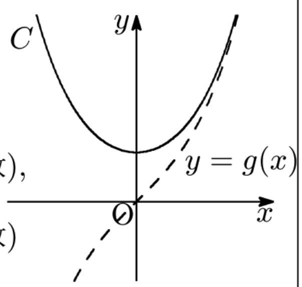
2007/2/1 更新

数ⅢC 頻出の曲線

A カテナリー

$C: y = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$.



○ $f(x) = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$ (偶関数),

$g(x) = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$ (奇関数)

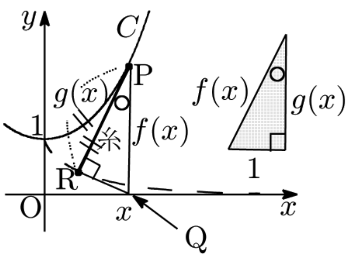
とおくと

$$f'(x) = g(x),\ g'(x) = f(x),$$
$$f(x)^2 - g(x)^2 = 1.$$

○ C の $0 \leqq x \leqq a$ $(a > 0)$ の部分の弧長は，上記より

$$\int_0^a \sqrt{1 + f'(x)^2}dx = \int_0^a \sqrt{1 + g(x)^2}dx$$
$$= \int_0^a \sqrt{f(x)^2}dx = \int_0^a f(x)\,dx = g(a).$$

○ C の $x \geqq 0$ の部分に巻き付けられた糸を，点 $(0,\ 1)$ のところからピンと張った状態で点 $\mathrm{P}(x,\ f(x))$ までほどいていったとき，



$\mathrm{Q}(x,\ 0)$，糸の先端を R とする．$\mathrm{PQ} = f(x)$，$\mathrm{PR} = g(x)$ より三角形 PQR は上図網掛け三角形 (斜辺の傾きは $g(x) = f'(x)$) と合同である．よって

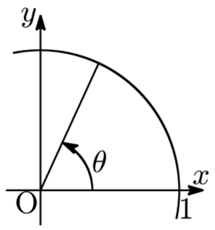
$$\angle\mathrm{PRQ} = 90^\circ,\ \mathrm{RQ} = 1\ (一定).$$

○ $y = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$ を x について解くと

$$x = \log(y + \sqrt{y^2 + 1}),$$
$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{y + \sqrt{y^2+1}} \cdot \left(1 + \frac{2y}{2\sqrt{y^2+1}}\right) = \frac{1}{\sqrt{y^2+1}}.$$

B 円 (楕円)，双曲線

円 $C: x^2 + y^2 = 1$，双曲線 $H: x^2 - y^2 = 1$ について．



○ パラメタ表示すると

$$C: \begin{cases} x = \cos\theta \\ y = \sin\theta \end{cases},$$
$$H: \begin{cases} x = \dfrac{1}{\cos\theta} \\ y = \tan\theta \end{cases}.\ \left(1 + \tan^2\theta = \frac{1}{\cos^2\theta}\right)$$

〈注〉 楕円 $E: \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$

双曲線 $H': \dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$

上の点は，それぞれ

$$x = a\sin\theta,\ y = b\cos\theta\ (\theta は偏角ではない！)$$
$$x = \frac{a}{\cos\theta},\ y = b\tan\theta$$

とパラメタ表示できる．なので，E, H' 上の点を，それぞれ

$$(a\alpha,\ b\beta)\ (ただし\ \alpha^2 + \beta^2 = 1),$$
$$(a\alpha,\ b\beta)\ (ただし\ \alpha^2 - \beta^2 = 1)$$

と表す手法がよく用いられる．

また，H は

$$x = \frac{1}{2}\left(t + \frac{1}{t}\right),\ y = \frac{1}{2}\left(t - \frac{1}{t}\right)$$

