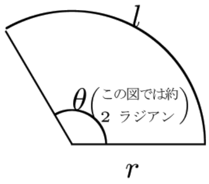
2006/5/13 更新

三角関数

A 弧度法

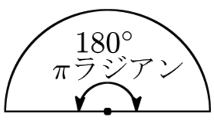
扇形における「弧の長さの半径に対する比の値」によって，その中心角の大きさを表す方法を**弧度法**という．すなわち右図の角 θ は



$$\theta = \frac{l}{r}. \quad (l = r\theta.)$$

(単位は**ラジアン**だが，省略することが多い.)

なお，**円周**の長さは，直径の $\pi(= 3.14\cdots)$ 倍であるから，半円周の長さは半径の π 倍である．したがって



π[ラジアン] は 180° と等しい角を表す.
(けっして $\pi = 180$ ではないので注意 !)

〈参考〉半径 r，中心角 θ の扇形の面積は

$$\frac{\theta}{2\pi}\cdot\pi r^2 = \frac{1}{2}r^2\theta.$$

〈注〉**度数法**にも，2 直角 (180°) の 2, 3, 4, 5, 6 等分などが整数値で表せるという利点がある．状況に応じて弧度法と度数法を使い分けたい．

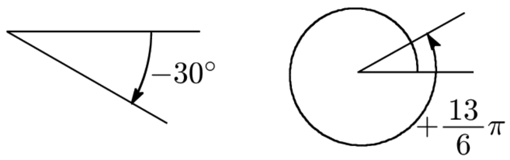
B 一般角

単に広がりの大きさのみを表す角と違い，

反時計回りを正の向き，時計回りを負の向き

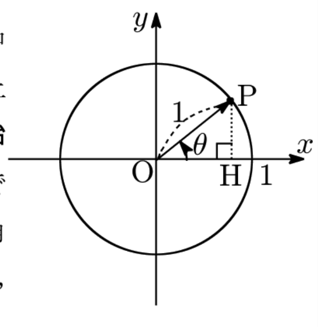
と定めて符合も考慮し，負の角や 2π (360°) を超えた角なども認めて回転移動量を表す角を**一般角**という．

(例)



C 単位円による定義

右図のように点 P が，中心 O，半径 1 の単位円周上にあり，x 軸の正の向き (**始線**) からベクトル $\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ までの回転移動量を表す一般角 ($\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ の**偏角**) が θ のとき，点 P の座標を



$$\mathrm{P}(\cos\theta,\ \sin\theta).$$

と表す．また，

$$\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta} = (\text{直線 OP の傾き})$$

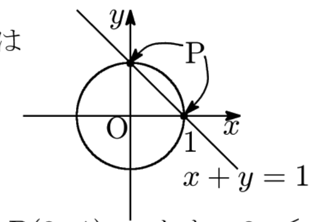
と定める．

〈注 1〉$\cos\theta$ と $\sin\theta$ をペアで考え，**単位円周上の点 $\mathbf{P}(\cos\theta,\ \sin\theta)$ がどこにあるか**を考えることが重要である．

たとえば，$\cos\theta + \sin\theta = 1$ $(0 \leqq \theta < 2\pi)$ のとき，xy 平面上で点 $\mathrm{P}(\cos\theta,\ \sin\theta)$ は

$$\begin{cases} \text{単位円} : x^2 + y^2 = 1 \text{ 上の点であり，} \\ \text{直線} : x + y = 1 \text{ 上の点でもある．} \end{cases}$$

よって $\mathrm{P}(\cos\theta,\ \sin\theta)$ は右図の位置にあるから



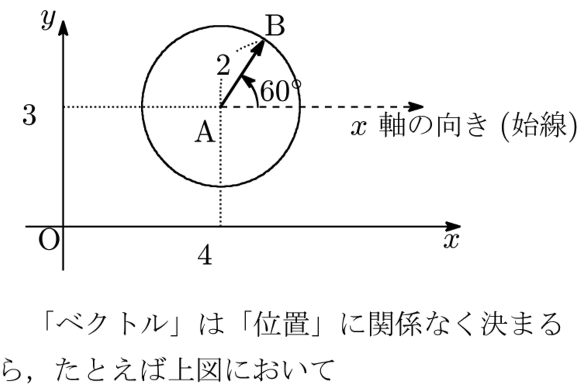
$$\theta = 0,\ \frac{\pi}{2}.$$

〈注 2〉たとえば上図で P(0, 1) のとき，$0 \leqq \theta < 2\pi$ という範囲の制限がなければ角 θ は $\frac{\pi}{2}$, $\frac{\pi}{2} \pm 2\pi$, $\frac{\pi}{2} \pm 4\pi$ など，$\frac{\pi}{2}$ との差が 2π の整数倍である角なら何でもよい．つまり，点 $\mathrm{P}(\cos\theta,\ \sin\theta)$ が定まっても，それに対応する角 θ は一意的に決まらない．

