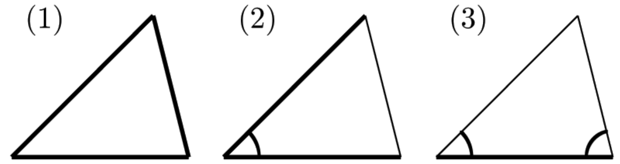
2006/5/5 更新

三角形・三角比

（この章では，すでに「三角関数」の基本事項を学んでいることを前提としている．
　また，三角形 ABC において，とくに断らなくても A，B，C の対辺の長さをそれぞれ a, b, c で表すものとする．）

A 三角形の決定条件

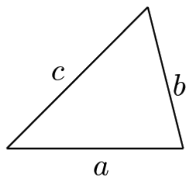
(下図の太線で示した部分で決まる)



B 辺と角の性質

(1)　3 辺の長さの関係

　3 角形の 2 辺の和は他の 1 辺より長い．よって，$a, b, c\ (>0)$ が 3 角形の 3 辺の長さを表すとき，次が成り立つ．



$$\begin{cases} b+c>a, & \cdots ① \\ c+a>b, & \cdots ② \\ a+b>c & \cdots ③ \end{cases}$$

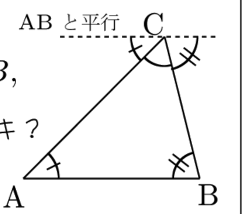
i.e. $\underbrace{\overbrace{|b-c|}^{2\text{ 辺の差}} < a}_{②，③より} < \overbrace{b+c}^{2\text{ 辺の和}}_{①より}$.

(2)　3 つの内角の関係

　三角形の 3 つの内角 $A, B, C(>0)$ の和は

$$A+B+C=180^\circ.$$

ジョーシキ？

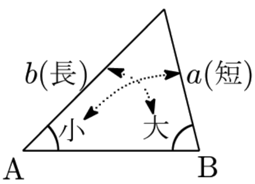


(3)　向かい合う辺と角の大小

　右図において

$A<B \iff a<b.$

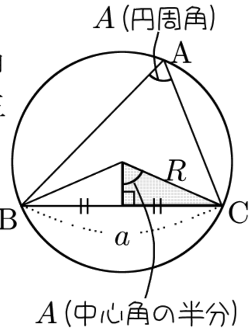
(角の大小)　(辺の長短)
一致する



C 正弦定理

sin のこと

　外接円の半径が R である三角形 ABC において，右図の直角三角形に注目して



$$\frac{a}{2}=R\sin A.$$

$$\text{i.e.}\ \frac{a}{\sin A}=2R.$$

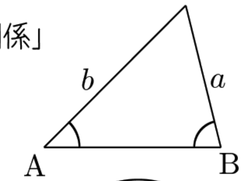
（B と b，C と c でもいっしょ．あと，A ≧ 90° のときは少し違った証明法になる）

〔正弦定理の用途〕

(1)「向かい合う 2 組の辺・角の関係」

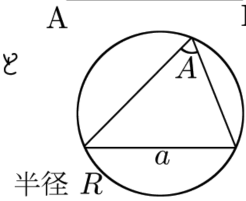
$$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}$$

両辺とも "2R"



(2)「向かい合う 1 組の辺・角と外接円の半径 R の関係」

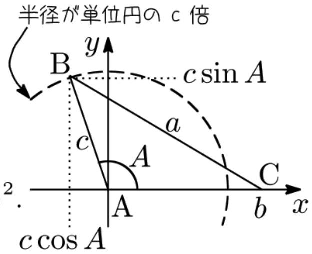
$$\frac{a}{\sin A}=2R.$$



D 余弦定理

cos のこと

　三角形 ABC に対して右図のように座標を設定すると線分 BC の長さを考えて



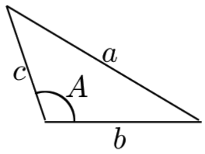
$$a^2=(b-c\cos A)^2+(c\sin A)^2.$$

　右辺を展開・整理すると

✿ $\underline{a^2=b^2+c^2}-2bc\cos A$.← 余弦定理の用途：「3 辺と 1 角の関係」

　これを $\cos A$ について解くと

✿ $\cos A=\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$.