とも表せる．さらに H の $x \geqq 1$ の部分は，A の $f(x)$, $g(x)$ を用いて

$$x = f(x),\ y = g(x)$$

と表せる．

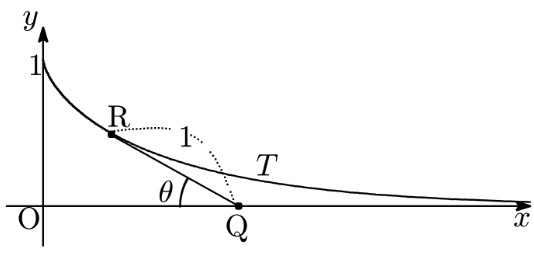
○ C, H の $y \geqq 0$ の部分は，それぞれ関数

$$y = \sqrt{1 - x^2},\ y = \sqrt{x^2 - 1}$$

のグラフ．

C トラクトリクス (牽引曲線)

x 軸上を正の向きに動く点 Q と xy 平面上を動く点 R があり，それぞれ点 $(0,\ 0)$, $(0,\ 1)$ を同時に出発する．各時刻において，つねに $\mathrm{RQ} = 1$ であり R はベクトル $\overrightarrow{\mathrm{RQ}}$ の向きに進むとする．このときの R の軌跡 T.



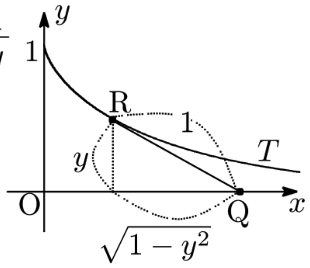
○ (導くのは容易ではないが)T の方程式は

$$x = -\sqrt{1 - y^2} + \log\frac{1 + \sqrt{1 - y^2}}{y}.$$

○$T: x = -\sqrt{1 - y^2} + \log(1 + \sqrt{1 - y^2}) - \log y$

を用いると

$$\frac{dx}{dy}=\cdots=\frac{y}{1+\sqrt{1-y^2}}-\frac{1}{y}$$
$$=\frac{1-\sqrt{1-y^2}}{y}-\frac{1}{y}$$
$$=-\frac{\sqrt{1-y^2}}{y}.$$

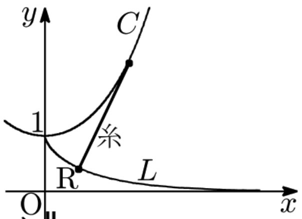


よって確かに $\mathrm{RQ}=1$ が成り立つことがわかる.

○ 直線 RQ と x 軸のなす角 θ を用いて

$$L:\begin{cases} x=-\cos\theta-\log\left(\tan\dfrac{\theta}{2}\right), \\ y=\sin\theta \end{cases}$$

とパラメタ表示できる.

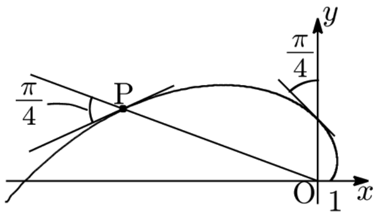


○ $\boxed{\mathrm{A}}$における糸の先端 R の軌跡は L と一致する.

$\boxed{\mathrm{D}}$ 等角らせん（対数らせん）

原点を極とし，x 軸の正の向きを始線とする極座標における極方程式は

$$L: r=e^{\theta}.$$



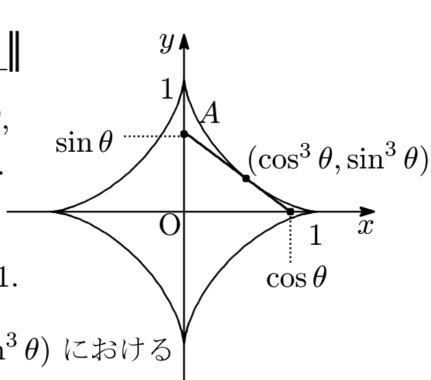
○ パラメタ表示すると

$$\begin{cases} x=e^{\theta}\cos\theta, \\ y=e^{\theta}\sin\theta. \end{cases}$$

○ L 上の任意の点 P について，P における接線と直線 OP となす角はつねに $\dfrac{\pi}{4}$(一定) である.

$\boxed{\mathrm{E}}$ アステロイド

$$A:\begin{cases} x=\cos^3\theta, \\ y=\sin^3\theta. \end{cases}$$



○ 方程式は

$$x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=1.$$

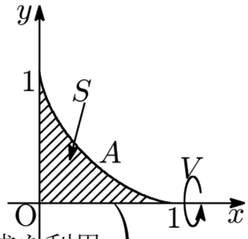
○ 点 $(\cos^3\theta,\ \sin^3\theta)$ における接線が x 軸，y 軸によって切り取られる線分の長さは

$$\sqrt{\cos^2\theta+\sin^2\theta}=1\ (一定).$$

○ $\boxed{\mathrm{K}}$「外＆内サイクロイド $\left(a=-\dfrac{1}{4}のとき\right)$ 」と同一な曲線.