〈注 3〉点 P の座標が $(\cos\theta,\ \sin\theta)$ であるとは，**偏角 θ の単位ベクトル $\overrightarrow{\mathbf{OP}}$** の成分が

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}} = \begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{pmatrix}$$

であることも意味する．

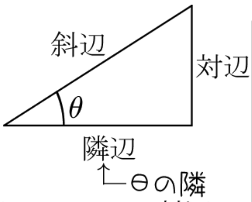


「ベクトル」は「位置」に関係なく決まるから，たとえば上図において

$$\overrightarrow{\mathrm{AB}} = 2\begin{pmatrix} \cos 60^\circ \\ \sin 60^\circ \end{pmatrix},$$

$$\overrightarrow{\mathrm{OB}} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} \cos 60^\circ \\ \sin 60^\circ \end{pmatrix}.$$

〈注 4〉「単位円」を用いたこの定義は，$0^\circ < \theta < 90^\circ$ のときには直角三角形によるもう 1 つの定義：



$$\cos\theta = \frac{隣辺}{斜辺},\ \sin\theta = \frac{対辺}{斜辺},\ \tan\theta = \frac{対辺}{隣辺}$$

と一致する．(前図の直角三角形 OPH を用いて確認せよ．)

D 相互関係

$\mathrm{P}(\cos\theta,\ \sin\theta)$ が $\mathrm{OP} = 1$ を満たすことにより

$$\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1. \quad \cdots ①$$

$$\therefore (\underbrace{\cos\theta + \sin\theta}_{和})^2 = 1 + 2\underbrace{\cos\theta\sin\theta}_{積}.$$

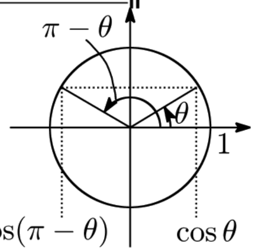
① $\div \cos^2\theta$ と $\tan\theta = \dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}$ より

$$1 + \tan^2\theta = \frac{1}{\cos^2\theta}.$$ ←数Ⅲ微積でよく使う！

E $\sin(\theta+\pi) = -\sin\theta$ などの公式

たとえば $\cos(\pi-\theta)$ を 角 θ の三角関数で表すと，右図より

$$\cos(\pi-\theta) = -\cos\theta.$$



〈注〉この類の公式は，全部で約 20 個もある．すべてを暗記しようとせず，単位円を描いて“その場で”思い出せるように．その際，θ が 30° くらいのつもりで図を描くとわかりやすい．

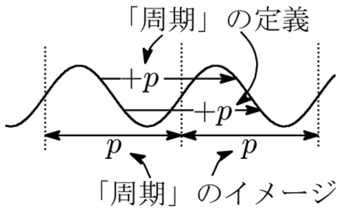
ただし，単純に cos と sin が入れ替わる

$$\cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right) = \sin\theta,\ \sin\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right) = \cos\theta$$

の 2 つは，使用頻度も高いので暗記しておきたい．

F 周期性とグラフ

関数 $f(x)$ において，定義域内の任意の x に対して



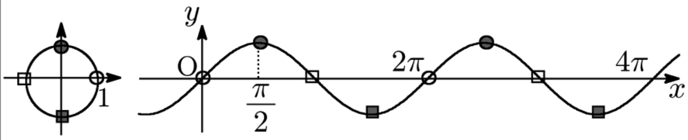
$$f(x+p) = f(x)\ (p \neq 0)$$ ←p ズレても同じ値

が成り立つような定数 $p(\neq 0)$ が存在するとき，$f(x)$ を**周期関数**といい，p を $f(x)$ の**周期**という．

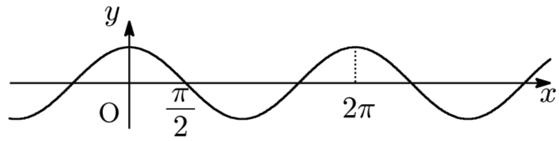
周期 p の周期関数のグラフは，横幅 p の同じ形が繰り返し現れる．これが「周期 p」のイメージである．

三角関数：$y=\sin x$, $y=\cos x$, $y=\tan x$ はすべて周期関数であり，次のようなグラフをもつ．(単位円による定義に遡って，どうしてそのようなグラフになるかを納得しておくこと．)

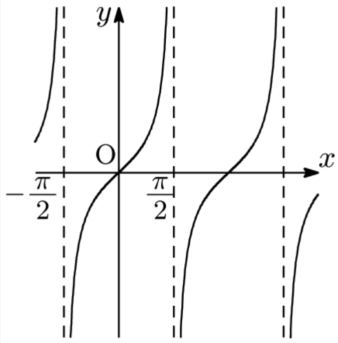
〔$y=\sin x$〕(周期：2π，原点対称)



