●○ **二項係数** 2009/6/8 更新

A 二項係数

(1) **定義**

$$ {}_n\mathrm{C}_k=\frac{n!}{k!(n-k)!}. $$

(ただし，$0!=1$ と定める．よって，${}_n\mathrm{C}_0={}_n\mathrm{C}_n=1$.)

(2) **意味**

異なる n 個のものから k 個を選んでできる組み合わせの総数.

(3) **公式**

(n 人のチームから k 人の選手を決める方法をイメージして思い出す．証明は (1) に基づいて行う.)

(a) ${}_n\mathrm{C}_k={}_n\mathrm{C}_{n-k}$.
(選手と補欠は 1 対 1)

(b) ${}_n\mathrm{C}_k={}_{n-1}\mathrm{C}_{k-1}+{}_{n-1}\mathrm{C}_k$.
(エースを使うか否か)

(c) ${}_n\mathrm{C}_k k=n_{n-1}\mathrm{C}_{k-1}$.
(選手選んでから主将決めるか？主将決めてから残りの選手選ぶか？)

〈注〉(1) を定義とする立場では，二項係数が整数であることは自明ではない．(3)(b) の公式を用いて，n に関する数学的帰納法で証明される．もっとも，高校では (2) の方を定義とする立場をとることが多いので，入試では二項係数は整数であるとしてよい.

B 二項定理（数学 C）

たとえば展開公式

$$(a+b)^3=a^3+\underline{3}a^2b+3ab^2+b^3$$

において，右辺の a^2b の係数が $\underline{3}$ となることは，次のようにして理解できる.

$$\underbrace{(a+b)}_{\boxed{1}}\underbrace{(a+b)}_{\boxed{2}}\underbrace{(a+b)}_{\boxed{3}}$$

因数 $\boxed{1}$, $\boxed{2}$, $\boxed{3}$ のそれぞれから a, b のうち一方を抜き出して作る積のうち,「a^2b」の項になるものは，上図で線を引いて示した 3 つである．これは,

3 つの因数 $\boxed{1}$, $\boxed{2}$, $\boxed{3}$ のうち，b の方を抜き出す 1 つの因数の選び方の数

に他ならない．よって a^2b の係数は

$$ {}_3\mathrm{C}_1=\underline{3} $$

となる.

このような**展開の仕組み**が理解されていれば，次の「二項定理」も自然に覚えられる.

$$\overset{\boxed{1}}{(a+b)}\overset{\boxed{2}}{(a+b)}\overset{\boxed{3}}{(a+b)}\cdots\overset{\boxed{n}}{(a+b)}$$
$$=a^n+na^{n-1}b+{}_n\mathrm{C}_2a^{n-2}b^2+\cdots+b^n.$$

$\boxed{1}$〜$\boxed{n}$ のうち，どの 2 つだけから b の方を抜き出すか

これを，両辺を簡潔にまとめた形で書くと

$$(a+b)^n=\sum_{k=0}^{n}{}_n\mathrm{C}_k a^{n-k}b^k. \quad \text{←これが二項定理}$$

〈注〉要するに二項定理とは，ただの展開公式である．だから，数学のあらゆる分野で頻繁に用いられる.

〈参考 1〉ただし，右辺から左辺へと使えば，因数分解の公式となる．以下に 2 例ほど示す.

$$\sum_{k=0}^{n}{}_n\mathrm{C}_k2^k=\sum_{k=0}^{n}{}_n\mathrm{C}_k1^{n-k}2^k=(1+2)^n=3^n.$$

$$\sum_{k=0}^{n}{}_n\mathrm{C}_k=\sum_{k=0}^{n}{}_n\mathrm{C}_k1^{n-k}1^k=(1+1)^n=2^n.$$

〈参考 2〉 二項定理の厳・厳・厳密な証明は，A(3)(b) を用いて n に関する数学的帰納法によってなされる．(ふつう，それを要求されることはない．)

C 二項分布（数学 C）

次のような試行を行う．

- 1 回の試行 T において，
$$\begin{cases} \text{事象 } A \text{ が起きる確率は } p, \\ \text{事象 } \overline{A} \text{ が起きる確率は } q(=1-p). \end{cases}$$
- T を独立に（無関係に）n 回反復する．

このとき,「事象 A が起きる回数」を確率変数 X とすると

X は二項分布 $B(n,\ p)$ に従う

反復回数 ↑　↑ 1 回あたりの A の確率

といい，次が成り立つ．

(1)　$X=k$，すなわち
$$n\text{ 回}\begin{cases} A : k \text{ 回} \\ \overline{A} : n-k \text{ 回} \end{cases}$$
となる確率は
数学 A「確率」の有名公式
$$P(X=k)={}_n\mathrm{C}_k p^k q^{n-k} (k=0,\ 1,\ \ldots,\ n).$$

(2)　X の期待値は
$$E(X)=np. \qquad \cdots ✿$$

〈参考〉　(1) の確率の総和を考えると，
$$\sum_{k=0}^{n} {}_n\mathrm{C}_k p^k q^{n-k} = (p+q)^n \quad \text{（二項定理より）}$$
$$=1. \qquad \text{←当然だが美しい}$$

〔✿の証明〕

$E(X)$
$$=\sum_{k=0}^{n} k\,{}_n\mathrm{C}_k\, p^k q^{n-k} \qquad (k=0 \text{ のときの値は } 0)$$
$$=\sum_{k=1}^{n} n\,{}_{n-1}\mathrm{C}_{k-1}\, p^k q^{n-k} \qquad (\because \text{公式 (c)})$$
(変数 k が集まった．そこで, $j=k-1$ とおくと)
$$=np\sum_{j=0}^{n-1} {}_{n-1}\mathrm{C}_j\, p^j q^{n-1-j}$$
$$=np(p+q)^{n-1}$$
$$=np. \ \square$$

〈例〉サイコロを 600 回投げるとき，1 の目が出る回数を X とする．このとき，
X は二項分布 $B\left(600,\ \dfrac{1}{6}\right)$ に従うから $\cdots$ ⊘
必ず書くべし !!
その期待値は
$$E(X)=600\cdot\frac{1}{6}=100.$$

〈注意！〉記述式試験において，上記のように公式✿を使う際には，⊘の一文を必ず述べること！

〈参考 1〉公式✿を証明する際，等式
$$(1+x)^n$$
$$=1+{}_n\mathrm{C}_1 x+{}_n\mathrm{C}_2 x^2+{}_n\mathrm{C}_3 x^3+\cdots+{}_n\mathrm{C}_n x^n$$
の両辺を x で微分して証明するやりかたもあるが，ワザワザそんな下準備をするのもうっとうしい．

なお,「ピンポイント」「確率分布 (数学 C)」に，やや高度な別証明がある．

〈参考 2〉上記**〔✿の証明〕**と同じ手法を用るものに，次のような典型問題がある．
$$\sum_{k=0}^{n} k\,{}_n\mathrm{C}_k \qquad (k=0 \text{ のときの値は } 0)$$
$$=\sum_{k=1}^{n} n\,{}_{n-1}\mathrm{C}_{k-1} \qquad (\because \text{公式 (c)})$$
($j=k-1$ とおくと)
$$=n\sum_{j=0}^{n-1} {}_{n-1}\mathrm{C}_j\, 1^j 1^{n-1-j}$$
$$=n(1+1)^{n-1}=n2^{n-1}. \ \square$$

(**〈参考 1〉**の等式を用いることもできる．)