○右図の面積 S，体積 V は

$$S=\cdots$$
$$=3\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\sin^4\theta-\sin^6\theta)\,d\theta$$
$$\left(\rightarrow\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n\theta\,d\theta の漸化式を利用.\right)$$

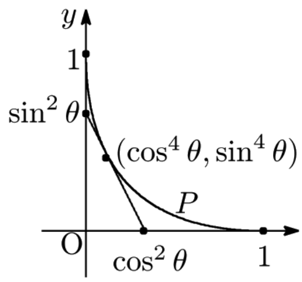


$$V=\cdots=3\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1-\cos^2\theta)^3\cos^2\theta\sin\theta\,d\theta.$$

(→置換積分)

$\boxed{\mathrm{F}}$ 放物線（の一部）

$$P:\sqrt{x}+\sqrt{y}=1$$



○ パラメタ表示すると

$$\begin{cases} x=\cos^4\theta, \\ y=\sin^4\theta. \end{cases}$$

○ 点 $(\cos^4\theta,\ \sin^4\theta)$ における接線と x 軸，y 軸との交点をそれぞれ A，B とすると

$$\mathrm{OA}+\mathrm{OB}=\cos^2\theta+\sin^2\theta=1\ (一定).$$

○ P を原点のまわりに 45° だけ回転させた曲線の方程式は

$$y=\frac{1}{\sqrt{2}}x^2+\frac{1}{2\sqrt{2}}\quad\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\leqq x\leqq\frac{1}{\sqrt{2}}\right).$$

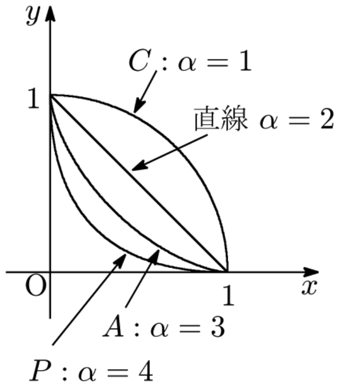
よって P は放物線の一部である.

〈参考〉

$\boxed{\mathrm{B}}$, $\boxed{\mathrm{E}}$, $\boxed{\mathrm{F}}$より，曲線

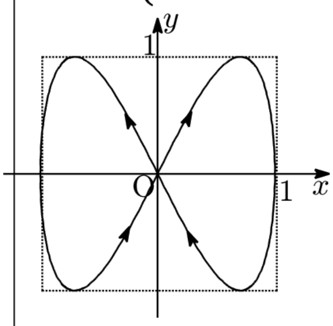
$$\begin{cases} x=\cos^{\alpha}\theta \\ y=\sin^{\alpha}\theta \end{cases}$$
$$\left(0\leqq\theta\leqq\frac{\pi}{2}\right)$$

は，α の値に応じて右図のようになる.

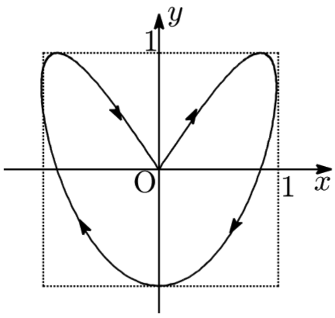


$\boxed{\mathrm{G}}$ リサージュ

$$L:\begin{cases} x=\sin at, \\ y=\sin bt. \end{cases}\quad (a,\ b\in\mathbb{Q})$$

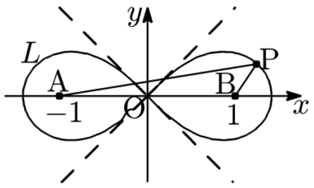


$$\begin{pmatrix} a=1,\ b=2, \\ 0\leqq\theta\leqq 2\pi \end{pmatrix}$$



$$\begin{pmatrix} a=2,\ b=3, \\ 0\leqq\theta\leqq\pi \end{pmatrix}$$

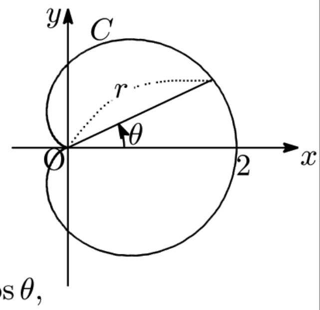
H レムニスケイト



2 点 A$(-a,\ 0)$, B$(a,\ 0)$ (a は正の定数) に到る距離の積が a^2 となる点 P, すなわち AP·BP $= a^2$ をみたす点 P の軌跡 L.