〔$y=\cos x$〕(周期：2π，y 軸対称)



〔$y=\tan x$〕(周期：π，原点対称)

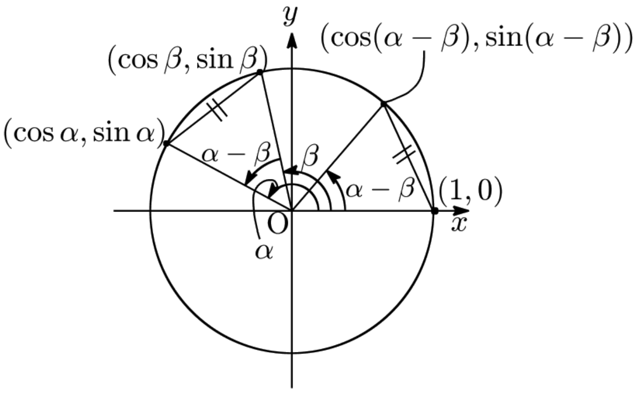


G 加法定理，倍角・半角公式など

まず，

$$\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta \quad \cdots 🌷$$

を証明する．(余力がない人は，とりあえず下の❀を出発点にしてもよい．)



上図で「$\parallel$」を付けた 2 つの線分の長さを比べて

$$\begin{aligned}&\{\cos(\alpha-\beta)-1\}^2+\sin^2(\alpha-\beta)\\ =&(\cos\alpha-\cos\beta)^2+(\sin\alpha-\sin\beta)^2.\\ &2-2\cos(\alpha-\beta)\\ =&2-2(\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta).\end{aligned}$$

よって🌷が示された．🌷において β とあるところを $-\beta$ や $\dfrac{\pi}{2}-\beta$ で置き換えるなどすることにより次の 4 つの**加法定理**が出揃う．

$$❀\begin{cases}\cos(\alpha\pm\beta)=\cos\alpha\cos\beta\mp\sin\alpha\sin\beta,\\ \sin(\alpha\pm\beta)=\sin\alpha\cos\beta\pm\cos\alpha\sin\beta\end{cases}$$

この 4 つは完全に記憶し，これらをもとに他の諸公式を導けるようにする．その際，たとえば

$$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta$$

は

$$s_{\alpha+\beta}=s_\alpha c_\beta+c_\alpha s_\beta$$

と略記してスピーディーに行おう．

上記において，$\beta=\alpha$ とおくと

$$\sin 2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha. \quad \cdots\sin \text{ の } \mathbf{2} \text{ 倍角公式}$$

$$c_{\alpha+\beta}=c_\alpha c_\beta-s_\alpha s_\beta$$

において，$\beta=\alpha$ とおくと

$$\cos 2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha. \quad \cdots\cos \text{ の } \mathbf{2} \text{ 倍角公式}$$

$\cos^2\alpha+\sin^2\alpha=1$ を用いて変形すると

$$\begin{cases}\cos 2\alpha=2\cos^2\alpha-1, & \cdots ①\\ \cos 2\alpha=1-2\sin^2\alpha. & \cdots ②\end{cases}$$

①，②を，それぞれ $\cos^2\alpha$，$\sin^2\alpha$ について解き，$\alpha=\dfrac{\theta}{2}$ とおくと，次の**半角公式**を得る．

$$\cos^2\frac{\theta}{2}=\frac{1+\cos\theta}{2},\quad \sin^2\frac{\theta}{2}=\frac{1-\cos\theta}{2}.$$

$$\begin{cases}\cos 3\alpha=4\cos^3\alpha-3\cos\alpha\\ \sin 3\alpha=3\sin\alpha-4\sin^3\alpha\end{cases} \quad \leftarrow \textbf{3 倍角公式}$$

は，加法定理と 2 倍角公式から導かれる．

$$\begin{aligned}\cos 3\alpha=&c_{\alpha+2\alpha}\\ =&c_\alpha c_{2\alpha}-s_\alpha s_{2\alpha}\\ =&c_\alpha(2{c_\alpha}^2-1)-s_\alpha\cdot 2s_\alpha c_\alpha\\ =&2{c_\alpha}^3-c_\alpha-2c_\alpha(1-{c_\alpha}^2)\\ =&4\cos^3\alpha-3\cos\alpha.\end{aligned}$$

($\sin 3\alpha$ についても同様．)

