n + 2b_n & \cdots ② \end{cases}$$

$a_1 = 2,\ b_1 = 1.$

$\boxed{\text{らくがき}}$

数列 $(a_n + \alpha b_n)$ が公比 β の等比数列となる条件は

$a_{n+1} + \alpha b_{n+1} = \beta(a_n + \alpha b_n)$. $\cdots ③$

①, ② より

左辺 $= (2a_n + 3b_n) + \alpha(a_n + 2b_n)$

$= (2+\alpha)a_n + (3+2\alpha)b_n.$

よって ③ より

$$\begin{cases} 2+\alpha = \beta, \\ 3+2\alpha = \beta\alpha. \end{cases}$$

$\therefore\ 3 + 2\alpha = (2+\alpha)\alpha.$

$\alpha = \pm\sqrt{3}.$

$\therefore\ (\alpha, \beta) = \overset{(i)}{(\sqrt{3}, 2+\sqrt{3})},\ \overset{(ii)}{(-\sqrt{3}, 2-\sqrt{3})}.$

(i) のとき, ③ は…

$a_{n+1} + \sqrt{3}b_{n+1} = (2+\sqrt{3})(a_n + \sqrt{3}b_n).$

$\therefore\ a_n + \sqrt{3}b_n = (a_1 + \sqrt{3}b_1)(2+\sqrt{3})^{n-1}$

$= (2+\sqrt{3})^n. \quad \cdots ④$

同様に

$a_{n+1} - \sqrt{3}b_{n+1} = (2-\sqrt{3})(a_n - \sqrt{3}b_n).$

$\therefore\ a_n - \sqrt{3}b_n = (a_1 - \sqrt{3}b_1)(2-\sqrt{3})^{n-1}$

$= (2-\sqrt{3})^n. \quad \cdots ⑤$

④ + ⑤ より

$2a_n = (2+\sqrt{3})^n + (2-\sqrt{3})^n.$

$\therefore\ a_n = \frac{1}{2}\{(2+\sqrt{3})^n + (2-\sqrt{3})^n\}.$ //

[別] ① より $b_n = \dfrac{a_{n+1} - 2a_n}{3}.$

$\therefore\ b_{n+1} = \dfrac{a_{n+2} - 2a_{n+1}}{3}.$

これらを ② へ代入して

$$\frac{a_{n+2} - 2a_{n+1}}{3} = a_n + 2\cdot\frac{a_{n+1} - 2a_n}{3}.$$

$a_{n+2} = 4a_{n+1} - a_n.$

また, $a_1 = 2,$

$a_2 = 2a_1 + 3b_1 = 7.$

$\vdots$ という訳で, $\boxed{2}$ の (a_n) と同じ数列でした.

〈参考〉

$a_1 = 5,\ b_1 = 2,$

$$\begin{cases} a_{n+1} = 5a_n + 2b_n, & \cdots ① \\ b_{n+1} = 2a_n + 5b_n & \cdots ② \end{cases}$$ なら,

① + ② より

$a_{n+1} + b_{n+1} = 7(a_n + b_n).$

$\therefore\ a_n + b_n = (a_1 + b_1)7^{n-1}$

$= 7^n. \quad \cdots ③$

① − ② より

$a_{n+1} - b_{n+1} = 3(a_n - b_n).$

$\therefore\ a_n - b_n = (a_1 - b_1)3^{n-1}$

$= 3^n. \quad \cdots ④$

③ + ④, ③ − ④ より

$$\begin{cases} a_n = \frac{1}{2}(7^n + 3^n), \\ b_n = \frac{1}{2}(7^n - 3^n). \end{cases}$$ //

$\left(\begin{cases} a_{n+1} = \bigcirc a_n + \square b_n, \\ b_{n+1} = \square a_n + \bigcirc a_n \end{cases} \text{型は,} \right.$ 足して引け! $\Big)$

[“ドミノ式構造”の例]

- $a_{(n+1)} = n\,a_{(n)} + n^2$
- $\sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{k=1}^{n-1} a_k + a_n$
- $\triangle^{(n+1)} = \triangle^{(n)} \cdot \triangle$
- $(n+1)! = n! \cdot (n+1)$

⋮

[“表現の一意性”]

㋐ ベクトル

$s\vec{a}+t\vec{b}=\vec{0} \Rightarrow s=0,\ t=0.$　（$\vec{a} \nparallel \vec{b}$）

〔証〕仮に $s \neq 0$ としたら

$\vec{a}=-\dfrac{t}{s}\vec{b}$ となり，$\vec{a} \nparallel \vec{b}$ に反す.

$\therefore\ s=0.\ \ t\vec{b}=\vec{0}.\ \therefore\ t=0.$ □

（系）$s\vec{a}+t\vec{b}=s'\vec{a}+t'\vec{b}$　（$\vec{a} \nparallel \vec{b}$）

$\Rightarrow s=s',\ t=t'.$（㋑,㋒も同様）

〔証〕$(s-s')\vec{a}+(t-t')\vec{b}=\vec{0}$

とまとめる.

㋑ 有理数，無理数

$\underbrace{p+q}_{\mathbb{Q}}\sqrt{2}=0 \Rightarrow p=0,\ q=0.$

$\sqrt{2}$：無理数

〔証〕仮に $q \neq 0$ としたら

$\underbrace{-\dfrac{p}{q}}_{\text{有理数}}=\underbrace{\sqrt{2}}_{\text{無理数}}.$ これは矛盾.

$\therefore\ q=0.\ \ \therefore\ p=0.$ □

㋒ 実数，虚数

$\underbrace{x+y}_{\mathbb{R}}\alpha=0 \Rightarrow x=0,\ y=0.$

α：虚数

〔証〕仮に $y \neq 0$ としたら

$\underbrace{-\dfrac{x}{y}}_{\text{実数}}=\underbrace{\alpha}_{\text{虚数}}.$ これは矛盾.

$\therefore\ y=0.\ \ \therefore\ x=0.$ □

〈注〉$\underbrace{x+y}_{\mathbb{R}}i=0 \Leftrightarrow x=0,\ y=0$

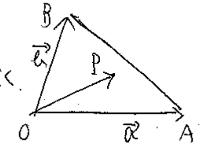
$i^2=-1$

は，複素数が0と等しいことの定義である.（よって“証明”はしない.）

[三角形の内部の表現]

$\triangle OAB$ があり

$\overrightarrow{OP} = s\vec{a} + t\vec{b}$ とおく.



$$\begin{cases} s>0,\ t>0, \\ s+t<1 \end{cases}$$

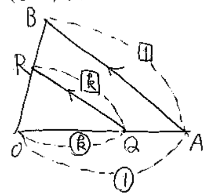
のとき, $s+t=k\ (0<k<1)$ とおくと

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OP} &= (k-t)\vec{a} + t\vec{b} \\ &= k\vec{a} + t(\vec{b}-\vec{a}) \\ &= k\vec{a} + t\,\overrightarrow{AB}.\end{aligned}$$

1° k を固定して t を動かす.

$s = k - t > 0$ より $(0<)\ t < k$.

よって, P は右図の Q と R の間を動く.



2° k を $0<k<1$ で動かすと, 1° の PQ は $\triangle OAB$ の内部を描く.