- L の方程式は
$$(x^2+y^2)^2 = 2a^2(x^2-y^2).$$
- 原点を極として x 軸の正の向きを始線とする極座標において，L の極方程式は
$$r = a\sqrt{2\cos 2\theta}.$$

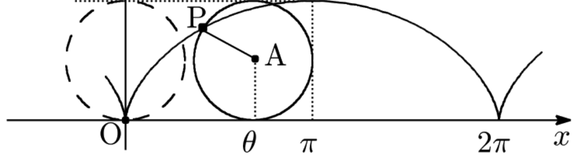
I カージオイド



$C : r = 1+\cos\theta$

- $-\pi \leqq \theta \leqq 0$ の部分と $0 \leqq \theta \leqq \pi$ の部分は x 軸に関して対称.
- パラメタ表示すると
$$\begin{cases} x = (1+\cos\theta)\cos\theta, \\ y = (1+\cos\theta)\sin\theta. \end{cases}$$
- $$\frac{dx}{d\theta} = -\sin\theta - \sin 2\theta = 2\cos\frac{\theta}{2}\left(-\sin\frac{3\theta}{2}\right),$$
$$\frac{dy}{d\theta} = \cos\theta + \cos 2\theta = 2\cos\frac{\theta}{2}\cdot\cos\frac{3\theta}{2}$$
により，$0 \leqq \theta \leqq \pi$ における $x,\ y$ の増減がわかる.
- $$\overrightarrow{v} := \begin{pmatrix} dx/d\theta \\ dy/d\theta \end{pmatrix} = 2\cos\frac{\theta}{2}\begin{pmatrix} -\sin\frac{3\theta}{2} \\ \cos\frac{3\theta}{2} \end{pmatrix}$$
より $\left|\overrightarrow{v}\right| = 2\left|\cos\frac{\theta}{2}\right|$ だから，弧長が求まる.
- K「外&内サイクロイド ($a=1$ のとき)」と相似な曲線. また，L「リマソン ($a=0$ のとき)」と同一な曲線.

J サイクロイド

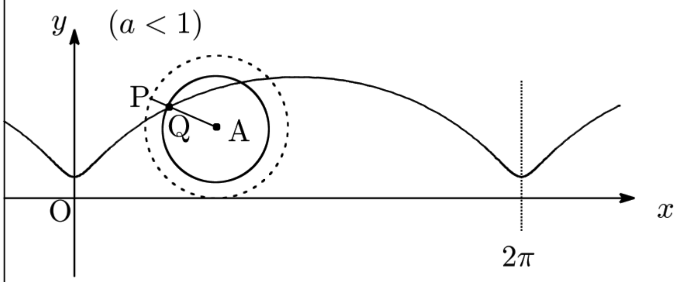


平らな地面を，中心 A 半径 1 のタイヤが「滑ることなく」転がるとき，タイヤの外周上に固定された点 P が描く曲線.