〈注〉✿は，$A=90^\circ$ $(\cos A=0)$ のとき＿＿部のみとなる．これは，ピタゴラスの定理そのものである．(余弦定理はピタゴラスの定理の拡張)

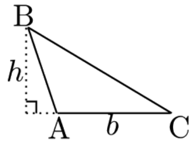
　また，✿の　部は，ベクトルの内積 $\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ に他ならない．(成分による内積の求め方は，このことを用いて証明される)

$\boxed{\text{E}}$ 面積

三角形 ABC の面積は，次の方法で求められる．

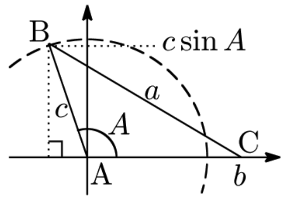
(1) $\dfrac{1}{2}b\cdot h$

(ていへん×たかさ÷2)



(2) $\dfrac{1}{2}b\cdot\underbrace{c\sin A}_{(1)\ \text{の}\ h}.$

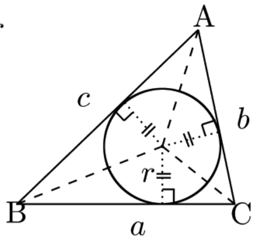
(2 辺夾角から求まる)



(3) $\dfrac{1}{2}ar+\dfrac{1}{2}br+\dfrac{1}{2}cr$

$=\dfrac{1}{2}(\overbrace{a+b+c}^{3\text{ 辺の和}})r.$

内接円の半径



(4) 「ヘロンの公式」←めったに使わないが…

$s=\dfrac{a+b+c}{2}$ (3 辺の長さの和の半分) を用いて

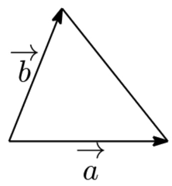
証明は後で

$\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$. (3 辺の長さだけで求まる)

〈注〉「$\dfrac{1}{2}$」は付かない！

(5) 右図のような 2 ベクトル $\vec{a}$，$\vec{b}$ で“張られる”三角形の面積は

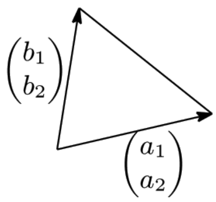
$$\frac{1}{2}\sqrt{\left|\vec{a}\right|^2\left|\vec{b}\right|^2-\left(\vec{a}\cdot\vec{b}\right)^2}.$$



(これと (6) の証明はベクトルの章で)

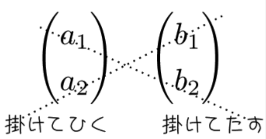
(6) (5) で，座標平面上で

$$\vec{a}=\begin{pmatrix}a_1\\a_2\end{pmatrix},\vec{b}=\begin{pmatrix}b_1\\b_2\end{pmatrix}$$



と成分表示されているときは

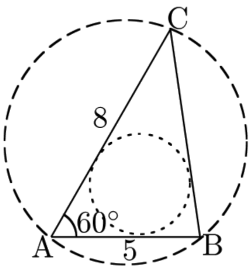
$$\frac{1}{2}\left|a_1b_2-b_1a_2\right|.$$



$\boxed{\text{F}}$ 典型例題を 1 つ

右図の三角形 ABC において，次のものを順に求めよ．

辺 BC の長さ，外接円の半径 R，△ABC の面積，内接円の半径 r，$\cos C$ の値．



〔解答〕

○ まず，$\boxed{\text{A}}$(2) より，この三角形 ABC は**決定されている．** したがって，すべての答はただ 1 つに定まるはずである．

○ 余弦定理$\boxed{\text{D}}$❀より

$$\mathrm{BC}^2=8^2+5^2-2\cdot8\cdot5\cdot\underbrace{\cos60^\circ}_{\frac{1}{2}}=49.$$

$\therefore\ \mathrm{BC}=7.$

○ 正弦定理$\boxed{\text{C}}$(1) より

$$\frac{7}{\sin60^\circ}=2R.$$

$$\therefore R=\frac{1}{2}\cdot\frac{7}{\frac{\sqrt{3}}{2}}=\frac{7}{\sqrt{3}}.$$