[コーシー・シュワルツの不等式]

ベクトルの内積の定義：

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta \quad \left(\begin{array}{l}\theta は\ \vec{a},\vec{b}\\ のなす角\end{array}\right)$$

より，

$$(\vec{a}\cdot\vec{b})^2=|\vec{a}|^2|\vec{b}|^2\underbrace{\cos^2\theta}_{1以下.} \quad \cdots(*)$$

$$\therefore\ (\vec{a}\cdot\vec{b})^2\leq|\vec{a}|^2|\vec{b}|^2.$$

ココを覚える！

ここで，$\vec{a}=\begin{pmatrix}a_1\\a_2\end{pmatrix}$，$\vec{b}=\begin{pmatrix}b_1\\b_2\end{pmatrix}$ のとき

を考えると

$$(a_1b_1+a_2b_2)^2\leq(a_1^2+a_2^2)(b_1^2+b_2^2).$$

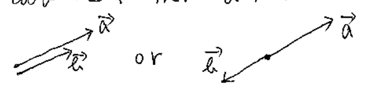
同様に，$\vec{a}=\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{pmatrix}$，$\vec{b}=\begin{pmatrix}b_1\\b_2\\b_3\end{pmatrix}$ のとき

を考えると

$$(a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3)^2\leq(a_1^2+a_2^2+a_3^2)(b_1^2+b_2^2+b_3^2).$$

なお，等号成立条件は，(*)より

$\cos\theta=\pm1$ i.e. $\vec{a}\parallel\vec{b}$ のとき．

()

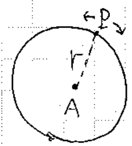
〈注〉文字 $a_1, b_1, \cdots\cdots$ は実数ならば何でもよい．(負でも可)

［内積を用いたベクトル方程式］
（不等式）

以下の2つが基本型.（Pが動点）

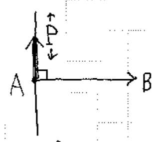
(1) 距離に注目.

「$|\overrightarrow{AP}| = r$」



(2) 角（垂直）に注目.

「$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AP} = 0$」



〈例〉平面上で, $\vec{a} = \overrightarrow{OA}$, $\vec{p} = \overrightarrow{OP}$ として

$$|\vec{p}|^2 - \vec{a} \cdot \vec{p} = 0$$

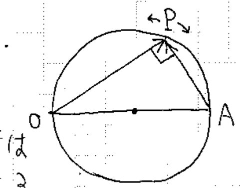
のとき, 点Pの軌跡Fは?

〔解(2)〕

$\vec{p} \cdot (\vec{p} - \vec{a}) = 0.$

$\overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{AP} = 0.$

$\overrightarrow{OP} \perp \overrightarrow{AP}.$



よって求めるFは
OAを直径とする
円周.

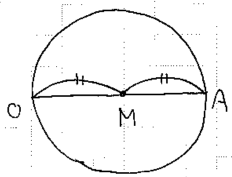
〔解(1)〕

$|\vec{p} - \frac{1}{2}\vec{a}|^2 = |\frac{1}{2}\vec{a}|^2.$

OAの中点をMとすると

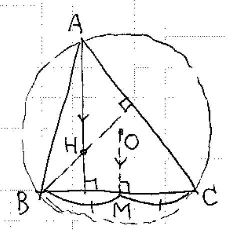
$|\overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OM}|^2 = |\overrightarrow{OM}|^2.$

$\therefore |\overrightarrow{MP}| = |\overrightarrow{MO}|.$



よって求めるFは
中心M, 半径
MOの円周.

[垂心とベクトル]



△ABCの外心をO,
垂心をHとする.

辺BCの中点をMとすると, OM⊥BC, AH⊥BC より

$$\overrightarrow{AH} \parallel \overrightarrow{OM}.$$

これと $\overrightarrow{OM} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC})$ より

$$\overrightarrow{AH} \parallel \overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}.$$

したがって

$$\overrightarrow{OH} = \overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AH}$$
$$= \overrightarrow{OA} + t_1(\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}) \quad \cdots ①$$

と表せる.

同様にして

$$\overrightarrow{OH} = \overrightarrow{OB} + t_2(\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OA}), \quad \cdots ②$$
$$\overrightarrow{OH} = \overrightarrow{OC} + t_3(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}) \quad \cdots ③$$

とも表せる.

ベクトル $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}$ は, ①, ②, ③ のいずれの形にも表されている. すなわち

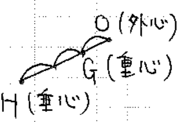
$$\overrightarrow{OH} = \overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}. \quad /\!/ \quad \cdots ④$$

〈参考〉 △ABCの重心をGとすると

$$\overrightarrow{OG} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}). \quad \cdots ⑤$$

④, ⑤ より

$$\overrightarrow{OH} = 3\,\overrightarrow{OG}.$$



よって, 右図のようになる. (この線分を「オイラー線」という.

〈注〉 重心に関する公式⑤では, 始点は外心O以外でもかまわない. すなわち, 任意の点Xに対して

$$\overrightarrow{XG} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{XA}+\overrightarrow{XB}+\overrightarrow{XC})$$

が成り立つ.

一方, 垂心に関して得られた④は, あくまでも「外心O」を始点にしたときのみ成り立つものである.

〈参考〉 垂心Hが④をみたすことを証明すればよいのであれば, 次のようにする.

「④より

$$\overrightarrow{AH} = \overrightarrow{OH}-\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}.$$

$$\therefore \overrightarrow{AH}\cdot\overrightarrow{BC} = (\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC})\cdot(\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OB})$$
$$= |\overrightarrow{OC}|^2 - |\overrightarrow{OB}|^2$$
$$= 0. \left(\because |\overrightarrow{OB}|, |\overrightarrow{OC}| \text{はともに外接円の半径}\right)$$

よって, AH⊥BC.

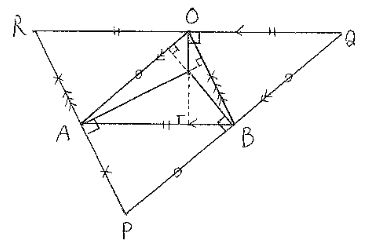
同様にして, BH⊥CA, CH⊥AB.

したがって, Hは垂心である. □ 」

〈注〉三角形OABにおいて, 3頂点からそれぞれ対辺に下ろした垂線は, 1点で交わる。」 ……ⓐ

もちろん, コレが垂心.

[初等幾何による証明] ← 技巧的!?

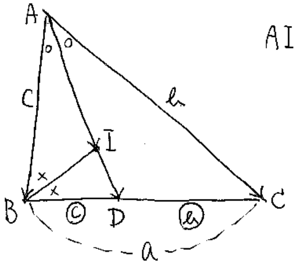


△OABに対して, 上図のように△PQRを作ると,「3辺PQ, QR, RSの垂直二等分線は1点で交わる。」

△PQRの外心

よって, ⓐが示せた. □

[内心Iの一般論]



$AI:ID = BA:BD$

$= c : a \times \frac{c}{c+b}$

$= (b+c) : a.$

$\therefore \overrightarrow{AI} = \frac{b+c}{(b+c)+a}\overrightarrow{AD}$

$= \frac{b+c}{a+b+c} \cdot \frac{b\overrightarrow{AB}+c\overrightarrow{AC}}{c+b}$

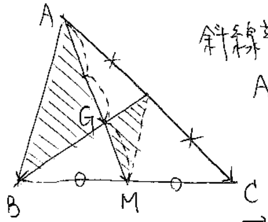
$= \frac{b\overrightarrow{AB}+c\overrightarrow{AC}}{a+b+c}$. //

始点を任意の点Oに変えると

$\overrightarrow{OI}-\overrightarrow{OA} = \frac{b(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA})+c(\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OA})}{a+b+c}$.

$\overrightarrow{OI} = \frac{a\overrightarrow{OA}+b\overrightarrow{OB}+c\overrightarrow{OC}}{a+b+c}$ …始点 $\begin{cases}\text{統一}\\\text{任意}\end{cases}$ //

[重心Gの一般論]



斜線部の相似より,

AG : GM = 2 : 1.

$\therefore \overrightarrow{AG} = \frac{2}{3}\cdot\frac{\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}}{2} = \frac{\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}}{3}$. …㋐

始点を任意の点Oに変えると

$\overrightarrow{OG}-\overrightarrow{OA} = \frac{(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA})+(\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OA})}{3}$.