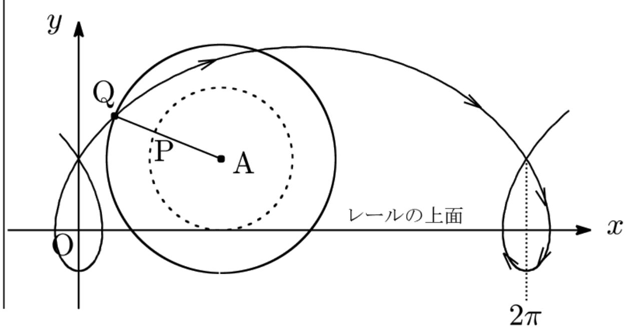
- 接点を $(\theta,\ 0)$ とする. $\theta = 0$ のとき原点にあった P の座標は
$$\begin{cases} x = \theta - \sin\theta, \\ y = 1-\cos\theta. \end{cases}$$
- $$\frac{dx}{d\theta} = 1-\cos\theta = 2\sin^2\frac{\theta}{2},$$
$$\frac{dy}{d\theta} = \sin\theta = 2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}.$$
$$\therefore\ \overrightarrow{v} := \begin{pmatrix} dx/d\theta \\ dy/d\theta \end{pmatrix} = 2\sin\frac{\theta}{2}\begin{pmatrix} \sin\frac{\theta}{2} \\ \cos\frac{\theta}{2} \end{pmatrix}.$$
よって $\left|\overrightarrow{v}\right| = 2\left|\sin\frac{\theta}{2}\right|$ だから，弧長が求まる.
- θ を時刻とみれば (つまり，タイヤが等速で転がるなら)，$\theta = 2n\pi\ (n \in \mathbb{Z})$ のとき $\left|\overrightarrow{v}\right| = 0$. すなわち P が地面に触れる瞬間，速さが 0 になる.

〈参考〉タイヤが転がるとき，半直線 AP 上に固定された点で AQ $= a(\neq 1)$ をみたす点 Q が描く軌跡を「トロコイド」という. 接点が $(\theta,\ 0)$ のときの Q の座標は
$$\begin{cases} x = \theta - a\sin\theta, \\ y = 1-a\cos\theta \end{cases}$$

$a<1$ のとき，Q はタイヤの外周より内側にあり，次図のように動く.



$a>1$ のとき，Q はタイヤの外周より外側にある (電車の車輪のうちレールに触れる部分より外側の点をイメージ). Q は次図のように“ループ”を描き，$\dfrac{dx}{d\theta} = 1-a\cos\theta = y$ だからレールの上面 (地面) より下に“めり込んだ”とき，電車の進行方向とは逆向きに進む.



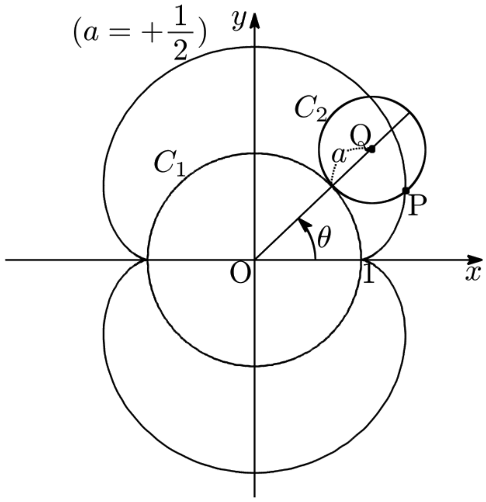
K 外＆内サイクロイド

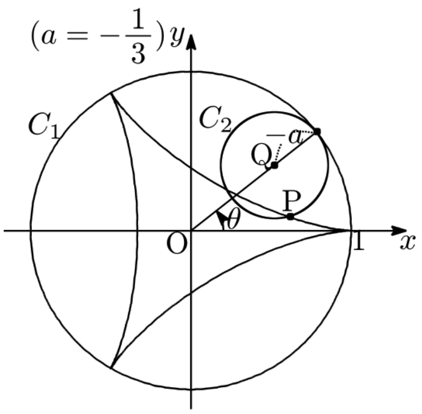
半径 1 の固定円 C_1 のまわりを，Q を中心とする半径 $|a|$ の円 C_2 が「滑ることなく」転がるとき，C_2 上に固定された 1 点 P が描く軌跡.

○ Q の偏角を θ とすると，$\theta=0$ のとき $(1,\ 0)$ にあった点 P の座標は

$$\begin{cases} x=(1+a)\cos\theta-a\cos\left(1+\dfrac{1}{a}\right)\theta, \\ y=(1+a)\sin\theta-a\sin\left(1+\dfrac{1}{a}\right)\theta. \end{cases}$$

ここに，C_2 が C_1 に外接するなら a は正，内接するなら a は負の値であり，それぞれの場合の P の軌跡を「外サイクロイド」,「内サイクロイド」という.





