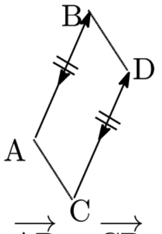
2006/8/17 更新

ベクトル

A ベクトルとは？

有向線分（矢印）の「向き」と「大きさ」だけを考えたものが**ベクトル**である．

(相等)

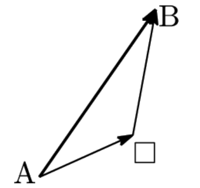


$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\overrightarrow{\mathrm{CD}}$

〈注 1〉ベクトルを考える際は，矢印の「位置」の違いは無視する．

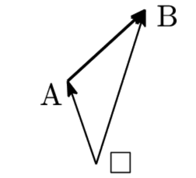
〈注 2〉ベクトルとは，「移動」，もしくは「変位」のようなものだと思えばわかりやすく，「相等」「和」「差」「実数倍」等の規則が自然に覚えられる．

(和)



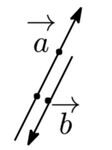
$\overrightarrow{\mathrm{A}\square}+\overrightarrow{\square\mathrm{B}}=\overrightarrow{\mathrm{AB}}$

(差)



$\overrightarrow{\square\mathrm{B}}-\overrightarrow{\square\mathrm{A}}=\overrightarrow{\mathrm{AB}}$

(実数倍)

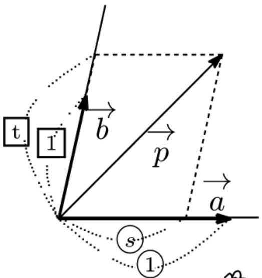


$\vec{b}=-\dfrac{2}{3}\vec{a}$

B 分解の一意性

(1) 共線でない (平行でない)2 ベクトル $\vec{a}$, $\vec{b}$ が決定する平面上の任意のベクトル $\vec{p}$ に対し，

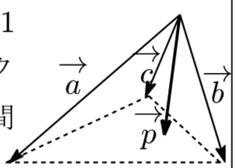
$$\vec{p}=s\vec{a}+t\vec{b} \qquad \cdots ✿$$



をみたす実数の対 (s,t) が**存在**し， しかもそれは**一意的**（いちい）である．←「一意的」とは「ただ一通り」の意

(2) 共面でない (つまり，四面体の 1 頂点から発する 3 辺をなす)3 ベクトル $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ があるとき，空間内の任意のベクトル $\vec{p}$ に対して

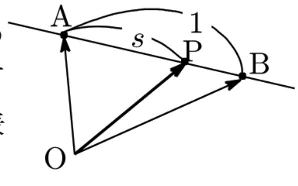
$$\vec{p}=s\vec{a}+t\vec{b}+u\vec{c}$$



をみたす実数の対 (s,t,u) が存在し，しかもそれは一意的である．

C 共線条件

点 P が直線 AB 上にあるとき，ある実数 s を用いて次の①，②，③のように表せる．



平行

$$\overrightarrow{\mathrm{AP}}=s\overrightarrow{\mathrm{AB}}. \qquad \cdots①$$

実数倍

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{AP}} \qquad (\overrightarrow{\mathrm{OP}}\text{を和に分解})$$

$$=\overrightarrow{\mathrm{OA}}+s\overrightarrow{\mathrm{AB}}. \qquad \cdots②$$

直線 AB の方向ベクトル

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}+s\left(\overrightarrow{\mathrm{OB}}-\overrightarrow{\mathrm{OA}}\right) \qquad (\overrightarrow{\mathrm{AB}}\text{を差に分解})$$

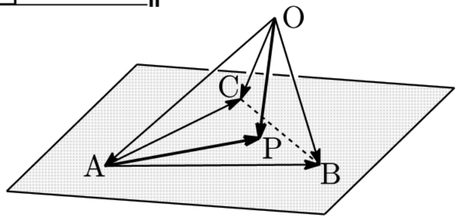
$$=(1-s)\overrightarrow{\mathrm{OA}}+s\overrightarrow{\mathrm{OB}}. \qquad \cdots③$$