$\therefore \overrightarrow{OG} = \frac{\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}}{3}$, …始点 $\begin{cases}\text{統一}\\\text{任意}\end{cases}$

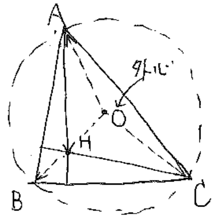
とくに,

O=A とすれば ㋐式.

O=G とすれば, $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\vec{0}$.

[垂心Hの一般論]

(難しいので"天下り式")



$\overrightarrow{OH'} = \overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}$

によって点H'を

定義すると…

$\overrightarrow{AH'}\cdot\overrightarrow{BC} = (\overrightarrow{OH'}-\overrightarrow{OA})\cdot(\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OB})$

$= (\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC})\cdot(\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OB})$

$= |\overrightarrow{OC}|^2-|\overrightarrow{OB}|^2$

$= 0$ ($\because |\overrightarrow{OB}|=|\overrightarrow{OC}|=$ 半径).

$\therefore$ AH' ⊥ BC.

同様にして, CH' ⊥ AB.

よって, H'は垂心Hそのものである.

$\therefore \overrightarrow{OH} = \overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}$ …始点:外心!!

〈参考〉

$\overrightarrow{OH} = 3\overrightarrow{OG}$ だから,

三角形の外心O, 重心G,

垂心Hは, 左図のように

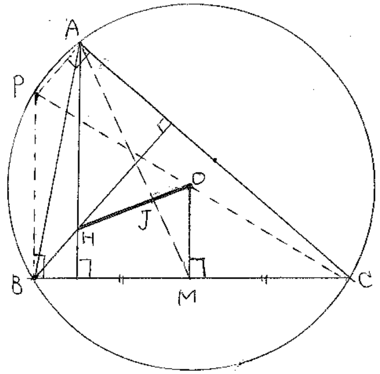
共線である.

〈外心について〉

内積を使った複雑な表現に

しかならない.

［オイラー線］



上図で，CPが直径であることにより，

$BP \perp BC$ ， $AP \perp AC$.

$\therefore BP \parallel HA$ ， $AP \parallel HB$.

よって ▱APBH は平行四辺形であるから

$$AH = PB. \quad \cdots ①$$

一方，△CPB に注目して，中点連結定理より

$$PB = 2OM. \quad \cdots ②$$

①，② より

$$AH = 2OM.$$

これと △JAH ∽ △JMO より

$$AJ : JM = 2 : 1 ,$$

すなわち，J は中線AMを 2:1 に内分するから，△ABC の重心である.

$$\therefore J = G.$$

よって，

$$OG : GH = 1 : 2.$$ //

[はさみうちのいろいろ]

○ 基本型

$a_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n \sin n^\circ$

$\left(\frac{1}{2}\right)^n \to 0$　$\sin n^\circ$：$-1 \sim 1$ で振動 … $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$?

$-1 \leq \sin n^\circ \leq 1$ の各辺を $\left(\frac{1}{2}\right)^n (>0)$ 倍して，

$-\left(\frac{1}{2}\right)^n \leq a_n \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n$.

$n \to \infty$ のとき，$\left(\frac{1}{2}\right)^n, -\left(\frac{1}{2}\right)^n \to 0$ だから，

$a_n \to 0$. //

○ 収束の定義活用

$a_n = \underbrace{\left(\frac{-1}{2}\right)^n}_{\text{符号が確定しない！}} \sin n^\circ$ … 上と同様に，$\lim_{n\to\infty} a_n = 0$?

$(0 \leq) |a_n - 0| = \left|\left(\frac{-1}{2}\right)^n \sin n^\circ\right|$

$= \left|\left(\frac{-1}{2}\right)^n\right| |\sin n^\circ|$

$\leq \left(\frac{1}{2}\right)^n \cdot 1 \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$.

よって，$|a_n - 0| \to 0$，

i.e. $a_n \longrightarrow 0$. //

○ 結果としてはさめる.

$[x]$ =「x を超えない最大整数」とする.

$a_n = \frac{[\sqrt{2}n]}{n}$.

$[\sqrt{2}n] \overset{①}{\leq} \sqrt{2}n \overset{②}{<} [\sqrt{2}n] + 1$.

まん中にはさみたい「$[\sqrt{2}n]$」が両端にある！

でも，変形すると

$\underbrace{\sqrt{2}n - 1 < [\sqrt{2}n]}_{②より} \underbrace{\leq \sqrt{2}n}_{①}$.

よって $n > 0$ のとき

$\sqrt{2} - \frac{1}{n} < a_n \leq \sqrt{2}$.

$n \to \infty$ のとき，最左辺 $\to \sqrt{2}$ だから，

$a_n \to \sqrt{2}$. //

○ 部分的にはさむ.

$a_n = \frac{[\sqrt{3}n] - [\sqrt{2}n] + n}{n}$

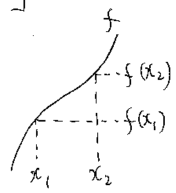
$= \frac{[\sqrt{3}n]}{n} - \frac{[\sqrt{2}n]}{n} + 1$.

$n \to \infty$ とき，前問と同様にすれば

$\frac{[\sqrt{3}n]}{n} \to \sqrt{3}$，$\frac{[\sqrt{2}n]}{n} \to \sqrt{2}$.

$\therefore a_n \to \sqrt{3} - \sqrt{2} + 1$. //

[f'の符号とfの増減]



。「ある区間内で $f(x)$ が
xの増加関数である」

とは

「その区間に属する任意の x_1, x_2

$(x_1 < x_2)$ に対して

$$f(x_1) < f(x_2)$$

が成り立つこと 」

である。

。「$a < x < b$ でつねに $f'(x) > 0$ 」・・・ 端っこの微分係数は関係ない。

$\Downarrow$

「$a \leq x \leq b$ で $f(x)$ は増加関数」

であることを、上記「増加の定義」

および「平均値の定理」を用いて

示す。

区間 $[a, b]$ に属する x_1, x_2 が

$$x_1 < x_2 \quad \text{i.e.} \quad \underbrace{x_2 - x_1}_{\Delta x} > 0$$

をみたすとき、　こう来ればアノ定理

$$f(x_1) < f(x_2) \quad \text{i.e.} \quad \underbrace{f(x_2) - f(x_1)}_{\Delta y} > 0$$

となることを、

$$f'(x) > 0 \quad (a < x < b)$$

をもとに示せばよい。

平均値の定理より

$$\begin{cases} f(x_2) - f(x_1) = f'(c)\,(x_2 - x_1) & \cdots ① \\ (a \leq)\, x_1 < c < x_2\, (\leq b) & \cdots ② \end{cases}$$

をみたす c が存在する。

② より $a < c < b$ だから、$f'(c) > 0$.

