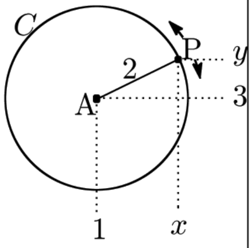
2006/5/13 更新

図形と式

主役は図形．式は1つの手段．

(以下の図において，xy 平面上の図形を描くときでも，座標軸を適宜省略している．)

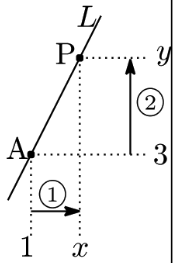
A 円



たとえば中心 A(1, 3)，半径 2 の円 C があるとき，中心 A から C 上の動点 P$(x,\ y)$ に到る距離はつねに 2 であるから

$$C : (x-\underbrace{1)^2+(y-3}_{\text{中心}})^2 = \underbrace{2}_{\text{半径}}{}^2. \quad \cdots \boxed{\text{距離一定}}$$

B 直線

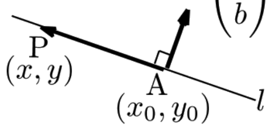


たとえば1点 A(1, 3) を通り傾きが 2 の直線 L において，1点 A から L 上の動点 P$(x,\ y)$ まで移動するとき，ヨコ座標・タテ座標の変化量どうしの比はつねに 1 : 2 であるから

$$L : \overbrace{y-3}^{\text{タテ変化量}} = \underbrace{2}_{\text{傾き}}\overbrace{(x-1)}^{\text{ヨコ変化量}}. \quad \cdots \boxed{\text{方向不変}}$$

〈注〉図からわかるように，傾き2の直線の**方向ベクトル** (の1つ) は $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ である．　直線と平行なベクトル

C 直線と法線ベクトル



$$\vec{n} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

点 A$(x_0,\ y_0)$ を通り，$\vec{n} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ を**法線ベクトル**とする直線 l 上の点 P$(x,\ y)$ がみたすべき条件は，

$$\vec{n} \cdot \overrightarrow{\mathrm{AP}} = 0.$$

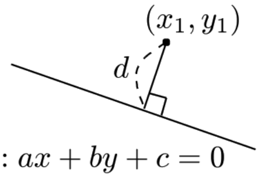
$$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x-x_0 \\ y-y_0 \end{pmatrix} = 0.$$

すなわち，直線 l の方程式は

$$a(x-x_0)+b(y-y_0)=0.$$

〈注〉この考え方が理解されていれば，空間座標における「平面の方程式」も作ることができる．

D 点と直線の距離公式 (証明は後のページで)



点 $(x_1,\ y_1)$ と直線

$$\underbrace{ax+by}_{\text{法線ベクトル}}+c=0$$

の距離 d は

$$d = \frac{|\overbrace{ax_1+by_1+c}^{\text{左辺に }(x_1, y_1)\text{ を代入}}|}{\underbrace{\sqrt{a^2+b^2}}_{\text{法線ベクトルの大きさ}}}.$$