和=1

〈注 1〉②，③において，始点「O」は任意である．

〈注 2〉②はパラメタ s が 1 箇所に**集約**された形．
③は始点がすべて O に**統一**された形．

D 共面条件



点 P が平面 ABC 上にあるとき，✿よりある実数 s, t を用いて

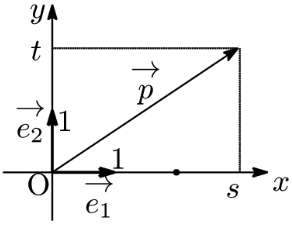
$$\overrightarrow{\mathrm{AP}}=s\overrightarrow{\mathrm{AB}}+t\overrightarrow{\mathrm{AC}}$$

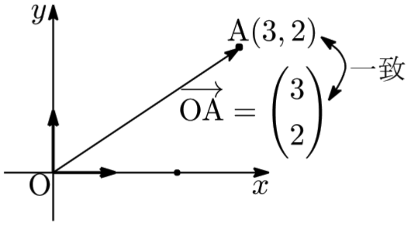
と表せる．これを「共線条件」と同様な過程を経て変形すると，次のように表せる．ぜひ自力で導いてみよう！

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}+s\overrightarrow{\mathrm{AB}}+t\overrightarrow{\mathrm{AC}}.$$

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=(1-s-t)\overrightarrow{\mathrm{OA}}+s\overrightarrow{\mathrm{OB}}++t\overrightarrow{\mathrm{OC}}.$$

E 成分表示





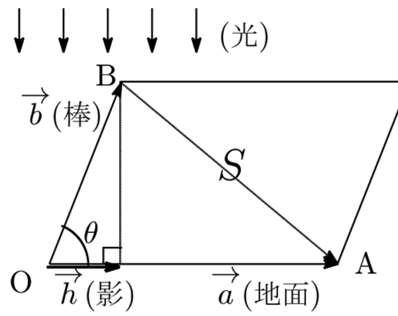
上左図において $\vec{p}=s\vec{e_1}+t\vec{e_2}$ のとき

$$\vec{p}=\begin{pmatrix} s \\ t \end{pmatrix} \qquad \leftarrow \vec{p}\text{ の成分表示}$$

と表す．

〈注〉O を原点として，ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ の成分と点 A の座標は，同じ実数の対で表される (上右図)．

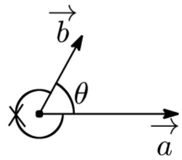
$\boxed{\text{F}}$ 内積の定義・意味



面積： $S = \underbrace{\left|\overrightarrow{a}\right|}_{\text{底辺}}\underbrace{\left|\overrightarrow{b}\right|\sin\theta}_{\text{高さ}}$, $\cdots$①

内積: $\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b} = \underbrace{\left|\overrightarrow{a}\right|}_{\text{底辺}}\underbrace{\left|\overrightarrow{b}\right|\cos\theta}_{\text{影の符号付長さ}}$. $\cdots$②

〈注 1〉 2ベクトルのなす角 θ は，始点をそろえて測る．
（よって，$0^\circ \leqq \theta \leqq 180^\circ$.）



〈注 2〉図のベクトル $\overrightarrow{h}$ を「$\overrightarrow{b}$ の $\overrightarrow{a}$ への**正射影ベクトル**」という．

$\boxed{\text{G}}$ 内積と長さ・角

前述の①より

$$\cos\theta = \frac{\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}}{\left|\overrightarrow{a}\right|\left|\overrightarrow{b}\right|}.$$ （長さと内積からなす角が決まる）

$$\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{a} = \left|\overrightarrow{a}\right|^2.$$ （左辺は内積，右辺は長さ）

$\left|\overrightarrow{a}\right|\left|\overrightarrow{a}\right|\cos 0^\circ$

$\boxed{\text{H}}$ 成分公式

$\boxed{\text{F}}$の図の三角形 OAB において余弦定理を用いると，

$$\text{AB}^2 = \text{OA}^2 + \text{OB}^2 - 2\text{OA}\cdot\text{OB}\cos\theta.$$

これをベクトルを用いて表すと

$$\left|\overrightarrow{a}-\overrightarrow{b}\right|^2 = \left|\overrightarrow{a}\right|^2 + \left|\overrightarrow{b}\right|^2 - 2\underbrace{\left|\overrightarrow{a}\right|\left|\overrightarrow{b}\right|\cos\theta}_{\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}}.$$