よって ① において

$$f'(c) > 0, \quad x_2 - x_1 > 0$$

だから

$$f(x_2) - f(x_1) > 0. \quad \square$$

。「$f(0) = 0,\ f'(x) > 0\ (x > 0) \Rightarrow f(x) > 0\ (x > 0)$」

であることが、上記より厳密にわかる。

[平均値の定理 の利用例]

「 $0 < a < b$ のとき

$$\frac{\log b - \log a}{b - a} < \frac{1}{a}$$ を示せ。」

〈着眼〉

左辺の分母に"Δx"、分子に"Δy"

らしき形が見える。

↓

「平均値の定理」の活用！

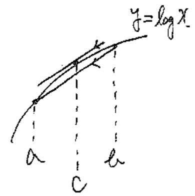
[解答]

$(\log x)' = \dfrac{1}{x}$ だから、

平均値の定理より

$$\frac{\log b - \log a}{b - a} = \frac{1}{c}$$

$(a < c < b)$



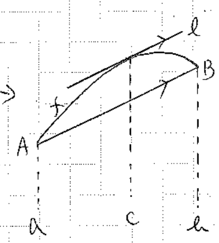
をみたす c が存在する。

$0 < a < c$ より $\dfrac{1}{c} < \dfrac{1}{a}$ だから、

$$\frac{\log b - \log a}{b - a} < \frac{1}{a}. \ \square$$

[平均値の定理の2つの形]

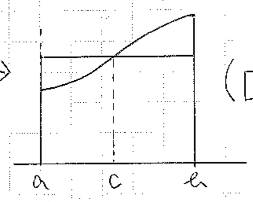
○ $f(b)-f(a)=f'(c)(b-a)\quad(a<c<b)$



$(\ell \parallel AB)$

$\Big\downarrow$ $F(x)=\int f(x)dx$ とすると…

○ $\underbrace{\int_a^b f(x)dx}_{\shortparallel \atop F(b)-F(a)} = \underbrace{f(c)}_{\shortparallel \atop F'(c)}(b-a)\quad(a<c<b)$



(□ = [図])

(2つはまったく同等な定理)

[$\lim\sum$ の扱い]

◦ $\lim$ 分離 $\sum$ … 無限級数的

→ 等式で表す / 不等式で評価

◦ まとめて $\int_0^1$ … 区分求積法

[区分求積法の手順]

1° $\frac{k}{n}$, $\frac{1}{n}$ をムリヤリ作る.

2° とりあえず

$\frac{k}{n} \rightsquigarrow x$, $\frac{1}{n} \rightsquigarrow dx$,

$\lim\sum \rightsquigarrow \int_0^1$

に変えてみる.

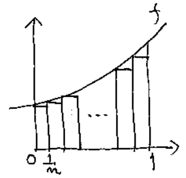
3° 図を描いてチェック!

[区分求積法の変化形]

◦ $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right)\cdot\frac{1}{n}$

$= \displaystyle\int_0^1 f(x)\,dx$

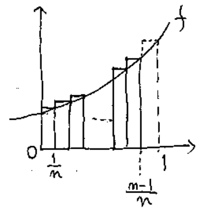
(小区間の左端)



◦ $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right)\cdot\frac{1}{n}$

$= \displaystyle\lim_{n\to\infty}\left\{\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)\cdot\frac{1}{n} - f(1)\cdot\frac{1}{n}\right\}$

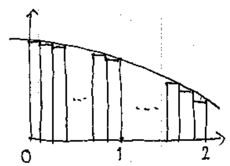
$= \displaystyle\int_0^1 f(x)\,dx - 0$



(1コくらい欠けてても結果はいっしょ)

◦ $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{2n} f\left(\frac{k}{n}\right)\cdot\frac{1}{n}$

$= \displaystyle\int_0^{\cancel{1}\,2} f(x)\,dx$

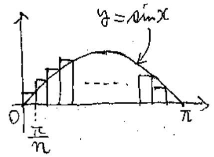


($\int_0^1$ じゃないこともある)

◦ $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} \sin\frac{k\pi}{n}\cdot\frac{1}{n}$

$= \displaystyle\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\pi}\sin\frac{k\pi}{n}\cdot\frac{\pi}{n}$

$= \displaystyle\int_0^{\pi} \frac{1}{\pi}\sin x\,dx$



(区間 $[0, \pi]$ を n 等分)

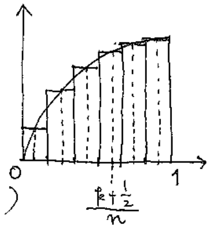
もちろん

$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} \sin\left(\pi\cdot\frac{k}{n}\right)\cdot\frac{1}{n}$

$= \displaystyle\int_0^1 \sin(\pi x)\,dx$ としてもよい

◦ $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n-1} \sqrt{\frac{k+\frac{1}{2}}{n}}\cdot\frac{1}{n}$

$= \displaystyle\int_0^1 \sqrt{x}\,dx$



(小区間の中央を使う)

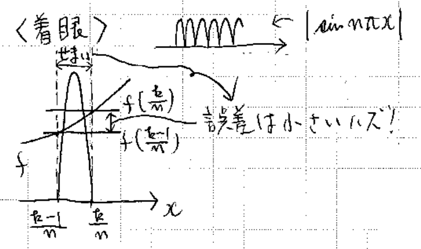
[微周期振動関数の定積分]

(1) 絶対値付き

$a_n = \int_0^1 f(x) |\sin n\pi x| dx$ の極限は?

(nは自然数, $f(x)$は増加関数とする.)

〈着眼〉



〈方針〉

$f(x)$を, 定数 $f(\frac{k-1}{n}), f(\frac{k}{n})$ で評価する.

$a_n = \sum_{k=1}^{n} \underbrace{\int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} f(x) |\sin n\pi x| dx}_{I_k とおく}$.

$[\frac{k-1}{n}, \frac{k}{n}]$ において, $f: \nearrow$ より, つねに

$f(\frac{k-1}{n}) \leq f(x) \leq f(\frac{k}{n})$. ($|\sin n\pi x| \geq 0$ より 注!)

$\therefore f(\frac{k-1}{n})|\sin n\pi x| \leq f(x)|\sin n\pi x| \leq f(\frac{k}{n})|\sin n\pi x|$.

$\therefore \int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} f(\frac{k-1}{n})|\sin n\pi x| dx \leq I_k \leq \int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} f(\frac{k}{n})|\sin n\pi x| dx$.

$[\frac{k-1}{n}, \frac{k}{n}]$ において $\sin n\pi x$ は符号を変えないから,

最右辺 $= f(\frac{k}{n}) \left| \int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} \sin n\pi x dx \right|$

$= f(\frac{k}{n}) \left| \left[-\frac{\cos n\pi x}{n\pi} \right]_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} \right|$

$= f(\frac{k}{n}) \left| \frac{(-1)^k - (-1)^{k-1}}{n\pi} \right| = f(\frac{k}{n}) \cdot \frac{2}{n\pi}$.

最左辺も同様に求めると,

$f(\frac{k-1}{n}) \frac{2}{n\pi} \leq I_k \leq f(\frac{k}{n}) \cdot \frac{2}{n\pi}$.

$\therefore \sum_{k=1}^{n} \frac{2}{\pi} f(\frac{k-1}{n}) \cdot \frac{1}{n} \leq a_n \leq \sum_{k=1}^{n} \frac{2}{\pi} f(\frac{k}{n}) \cdot \frac{1}{n}$.

$n \to \infty$ のとき, 最左辺, 最右辺はともに

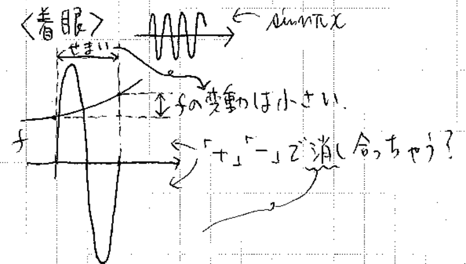
$\int_0^1 \frac{2}{\pi} f(x) dx$ へ収束する. (区分求積法)

よって, はさみうちより, $a_n \to \int_0^1 \frac{2}{\pi} f(x) dx$.

(2) 絶対値なし

$a_n = \int_0^1 f(x) \sin n\pi x dx$ (n:自然数) の極限は?

〈着眼〉



〈方針〉 $a_n \to 0$ を示す. → 「n」を分母に!

$a_n = \left[-f(x) \cdot \frac{\cos n\pi x}{n\pi} \right]_0^1 + \int_0^1 f'(x) \cdot \frac{\cos n\pi x}{n\pi} dx$

$= \frac{1}{n} \underbrace{\left[\frac{1}{\pi} f(x) \cos n\pi x \right]_1^0}_{A_n} + \frac{1}{n} \underbrace{\int_0^1 \frac{1}{\pi} f'(x) \cos n\pi x dx}_{B_n}$

あとは, A_n, B_n が有界であること

(変域が有限. 要は $\pm\infty$ じゃない)

を示せばよい.