E 円と直線の位置関係

(1)　円の中心と直線の**距離**に注目する．

(2)　連立方程式の**共通解**を考える．

〈注〉(2) は共有点の座標そのものを目指した処理法である．そこに興味がない場合は (1) の方が簡便．

F 2つの円の位置関係

中心間**距離**とそれぞれの半径に注目する．

G 軌跡

軌跡とは

ある$\underbrace{\text{条件}}_{\text{主に } x, y \text{ の等式}}$を満たす**点 $(x,\ y)$ の集合**

である．

〔点 P の軌跡を求める手順〕

0°　まず，計算用紙にらくがきしながら点 P の動きそのものを大まかに把握する

1°　「P$(X,\ Y)$」のように座標を設定する．

2°　与えられた条件を，$X,\ Y$(およびパラメタ t など) を用いて表す．

3°　2° で t を用いた場合は，可能なら

✿　$t = X,\ Y$ の式

の形を作り，t を消去する．

4°　t を消去した際に，$\underbrace{\text{軌跡に制限}}_{\text{「軌跡の限界」などと言う}}$が生じていることがあるので注意！

〈注〉# 3°, 4° の作業は，厳密に述べると条件を満たす t の存在条件を求めている．

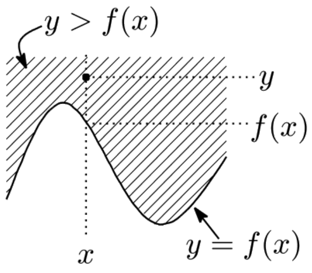
H 領域

領域とは

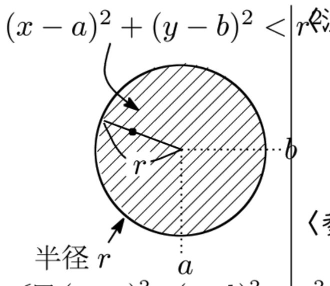
$x,\ y$ の不等式を満たす**点 $(x,\ y)$ の集合**

である．

〔よく現れる領域〕



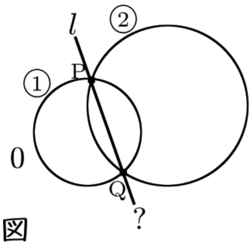
〔曲線 $y=f(x)$ の上側〕
(「<」なら曲線の下側)



〔円 $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$ の内側〕
(「>」なら円の外側)

I “第 3 の曲線” ←「束(そく)」と呼ぶ先生が多いかな

たとえば2つの円



① $:x^2+y^2-4=0$

② $:x^2+y^2-6x-2y-1=0$

の交点 P，Q を通る**“第 3 の図形”**のうち，直線PQの方程式を求めてみよう．

当然，自然な解法としては連立方程式 $\{①, ②\}$ を解いて P，Q の座標を求め，それを用いて直線 PQ の方程式を求める方法が考えられるが，本問では P，Q の座標が複雑で大変である．そこで，ずいぶん唐突ではあるが

$$③ : \underbrace{(x^2+y^2-4)}_{①の左辺}+k\underbrace{(x^2+y^2-6x-2y-1)}_{②の左辺}=0$$

が表す図形を考える．P，Q の座標は①，②をともに満たすから，P，Q の座標を③に代入すると，「①の左辺」，「②の左辺」の部分はともに 0 になる．よって，次のことがわかる．

③は $\begin{cases} k \text{ の値によらず 2 点 P, Q を通る.} \\ k=-1 \text{ のとき 1 次方程式となり直線を表す.} \end{cases}$

よって直線 PQ の方程式は，$k=-1$ のときの③，すなわち

$$(x^2+y^2-4)-(x^2+y^2-6x-2y-1)=0$$

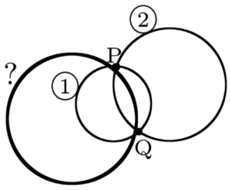
i.e. $6x+2y-3=0$.

〈注 1〉 結果としては，①と②の辺々どうしを引けばよいのだが，原理を理解しておくことによって，下の**〈参考〉**の例などもほとんど同様に扱うことができる．

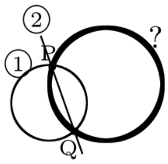
〈注 2〉 「求める方程式をイキナリ③とおいていいものか?」という気もするが，異なる 2 点 P，Q を通る直線はただ 1 本だけ存在する．したがって，どんな方法を使おうが，条件を満たすものを 1 つ見つけてしまえばそれで満点！

〈注 3〉 P，Q を通るすべての図形が③で表される訳ではない．実際，k にいかなる値を代入しようが，③は P，Q を通る3 次関数を表すことはできない．

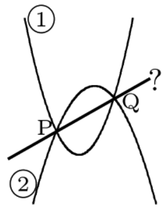
〈参考〉 よく使う“第 3 の図形”として，上の例以外に次のものがある．(①，②の交点 P，Q を通る“第 3 の図形”を太線で表している．)



(2 円の交点を通る円)

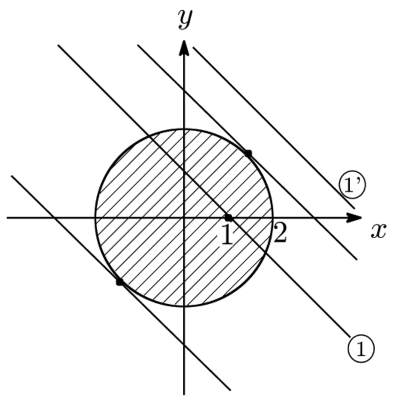


(円と直線の交点を通る円)



(2 つの放物線の交点を通る直線)

J 領域内における 2 変数関数の変域



たとえば点 $\mathrm{P}(x,\, y)$ が領域 $D : x^2 + y^2 \leqq 2^2$ 内を動くとき，2 変数関数「$x + y$」のとりうる値の範囲 I を求めてみよう．次のように考える．