ここで $\overrightarrow{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$ とおくと，上式により，

$$\begin{aligned} 2\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b} &= \left|\overrightarrow{a}\right|^2 + \left|\overrightarrow{b}\right|^2 - \left|\overrightarrow{a}-\overrightarrow{b}\right|^2 \\ &= ({a_1}^2 + {a_2}^2) + ({b_1}^2 + {b_2}^2) \\ &\quad - [(a_1 - b_1)^2 + (a_2 - b_2)^2] \end{aligned}$$

$$\therefore\ \overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2.$$

$\boxed{\text{I}}$ 演算法則

〈例〉 $(\overrightarrow{a}+2\overrightarrow{b})\cdot(\overrightarrow{a}-\overrightarrow{b}) = \left|\overrightarrow{a}\right|^2 + \overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b} - 2\left|\overrightarrow{b}\right|^2$.

〈注〉通常の文字式と同様に計算することができるということ．証明は，前述した「成分公式」による．

$\boxed{\text{J}}$ 面積と内積

①^2 + ②^{2}により，

$$S^2 + (\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b})^2 = \left|\overrightarrow{a}\right|^2\left|\overrightarrow{b}\right|^2.$$

$$\therefore S = \sqrt{\left|\overrightarrow{a}\right|^2\left|\overrightarrow{b}\right|^2 - (\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b})^2}.$$

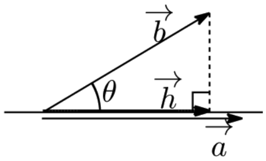
さらに，これを成分で表すと，

$$\begin{aligned} S^2 &= ({a_1}^2 + {a_2}^2)({b_1}^2 + {b_2}^2) - (a_1 b_1 + a_2 b_2)^2 \\ &= {a_1}^2{b_2}^2 + {a_2}^2{b_1}^2 - 2a_1 b_1 a_2 b_2 \\ &= (a_1 b_2 - a_2 b_1)^2. \end{aligned}$$

$$\therefore\ S = \left|a_1 b_2 - a_2 b_1\right|.$$

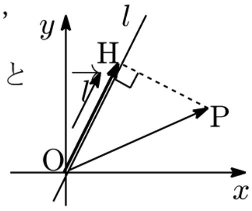
$\boxed{\text{K}}$ 正射影ベクトル

右図において，ベクトル $\overrightarrow{b}$ のベクトル $\overrightarrow{a}$ への正射影ベクトル $\overrightarrow{h}$ は，



$$\begin{aligned} \overrightarrow{h} &= \underbrace{\left|\overrightarrow{b}\right|\cos\theta}_{\text{符号付長さ}}\cdot\underbrace{\frac{\overrightarrow{a}}{\left|\overrightarrow{a}\right|}}_{\text{単位ベクトル}} \\ &= \frac{\left|\overrightarrow{a}\right|\left|\overrightarrow{b}\right|\cos\theta}{\left|\overrightarrow{a}\right|}\frac{\overrightarrow{a}}{\left|\overrightarrow{a}\right|} \\ &= \frac{\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}}{|\vec{a}|^2}\overrightarrow{a}. \end{aligned}$$ ←これが準公式

〈例〉右図において，$l : y = 2x$, $\overrightarrow{l} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, P(5, 2) とすると



$$\begin{aligned} \overrightarrow{\text{OH}} &= \frac{\overrightarrow{l}\cdot\overrightarrow{\text{OP}}}{\left|\overrightarrow{l}\right|}\frac{\overrightarrow{l}}{\left|\overrightarrow{l}\right|} \\ &= \frac{\overrightarrow{l}\cdot\overrightarrow{\text{OP}}}{\left|\overrightarrow{l}\right|^2}\overrightarrow{l} \\ &= \frac{1\cdot 5 + 2\cdot 2}{5}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \frac{9}{5}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

〈注〉「正射影ベクトル」は，使えると**断然有利**！
だけど使えなくても**なんとかなる**．

$\boxed{\text{L}}$ けっきょく，ベクトルで何ができるのか？

(1)　「共線」「共面」の表現．

(2)　内積による「長さ」「角」の計量．

以上の２つのみ !!