A_n については, 素朴に計算.

B_n については, 絶対値をとるとよい.

$|B_n| = \left| \int_0^1 \frac{1}{\pi} f'(x) \cos n\pi x dx \right|$

$\leq \int_0^1 \left| \frac{1}{\pi} f'(x) \cos n\pi x \right| dx$

$\leq \int_0^1 \frac{1}{\pi} |f'(x)| \cdot 1 dx =$ 定数.

以上により, $a_n \to 0$.

[絶対値入り定積分と不等式]

公式

$a < b$ のとき

$$\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \leq \int_a^b |f(x)|\,dx$$

〔証〕

$a \leq x \leq b$ において，つねに

$$-|f(x)| \leq f(x) \leq |f(x)|$$

が成り立つから

$$(*) : \int_a^b \{-|f(x)|\}dx \underset{㋐}{\leq} \int_a^b f(x)\,dx \overset{㋑}{\leq} \int_a^b |f(x)|\,dx$$

$(\because\ a < b)$.

i.e. $-\int_a^b |f(x)|\,dx \leq \int_a^b f(x)\,dx \leq \int_a^b |f(x)|\,dx$.

$$\therefore \left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \leq \int_a^b |f(x)|\,dx .\ \square$$

(外に絶対値)　(中に絶対値)

〈参考〉

この不等式の等号が成立するのは，

(*)の㋐，㋑いずれかの等号が

$a \leq x \leq b$ でつねに成り立つとき．

つまり，$a \leq x \leq b$ において $f(x)$

が符号を変えないときに限って

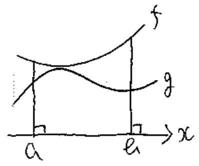
成立する．

[定積分と不等式]

区間 $[a, b]$ でつねに

$f(x) \geq g(x)$ ならば

$$\int_a^b f(x)\,dx \geq \int_a^b g(x)\,dx.$$



等号が成り立つのは，$[a, b]$ において

つねに $f(x) = g(x)$ となるときに限る．

["x" を $\int$ の外に出す方法]

（x：積分変数以外の文字）

○ $\int_{\cdot}^{\cdot} \underbrace{(x-t)^2}\, f(t)\,dt$ …多項式

$= \int_{\cdot}^{\cdot} (x^2 - 2xt + t^2) f(t)\,dt$

$= x^2 \int_{\cdot}^{\cdot} f(t)\,dt - 2x \int_{\cdot}^{\cdot} t f(t)\,dt + \int_{\cdot}^{\cdot} t^2 f(t)\,dt.$

○ $\int_{\cdot}^{\cdot} \underbrace{e^{x-t}}\, f(t)\,dt$ …指数関数

$= \int_{\cdot}^{\cdot} e^x \cdot e^{-t} f(t)\,dt$

$= e^x \int_{\cdot}^{\cdot} e^{-t} f(t)\,dt.$

○ $\int_{\cdot}^{\cdot} \underbrace{\sin(x-t)} \cdot f(t)\,dt$ …三角関数

$= \int_{\cdot}^{\cdot} (\sin x \cos t - \cos x \sin t) f(t)\,dt$

$= \sin x \int_{\cdot}^{\cdot} \cos t\, f(t)\,dt - \cos x \int_{\cdot}^{\cdot} \sin t\, f(t)\,dt.$

○ $\int_0^x \underbrace{f(x-t)}\, \sin t\,dt$ …抽象関数

において

$\underbrace{u}_{\text{(新)積分変数}} = \overset{\text{定数}}{x} - \underset{\text{(旧)}}{t}$ とおくと

$dt = -du$,

t	$0 \to x$
u	$x \to 0$

.

$\therefore$ 与式 $= \int_x^0 f(u) \sin(x-u)(-du)$

⋮（上記へ帰着）

[例題]

曲線 $C\begin{cases} x=\cos^4\theta \\ y=\sin^4\theta \end{cases} \left(0\leq\theta\leq\frac{\pi}{2}\right) \cdots ①$

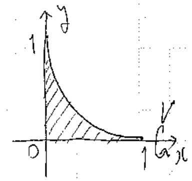
と x軸, y軸で囲まれる部分を x軸のまわりに1回転してできる立体の体積 V を求めよ.

〔解1：yをxで表して〕

① のとき $\sqrt{x}=\cos^2\theta$, $\sqrt{y}=\sin^2\theta$ だから,

C : $\sqrt{x}+\sqrt{y}=1$,

i.e. $y=(1-\sqrt{x})^2$.



よって

$$V=\int_0^1 \pi(1-\sqrt{x})^4 dx$$

(この4乗を展開してもできるが…)

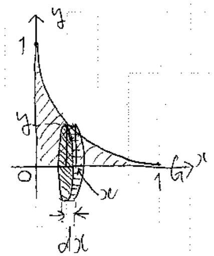
〔解2：yをxで表さないで…〕

① のとき, $x \xleftrightarrow{一意対応} y$

yはxの $\boxed{関数}$ である.

したがって

$$V=\int_0^1 \pi y^2 dx$$



(立式はこれでOK! あとは計算.)

$x=\cos^4\theta$ より

$dx=4\cos^3\theta(-\sin\theta)d\theta$, $\begin{array}{c|c} x & 0\to1 \\ \hline \theta & \frac{\pi}{2}\to0 \end{array}$.

よって

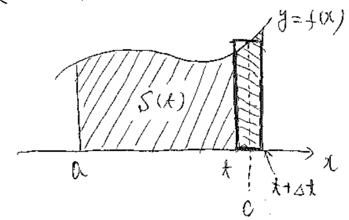
$$V=\pi\int_{\frac{\pi}{2}}^{0}\sin^8\theta\cdot4\cos^3\theta(-\sin\theta)d\theta$$

$$=4\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^9\theta(1-\sin^2\theta)\cos\theta\, d\theta$$

$$=4\pi\left[\frac{\sin^{10}\theta}{10}-\frac{\sin^{12}\theta}{12}\right]_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$=4\pi\left(\frac{1}{10}-\frac{1}{12}\right)=\frac{\pi}{15} \text{ //}$$

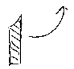
[面積と原始関数]



上図のように面積 $S(t)$ をとる。

t の増加量 Δt に応じた $S(t)$

の増加量を ΔS とすると、



$\Delta t > 0$ のとき

$$\begin{cases} \Delta S = \Delta t \cdot f(c), & \cdots ① \\ t < c < t + \Delta t & \cdots ② \end{cases}$$

なる c が存在する。

$\Delta t \to +0$ のとき、② より $c \to t$ だから

$$\lim_{\Delta t \to +0} \frac{\Delta S}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to +0} f(c) = f(t).$$

$\Delta t < 0$ のときは、② が

$$t + \Delta t < c < t$$

と変わるだけだから、同様にして

$$\lim_{\Delta t \to -0} \frac{\Delta S}{\Delta t} = f(t)$$

以上より

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta S}{\Delta t} = f(t)$$

i.e. $S'(t) = f(t)$.

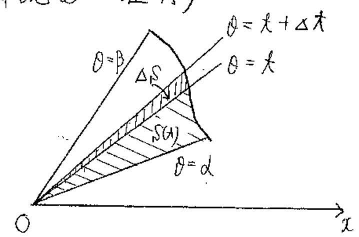
したがって

$$S(t) - \underbrace{S(a)}_{=0} = \int_a^t f(x)\,dx$$

$$\therefore\ S(t) = \int_a^t f(x)\,dx.$$ //

○ 極方程式と面積

（解説⑥の証明）



上図のように面積 $S(t)$ を定め、偏角 θ が t から $t+\Delta t$ $(\Delta t\neq 0)$ まで変化するときの $S(t)$ の増分を ΔS とする。

$\Delta t>0$ のとき、$t\leqq\theta\leqq t+\Delta t$ における $r=f(\theta)$ の最小値、最大値をそれぞれ m, M とすると、

$$\frac{1}{2}m^2\Delta t\leqq\Delta S\leqq\frac{1}{2}M^2\Delta t.$$

$$\frac{1}{2}m^2\leqq\frac{\Delta S}{\Delta t}\leqq\frac{1}{2}M^2$$

（これは、$\Delta t<0$ でも成立）.