○ たとえば $x+y$ が「1」という値をとることは可能であろうか，それとも不可能であろうか? 答は「可能」である．なぜなら，D 内にある 1 点 $(1,\, 0)$ の座標を $x + y$ に代入してみると

$$x + y = 1 \qquad \cdots ①$$

となるからである．しかし，当然のことながら，代入した「点 $(1,\, 0)$」をどうやって見つけたのか? という疑問が残るだろう．そこで，その“見つけ方”を考えてみる．

要するに，①を満たす D 内の点 $(x,\, y)$ を見つけ出せばよい訳である．その「①を満たす点 $(x,\, y)$」を集めてできた集合とは，方程式①で表される直線であるから，「①を満たす D 内の点 $(x,\, y)$」とは

直線①と領域 D の共有点 $\cdots$

に他ならない．①$: y = -x + 1$ は y 切片が 1 で傾きが -1 の直線であるから，図からわかるように，としてたとえば $(1,\, 0)$, $(0,\, 1)$ などが存在する．よって，「1」という値は求める変域 I に属する．

○ 前記の「1」を「4」という値に換えて同様な考察をしてみよう．

$$x + y = 4 \quad \text{i.e.} \quad y = -x + 4 \qquad \cdots ①'$$

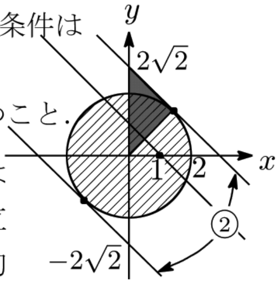
を満たす D 内の点，すなわち直線①'と領域 D の共有点は，図より存在しない．よって，$x+y$ が「4」という値をとることは不可能である．すなわち，「4」は，求める変域 I に属さない．

1, 4, -2, 2007, …

このように，固定された 1 つ 1 つの定数 k に対して，等式

$$x + y = k \qquad \cdots ②$$

を満たす D 内の点が見つかるか否かを，逐一判定していく．解答としては，次のようになる．



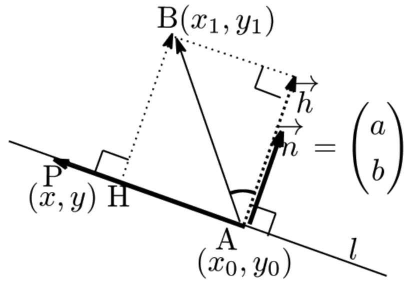
定数 k が I に属するための条件は

$$(*)\begin{cases} \text{直線②}: y = -x + k \text{ と} \\ \text{領域 } D \text{ が共有点をもつこと．} \end{cases}$$

$(*)$ が成り立つとき，直線②は右図の範囲で動かせる．図の直角二等辺三角形に注目して y 切片を求めて

$$I : -2\sqrt{2} \leqq k \leqq 2\sqrt{2}.$$

K D の証明



点 $\mathrm{B}(x_1,\, y_1)$ から直線 l :

$$\underbrace{a(x - x_0) + b(y - y_0)}_{f(x)\ \text{とおく}} = 0 \qquad \cdots$$

へ下ろした垂線の長さは，

$$\begin{aligned}
\mathrm{BH} &= \left|\overrightarrow{h}\right| \\
&= \left|\left|\overrightarrow{\mathrm{AB}}\right|\cos\theta\right| \\
&= \frac{\left|\left|\overrightarrow{n}\right|\left|\overrightarrow{\mathrm{AB}}\right|\cos\theta\right|}{\left|\overrightarrow{n}\right|} \\
&= \frac{\left|\overrightarrow{n} \cdot \overrightarrow{\mathrm{AB}}\right|}{\left|\overrightarrow{n}\right|} \\
&= \frac{|a(x_1 - x_0) + b(y_1 - y_0)|}{\sqrt{a^2 + b^2}}.
\end{aligned}$$

(点と直線の距離公式)

分子の絶対値内は $f(x_1,\, y_1)$ に他ならない．したがって，直線 l が

$$l : \underbrace{ax + by + c}_{f(x)} = 0$$

と表されているときには

$$\begin{aligned}
\mathrm{BH} &= \frac{|f(x_1,\, y_1)|}{\sqrt{a^2 + b^2}} \\
&= \frac{|ax_1 + by_1 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}. \square
\end{aligned}$$