○
$$\begin{aligned} \frac{dx}{d\theta}&=(1+a)\left\{-\sin\theta+\sin\left(1+\frac{1}{a}\right)\theta\right\} \\ &=(1+a)\cdot 2\cos\left(1+\frac{1}{2a}\right)\theta\cdot\sin\frac{\theta}{2a}, \\ \frac{dy}{d\theta}&=(1+a)\left\{\cos\theta-\cos\left(1+\frac{1}{a}\right)\theta\right\} \\ &=(1+a)\cdot 2\sin\left(1+\frac{1}{2a}\right)\theta\cdot\sin\frac{\theta}{2a}. \end{aligned}$$

$$\therefore\ \overrightarrow{v}:=\begin{pmatrix} dx/d\theta \\ dy/d\theta \end{pmatrix}$$

$$=2(1+a)\sin\frac{\theta}{2a}\begin{pmatrix} \cos\left(1+\dfrac{1}{2a}\right)\theta \\ \sin\left(1+\dfrac{1}{2a}\right)\theta \end{pmatrix}.$$

よって $\left|\overrightarrow{v}\right|=2(1+a)\left|\sin\dfrac{\theta}{2a}\right|$ だから，弧長が求まる.

○ $a=+1$ のとき，$\boxed{\text{I}}$「カージオイド」と相似な曲線となる.

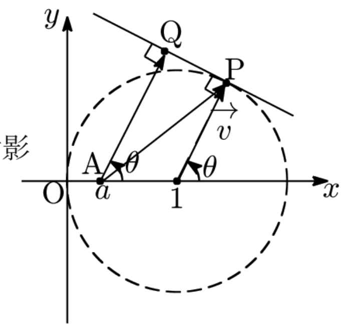
○ $a=-\dfrac{1}{4}$ のとき

$$\begin{aligned} x=&\frac{3}{4}\cos\theta+\frac{1}{4}\cos(-3\theta) \\ =&\frac{1}{4}\left(3\cos\theta+4\cos^3\theta-3\cos\theta\right)=\cos^3\theta. \end{aligned}$$

同様にして $y=\sin^3\theta$ だから，$\boxed{\text{E}}$「アステロイド」と同一な曲線となる.

L 円の垂足曲線：リマソン

中心 (1,0) 半径 1 の円周上の点 P $(1+\cos\theta,\ \sin\theta)$ における接線に，定点 $\mathrm{A}(a,\ 0)$ $(a<1)$ から下ろした垂線の足を Q として，P が円周上を動くときの Q の軌跡 L.



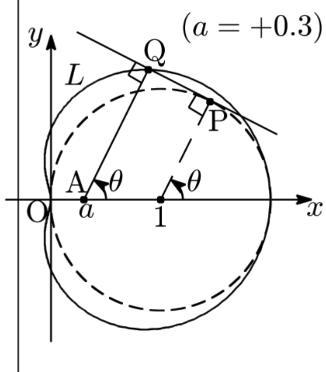
○$\overrightarrow{\mathrm{AQ}}$ は，$\overrightarrow{\mathrm{AP}}$ の $\overrightarrow{v}:=\begin{pmatrix}\cos\theta \\ \sin\theta\end{pmatrix}$ への正射影ベクトルだから

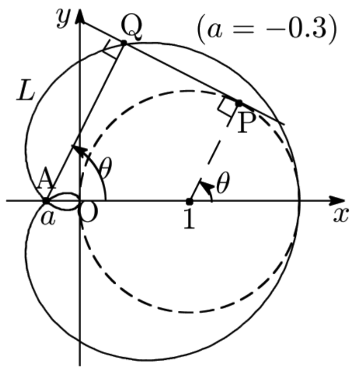
$$\begin{aligned} \overrightarrow{\mathrm{AQ}}=&\frac{\overrightarrow{\mathrm{AP}}\cdot\overrightarrow{v}}{\left|\overrightarrow{v}\right|^2}\overrightarrow{v}. \\ =&\{1+(1-a)\cos\theta\}\begin{pmatrix}\cos\theta \\ \sin\theta\end{pmatrix}. \end{aligned}$$

○ つまり，A を極として x 軸の正の向きを始線とする極座標において，L の極方程式は

$$r=1+(1-a)\cos\theta.$$

○ a の符号に応じて，L の概形は次図のように変化する.（$a<0$ のときは“ループ”ができる.）





○ $a=0$ のとき，L は $\boxed{\text{I}}$「カージオイド」と同一な曲線.