$\boxed{\text{M}}$ $\boxed{\text{B}}$の「一意性」の証明

(1) のみ示す．((2) も同様)

$\overrightarrow{p}$ が ☁ $\begin{cases} \overrightarrow{p} = s\overrightarrow{a} + t\overrightarrow{b}, \\ \overrightarrow{p} = s'\overrightarrow{a} + t'\overrightarrow{b} \end{cases}$ と，一見 2 通りに表せたとき，じつは ☼ $\begin{cases} s = s' \\ t = t' \end{cases}$ となって両者が一致してしまうことを示せばよい．☁より

$$s\overrightarrow{a} + t\overrightarrow{b} = s'\overrightarrow{a} + t'\overrightarrow{b}.$$

$$(s-s')\overrightarrow{a} = (t'-t)\overrightarrow{b}. \qquad \cdots ❀$$

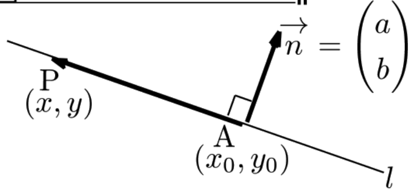
ここで背理法を用いる．仮に $t \neq t'$ i.e. $t'-t \neq 0$ だとしたら

$$\overrightarrow{b} = \frac{s-s'}{t'-t}\overrightarrow{a}.$$

よって $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$ が共線となってしまい，前提条件と矛盾する．よって $t = t'$ であり，❀より

$$s - s' = 0 \text{ i.e. } s = s'. \square$$

$\boxed{\text{N}}$ 法線ベクトルと直線



点 $\text{A}(x_0,\ y_0)$ を通り，$\overrightarrow{n}$ を法線ベクトルとする直線 l 上の点 $\text{P}(x,\ y)$ がみたすべき条件は,

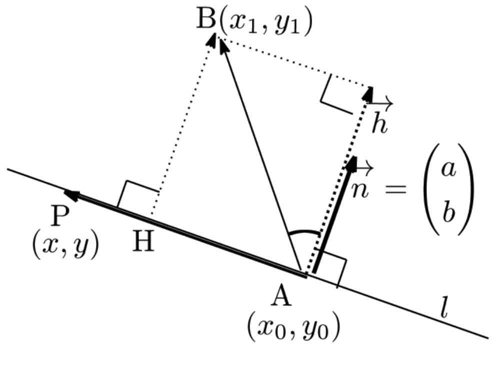
$$\overrightarrow{n} \cdot \overrightarrow{\text{AP}} = 0.$$

$$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \end{pmatrix} = 0.$$

すなわち，直線 l の方程式は

$$a(x-x_0) + b(y-y_0) = 0.$$

$\boxed{\text{O}}$ 点と直線の距離公式の証明



点 $\text{B}(x_1,\ y_1)$ から直線 l :

$$\underbrace{a(x-x_0) + b(y-y_0)}_{f(x)\text{ とおく}} = 0$$

へ下ろした垂線の長さは,

$$\begin{aligned} \text{BH} &= \left|\overrightarrow{h}\right| \\ &= \left|\left|\overrightarrow{\text{AB}}\right|\cos\theta\right| \\ &= \frac{\left|\left|\overrightarrow{n}\right|\left|\overrightarrow{\text{AB}}\right|\cos\theta\right|}{\left|\overrightarrow{n}\right|} \\ &= \frac{\left|\overrightarrow{n}\cdot\overrightarrow{\text{AB}}\right|}{\left|\overrightarrow{n}\right|} \\ &= \frac{|a(x_1-x_0) + b(y_1-y_0)|}{\sqrt{a^2+b^2}}. \end{aligned}$$

(点と直線の距離公式)

〈注 1〉分子の絶対値内は $f(x_1,\ y_1)$，分母は $\left|\overrightarrow{n}\right|$ に他ならない．したがって，直線 l が

$$\underbrace{ax + by + c}_{f(x)\text{ とおく}} = 0.$$

と表されているときには

$$\text{BH} = \frac{|ax_1 + by_1 + c|}{\sqrt{a^2+b^2}}.$$

〈注 2〉この公式の導き方を理解していれば，空間座標において「点と平面の距離」を求めるのにも利用できる．