$\Delta t\to 0$ のとき、

$$m\to f(t),$$
$$M\to f(t)$$

であるから、

$$\frac{\Delta S}{\Delta t}\to\frac{1}{2}\{f(t)\}^2,$$

すなわち、$\dfrac{dS}{dt}=\dfrac{1}{2}r^2.$

したがって、

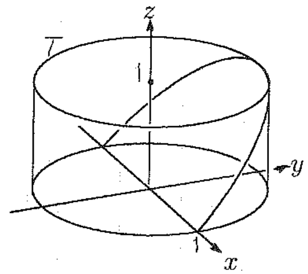
$$S(\beta)-S(\alpha)=\Big[S(t)\Big]_{\alpha}^{\beta}$$
$$=\int_{\alpha}^{\beta}\frac{1}{2}r^2d\theta.$$

これと $S(\alpha)=0$ より、求める面積は、

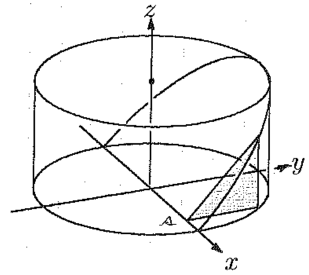
$$S(\beta)=\int_{\alpha}^{\beta}\frac{1}{2}r^2d\theta.\ \square$$

[典型問題を1つ]

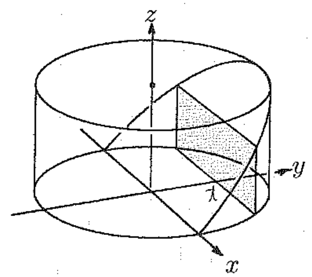
右図のように，底面の半径1，高さ1の円柱Tがある．Tのうち，xy平面より上側で，平面$z=y$より下側の部分をDとし，Dの体積をVとする．



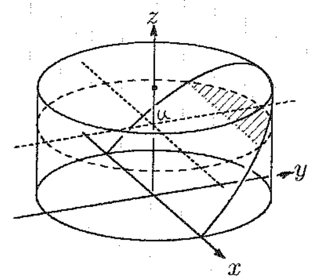
(1) 平面$x=s$ $(-1 \leqq s \leqq 1)$によるDの断面を考えることにより，Vを求めよ．



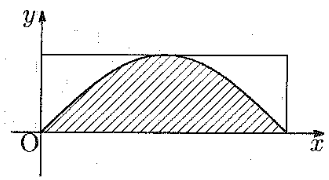
(2) 平面$y=t$ $(0 \leqq t \leqq 1)$によるDの断面を考えることにより，Vを求めよ．



(3) 平面$z=u$ $(0 \leqq u \leqq 1)$によるDの断面を考えることにより，Vを求めよ．

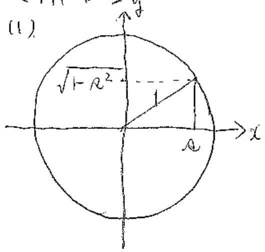


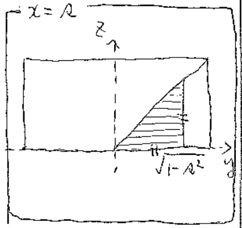
(4) Dのうち，Tの側面部分の表面積をSとする．点$(1, 0, 0)$を通りz軸に平行な直線によってTの側面を切り開いた展開図(右図)を考えることにより，Sを求めよ．



〔解答〕

(1)





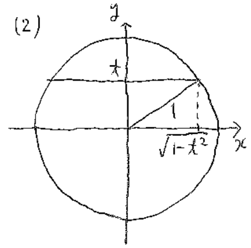
断面積は

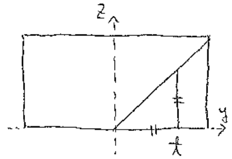
$$\frac{1}{2}\sqrt{1-x^2}\cdot\sqrt{1-x^2} = \frac{1}{2}(1-x^2).$$

$$\therefore\ V = \int_{-1}^{1}\frac{1}{2}(1-x^2)\,dx$$

$$= \int_0^1 (1-x^2) = \frac{2}{3}.$$ //

(2)





断面積は

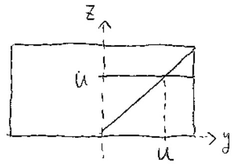
$$2\sqrt{1-t^2}\cdot t.$$

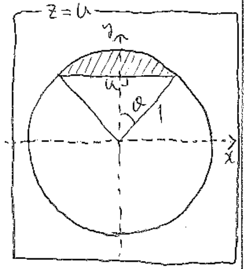
$$\therefore\ V = \int_0^1 2t\sqrt{1-t^2}\,dt$$

$$= \left[\frac{-2}{3}(1-t^2)^{\frac{3}{2}}\right]_0^1$$

$$= \frac{2}{3}\left[(1-t^2)^{\frac{3}{2}}\right]_1^0 = \frac{2}{3}.$$ //

(3)





断面積を $f(u)$ とおくと

$$V = \int_0^1 \underbrace{f(u)}\,\underbrace{du}.$$

断面積×微小な厚み

（$f(u)$ は u では表せないので θ で表すと）

$$= \frac{1}{2}\cdot 1^2\cdot 2\theta - \cos\theta\sin\theta$$

$$= \theta - \cos\theta\sin\theta.$$

また，$u = \cos\theta$ より $du = -\sin\theta\,d\theta$.

u	$0 \longrightarrow 1$
θ	$\frac{\pi}{2} \longrightarrow 0$

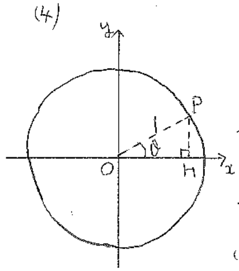
$$\therefore\ V = \int_{\frac{\pi}{2}}^{0}(\theta - \cos\theta\sin\theta)(-\sin\theta)\,d\theta$$

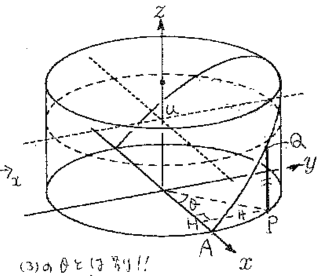
$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}}(\underset{\substack{\downarrow\\1}}{\theta}\,\underset{\substack{\uparrow\\-\cos\theta}}{\sin\theta} - \cos\theta\sin^2\theta)\,d\theta$$

$$= \left[-\theta\cos\theta + \sin\theta\right]_0^{\frac{\pi}{2}} - \left[\frac{\sin^3\theta}{3}\right]_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}.$$ //

(4)





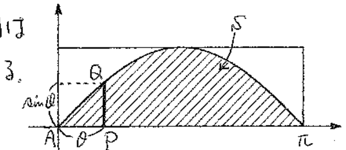
(3)のθとは別!!

図のように A, P, Q, H, θ をとると

$\overset{\frown}{AP} = 1\cdot\theta = \theta$. ←弧度法の定義より

$PQ = PH = \sin\theta$.