次に

$$\begin{cases}\sin\alpha\cos\beta=\underbrace{\frac{1}{2}}_{\text{積和公式}}\{\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)\}\cdots ✩\\ \sin A+\sin B=\underbrace{2\sin}_{\text{和積公式}}\dfrac{A+B}{2}\cos\dfrac{A-B}{2} \quad \cdots ★\end{cases}$$

を導いてみよう．✩は，cos，sin の加法定理のうち，積 $\sin\alpha\cos\beta$ が現れる sin の方を 2 つ並べて，その場で作れるようにする．

$$\begin{cases}s_{\alpha+\beta}=s_\alpha c_\beta+c_\alpha s_\beta,\\ s_{\alpha-\beta}=s_\alpha c_\beta-c_\alpha s_\beta.\end{cases}$$

$s_\alpha c_\beta$ を残すためにこれらを辺々加えると

$$s_{\alpha+\beta}+s_{\alpha-\beta}=2s_\alpha c_\beta. \quad \cdots 🐭$$

$$\therefore s_\alpha c_\beta=\frac{1}{2}(s_{\alpha+\beta}+s_{\alpha-\beta}).$$

つまり，✩が示された．★の方は，🐭において

$$A=\alpha+\beta,\ B=\alpha-\beta$$

とおく．すると右辺にある α,β は

$$\alpha=\frac{A+B}{2},\ \beta=\frac{A-B}{2}$$

↑そのうち暗記しちゃうでしょう

と表されるので，すでに示されている．

最後に tan 関連．これは，$\tan\theta=\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}$ をもとに示す．たとえば

$$\begin{aligned}\tan(\alpha+\beta)=&\frac{s_{\alpha+\beta}}{c_{\alpha+\beta}}\\ =&\frac{s_\alpha c_\beta+c_\alpha s_\beta}{c_\alpha c_\beta-s_\alpha s_\beta}\\ =&\frac{\frac{s_\alpha c_\beta}{c_\alpha c_\beta}+\frac{c_\alpha s_\beta}{c_\alpha c_\beta}}{\frac{c_\alpha c_\beta}{c_\alpha c_\beta}-\frac{s_\alpha s_\beta}{c_\alpha c_\beta}}=\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}.\end{aligned}$$

この等式において $\beta=\alpha$ とおけば tan の 2 倍角公式 $\tan 2\alpha=\dfrac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}$ が得られる．また，$\tan(\alpha-\beta)=\dfrac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}$ も上記と同様にして得られる．

H 合成の仕方

たとえば

$$f(\theta) = \underline{1}\cdot\sin\theta + \underline{\underline{\sqrt{3}}}\cos\theta \qquad \cdots ①$$

を

$$r\sin(\theta+\alpha) \ \ (r \geqq 0) \qquad \cdots ②$$

の形に変形することを考える．そのために，②を加法定理で展開して，

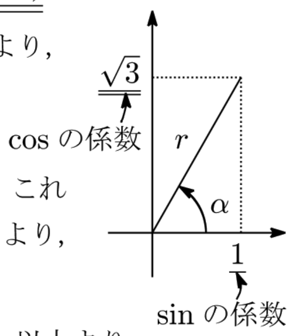
$$\begin{aligned} & r\sin(\theta+\alpha) \\ =& \underline{(r\cos\alpha)}\sin\theta + \underline{\underline{(r\sin\alpha)}}\cos\theta \end{aligned}$$

とし，①と比較することにより，

$$\begin{cases} r\cos\alpha = 1, \\ r\sin\alpha = \sqrt{3} \end{cases}$$

であればよいことがわかり，これを満たす r, α として，右図より，

$$r = 2,\ \alpha = \frac{\pi}{3}$$



とすればよいことがわかる．以上より，

$$f(\theta) = 2\sin\left(\theta + \frac{\pi}{3}\right).$$

〈注 1〉 $r\cos(\theta-\alpha)$ の形に合成するときも，考え方は同様である．(加法定理で展開して係数比較)

〈注 2〉 合成により，変数 θ を 1 箇所に集めることができる．

I 合成できるための条件

周期が等しい sin，cos どうしの和は，1 つの sin (または cos) に合成することができる．

〈例〉

どちらも周期は 2π

$$\begin{aligned} & 2\sin x + \cos\left(x+\frac{\pi}{6}\right) \\ =& 2\sin x + \cos x\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} - \sin x\cdot\frac{1}{2} \\ =& \frac{3}{2}\sin x + \frac{\sqrt{3}}{2}\cos x \\ =& \frac{\sqrt{3}}{2}\left(\sqrt{3}\sin x + 1\cdot\cos x\right) \\ =& \frac{\sqrt{3}}{2}\cdot 2\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right) \\ =& \sqrt{3}\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right). \end{aligned}$$

J 関数を変形するときの基本方針

(1) 変数を集約する．

(2) 種類を統一する．

(3) 次数を変える．