○ $\boxed{\text{E}}$(2) より

$$\triangle\mathrm{ABC}=\frac{1}{2}\cdot8\cdot5\cdot\sin60^\circ$$
$$=4\cdot5\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=10\sqrt{3}.$$

○ 上の結果と$\boxed{\text{E}}$(3)，および $\mathrm{BC}=7$ より

$$\frac{1}{2}(8+5+7)r=10\sqrt{3}.$$

$\therefore r=\sqrt{3}.$

○ 余弦定理$\boxed{\text{D}}$✿より

$$\cos C=\frac{7^2+8^2-5^2}{2\cdot7\cdot8}=\frac{11}{14}.$$

〈注〉最後の $\cos C$ は，正弦定理$\boxed{\text{C}}$(1) を用いて次のようにしても求まる．

$$\frac{7}{\sin60^\circ}=\frac{5}{\sin C}.\qquad\cdots☁$$

$$\therefore\ \sin C=\frac{5}{7}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{5}{14}\sqrt{3}.$$

これと $\cos^2C+\sin^2C=1$ より

$$\cos^2C=1-\sin^2C$$
$$=1-\left(\frac{5}{14}\sqrt{3}\right)^2=\frac{11^2}{14^2}.$$

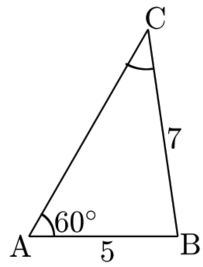
$$\therefore\ \cos C=\pm\frac{11}{14}.$$

ここで$\boxed{\text{B}}$(3) を用いると

向かい合う

$5<7$ より $C<60^\circ$.

向かい合う



よって C は鋭角であるから $\cos C>0$．したがって

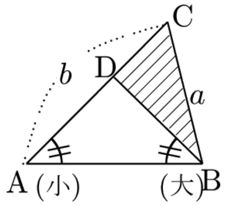
$$\cos C=\frac{11}{14}.$$

上の図を見ればわかるように，☁式で用いた条件だけでは三角形 ABC は決定されていない．なのでこんなメンドウが発生する．

G 一部定理の証明

(ここはとりあえず読み飛ばしても OK.)

〔B(3) の証明〕



$A < B$ ならば，右図のような点 D がとれて

$$b = \mathrm{AD} + \mathrm{DC}$$
$$= \underbrace{\mathrm{BD} + \mathrm{DC} > a}_{\triangle\mathrm{BCD}\text{ で }\boxed{\mathrm{B}}(1)\text{ を適用}}.$$

$$\therefore \mathrm{A} < \mathrm{B} \ \Rightarrow\ a < b. \qquad \cdots$$

$A > B \Rightarrow a > b$ も同様に示され，$A = B \Rightarrow a = b$ も成り立つので，の逆：$A > B \Leftarrow a > b$ も成り立つ．(「転換法」というやや高級な証明法)

〔E(4)：「ヘロンの公式」の証明〕

E(2) より

$$\triangle\mathrm{ABC} = \frac{1}{2}bc\sin\mathrm{A}.$$

ここで余弦定理D より

$$\cos\mathrm{A} = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}.$$

$$\therefore \triangle\mathrm{ABC}$$
$$= \frac{1}{2}bc\sqrt{1 - \left(\frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}\right)^2}$$

いい計算練習になる

$$= \frac{1}{4}\sqrt{(2bc)^2 - (b^2 + c^2 - a^2)^2}$$
$$= \frac{1}{4}\sqrt{(2bc + b^2 + c^2 - a^2)(2bc - b^2 - c^2 + a^2)}$$
$$= \frac{1}{4}\sqrt{\{(b+c)^2 - a^2\}\{-(b-c)^2 + a^2\}}$$
$$= \frac{1}{4}\sqrt{(b+c+a)(b+c-a)(a+b-c)(a-b+c)}$$
$$= \sqrt{\left(\frac{a+b+c}{2}\right)\left(\frac{-a+b+c}{2}\right)\left(\frac{a-b+c}{2}\right)\left(\frac{a+b-c}{2}\right)}.$$

よって，$s = \dfrac{a+b+c}{2}$ とおくと

$$\triangle\mathrm{ABC} = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}.$$