よって展開図は右のようになる。求める S は



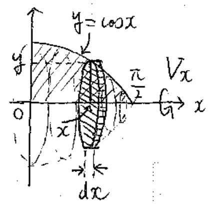
$$S = \int_0^{\pi}\sin\theta\,d\theta$$

$$= \left[+\cos\theta\right]_{\pi}^{0} = 2.$$ //

[体積の求め方]

(例1)

右図の回転体の体積 V_x を求める.



$$V_x=\int_0^{\frac{\pi}{2}} \overbrace{\pi y^2 \times dx}^{垂直} \quad (y は x の関数)$$

$x=0$ から $\frac{\pi}{2}$ まで細かく集める

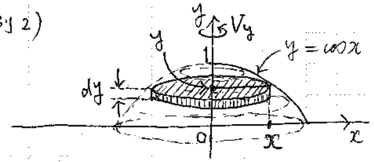
を

$$=\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x\,dx \quad (y を x で表す)$$

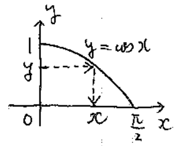
$$=\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1+\cos 2x}{2}\,dx$$

$$=\frac{\pi}{2}\left[x+\frac{1}{2}\sin 2x\right]_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{\pi^2}{4}. //$$

(例2)



上図の回転体の体積 V_y を求める.



$y=\cos x \ (0\le x\le \frac{\pi}{2}) \cdots ①$

のとき,

x は y の関数である.

「1つに定まる」

したがって

$$V_y=\int_0^1 \overbrace{\pi x^2 \times dy}^{垂直}$$

$y=0$ から1まで細かく集める!

を

(例1)とちがい,

x を y で表すことはできない

ので, 置換積分を用いる.

①より

$dy=-\sin x\,dx$,
$\begin{array}{c|c} y & 0\to 1 \\ \hline x & \frac{\pi}{2}\to 0 \end{array}$.

したがって

$$\frac{V_y}{\pi}=\int_{\frac{\pi}{2}}^0 x^2(-\sin x)\,dx$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}} \underset{\downarrow\, 2x}{x^2} \underset{\uparrow\, -\cos x}{\sin x}\,dx$$

$$=\left[-x^2\cos x\right]_0^{\frac{\pi}{2}}+2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \underset{\downarrow\, 1}{x} \underset{\uparrow\, \sin x}{\cos x}\,dx$$

$$=2\left[x\sin x+\cos x\right]_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$=2\left(\frac{\pi}{2}-1\right).$$

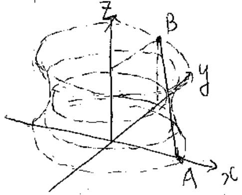
$$\therefore\ V_y=\pi(\pi-2). //$$

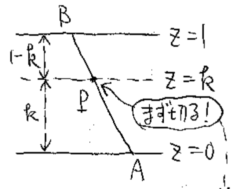
[形状不明な立体の体積]

〈方針：まず切る！〉

1 {切ってから回す。}

「A(1,0,0), B(0,1,1) を結んだ線分ABを z 軸のまわりに1回転してできる曲面と2平面 $z=0$, $z=1$ で囲まれる部分 K の体積 V を求めよ。」

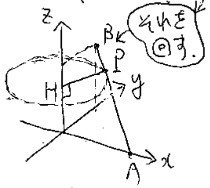




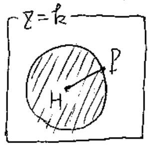
線分ABと平面 $z=k$ $(0\le k\le 1)$ との交点をPとすると、上右図より

$$\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OA}+k\overrightarrow{AB}=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}+k\begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix},$$

i.e. $P(1-k, k, k)$.



PをH(0,0,k)の回りに1回転させてできる次図の円が、K の平面 $z=k$ による断面である。この面積は



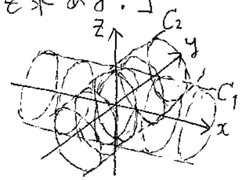
$\pi HP^2=\pi\{(1-k)^2+k^2\}$.

$$\therefore V=\int_0^1\pi\{(1-k)^2+k^2\}dk$$

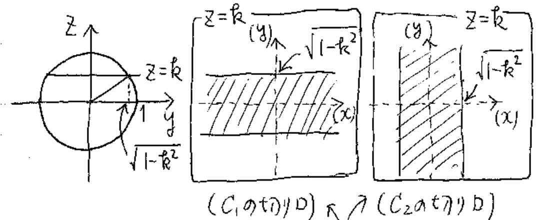
$$=\pi\left[-\frac{(1-k)^3}{3}+\frac{k^3}{3}\right]_0^1=\frac{2}{3}\pi.$$

2 {切ってから重ねる。}

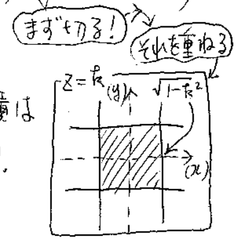
「2つの円柱 $C_1: y^2+z^2\le 1$, $C_2: x^2+z^2=1$ の共通部分 K の体積 V を求めよ。」



C_1, C_2 の平面 $z=k$ $(-1\le k\le 1)$ による切り口は、それぞれ次。



これら2つの交わりである右図の正方形が、K の平面 $z=k$ による断面で、その面積は



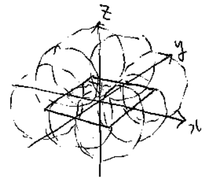
$(2\sqrt{1-k^2})^2=4(1-k^2)$.

$$\therefore V=\int_{-1}^{1}4(1-k^2)dk$$

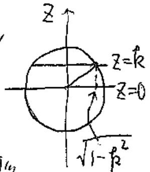
$$=8\int_0^1(1-k^2)dk=8\left(1-\frac{1}{3}\right)=\frac{16}{3}.$$

3 {切ってからズラす。}

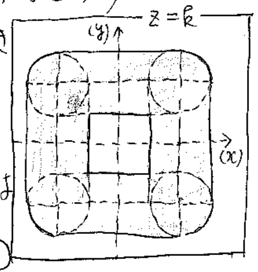
「4点 (1,1,0), (−1,1,0), (−1,−1,0), (1,−1,0) を結んだ正方形 R がある。半径1の球体 S の中心が R 上を1周するとき、S が通過してできる立体 K の体積 V を求めよ。」

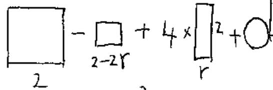


S の平面 $z=k$ $(-1\le k\le 1)$ による切り口は、半径 $r=\sqrt{1-k^2}$ の円板 D である。



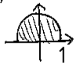
D の中心は、R と合同な正方形上を1周する。そのときの D の通過領域が、K の平面 $z=k$ による断面である。この面積は





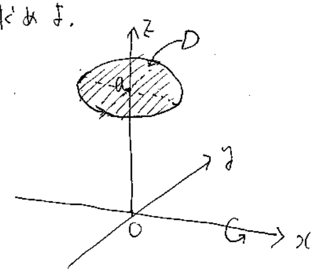
$=4-(2-2r)^2+4\cdot 2r+\pi r^2=16r-(4-\pi)r^2$.

$$\therefore V=\int_{-1}^{1}\{16\sqrt{1-k^2}-(4-\pi)(1-k^2)\}dk$$

$=16\times$  $-2(4-\pi)\int_0^1(1-k^2)dk=\dfrac{28\pi-16}{3}$.

［形状不明な立体の体積］

xyz 空間の平面 $z=a\ (a>0)$ 上に円板 D がある．D の中心は $(0,0,a)$ で半径は 1 である．D を x 軸のまわりに回転してできる立体 K の体積 V を求めよ．

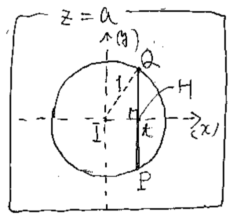


［解1：切ってから回す］

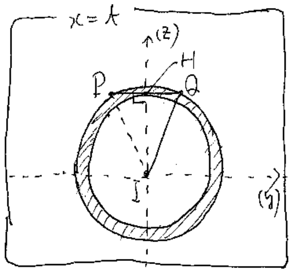
D の平面 $x=t\ (-1\le t\le 1)$ による切り口は，次図の線分 PQ．

図のように点 H をとると

$HP=HQ$
$=\sqrt{1-t^2}$.



この線分 PQ を x 軸のまわりに回転したものが，立体 K の平面 $x=t$ による断面であり，次図のようになる．



この断面積は

$$\pi IQ^2-\pi IH^2=\pi(IQ^2-IH^2)$$
$$=\pi HQ^2$$
$$=\pi(1-t^2).$$

$$\therefore\ V=\int_{-1}^{1}\pi(1-t^2)\,dt$$

$$=2\pi\int_0^1(1-t^2)\,dt=\frac{4}{3}\pi.\ //$$

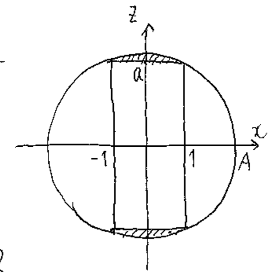
aによらない！

［解法2：どんな立体ができるか？］

D の周上の点と O のキョリは

$A:=\sqrt{a^2+1}$（一定）．

よって立体 K は，半径 A の球の一部から円柱を除いたものであり，

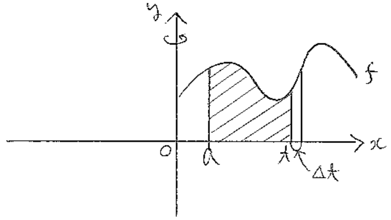


$$V=2\int_0^1\pi(A^2-x^2)\,dx-\pi a^2\times 2$$

$$=2\pi\left(A^2-\frac{1}{3}\right)-2\pi a^2$$

$$=2\pi\left(a^2+1-\frac{1}{3}-a^2\right)=\frac{4}{3}\pi.\ //$$

[シリンダー分割]〈一般証明〉



上図斜線部の回転体の体積を$V(t)$と表すと、tがtから$t+\Delta t$ $(\Delta t \neq 0)$まで変化するときの$V(t)$の増加量をΔVとおくと、区間$[t, t+\Delta t]$（もしくは$[t+\Delta t, t]$）における$f(x)$の最小値，最大値をそれぞれm, Mとして、

$$m\{\pi(t+\Delta t)^2-\pi t^2\} \leqq \Delta V \leqq \{\pi(t+\Delta t)^2-\pi t^2\}M$$

が成り立ち，

$\Delta t > 0$のとき

$$m\pi(2t+\Delta t) \leqq \frac{\Delta V}{\Delta t} \leqq M\pi(2t+\Delta t) \quad \cdots①$$

$\Delta t < 0$のとき

$$m\pi(2t+\Delta t) \geqq \frac{\Delta V}{\Delta t} \geqq M\pi(2t+\Delta t) \quad \cdots②$$

が成り立つ。

$\Delta t \longrightarrow 0$のとき，

$m, M \longrightarrow f(t)$

であるから，①,②の左辺と右辺はいずれも$2\pi t f(t)$に収束する。

$$\therefore \frac{dV}{dt} = 2\pi t f(t).$$

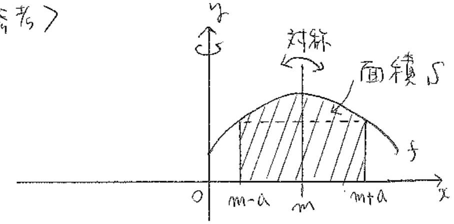
よって，

$$V(t)-V(a) = \int_a^t 2\pi x f(x)\,dx.$$

これと$V(a)=0$より

$$V(t) = \int_a^t 2\pi x f(x)\,dx.$$ ← シリンダー分割公式（うら技）

〈参考〉



上図の回転体の体積Vは，前記の結果より

$$V = \int_{m-a}^{m+a} 2\pi x f(x)\,dx.$$

ここで，$f(m+t) = f(m-t)$に注目すると，

$$V = 2\pi \int_{m-a}^{m+a} (x-m+m) f(x)\,dx$$

$$= 2\pi \left\{ \int_{m-a}^{m+a} (x-m) f(x)\,dx + \int_{m-a}^{m+a} m f(x)\,dx \right\}.$$

$g(x) = (x-m)f(x)$とおくと，

$g(m+t) = t f(m+t)$;

$g(m-t) = -t f(m-t) = -g(m+t)$ ゆえ，

$$\int_{m-a}^{m+a} g(x)\,dx = 0.$$

$$\therefore V = 2\pi m \int_{m-a}^{m+a} f(x)\,dx$$

$$= \underbrace{2\pi m}_{\text{対称軸が動くきょり}} \cdot \underbrace{S}_{\text{斜線部の面積}}$$ ← パップス・ギュルダン（さらにうら技）

[曲線の長さ（≒道のり）]

$\boxed{\text{例1}}$

「サイクロイド

$$C:\begin{cases} x = t - \sin t \\ y = 1 - \cos t \end{cases} \quad (0 \leq t \leq 2\pi)$$

の長さ L を求めよ.」

〈方針〉

t が時刻だと思って「速さ」を求める.

$$\begin{pmatrix} dx/dt \\ dy/dt \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-\cos t \\ \sin t \end{pmatrix} \cdots \boxed{\text{速度ベクトル}}$$

$$= \begin{pmatrix} 2\sin^2\frac{t}{2} \\ 2\sin\frac{t}{2}\cos\frac{t}{2} \end{pmatrix}$$

$$= 2\sin\frac{t}{2}\begin{pmatrix} \sin\frac{t}{2} \\ \cos\frac{t}{2} \end{pmatrix} \ (=\vec{v} \text{とおく}).$$

$$|\vec{v}| = 2\left|\sin\frac{t}{2}\right| \cdot 1 \quad \cdots \boxed{\text{速さ}}$$

$$= 2\sin\frac{t}{2} \quad \left(\because 0 \leq \frac{t}{2} \leq \pi\right).$$

よって

$$L = \int_0^{2\pi} \underbrace{|\vec{v}|}_{\text{速さ}} \times \underbrace{dt}_{\text{微小時間}}$$

細かく $=$ 微小な道のりを集める.

$$= \int_0^{2\pi} 2\sin\frac{t}{2}\,dt$$

$$= \left[+4\cos\frac{t}{2} \right]_{2\pi}^{0}$$

$$= 4(1+1) = 8. \text{//}$$

$\boxed{\text{例2}}$

「カテナリー $C: y = \underbrace{\frac{e^x + e^{-x}}{2}}_{f(x)\text{とおく}}$ の

$0 \leq x \leq 1$ の部分の長さ L を求めよ.」

〈方針〉

C が $\begin{cases} x = t \\ y = f(t) \end{cases}$ とパラメタ表示されているとみなせば

$$\begin{pmatrix} dx/dt \\ dy/dt \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ f'(t) \end{pmatrix} \ (=\vec{v})$$

$$|\vec{v}| = \sqrt{1 + f'(t)^2}.$$

「t」を「x」と書いてしまえば…

$$L = \int_0^1 \sqrt{1 + f'(x)^2}\,dx$$ ← これ自体が公式

ここで

$$f(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}, \quad f'(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \text{ より}$$

$$f(x)^2 - f'(x)^2 = e^x \cdot e^{-x} = 1.$$

$$\therefore \sqrt{1 + f'(x)^2} = \sqrt{f(x)^2}$$

$$= |f(x)| = f(x) \ (\because f(x) > 0).$$

よって

$$L = \int_0^1 f(x)\,dx$$

$$= \int_0^1 \frac{e^x + e^{-x}}{2}\,dx$$

$$= \left[\frac{e^x - e^{-x}}{2} \right]_0^1 = \frac{1}{2}\left(e - \frac{1}{e}\right). \text{//}$$