http://homepage3.nifty.com/yakuikei

数 列

2014/4/16 更新

A 数列とは?

番号を付けて数を並べたものが**数列**である．つまり，自然数 $1, 2, 3, \ldots$ に対し，数 $a_1, a_2, a_3, \ldots$ がそれぞれ**一意的に対応**して定まるとき，これらを $a_1, a_2, a_3, \ldots$ の順に並べたものを**数列** (a_n) という．←高校では $\{a_n\}$ と書く

少し大雑把な言い方をすれば，次のようになる．

「数列とは，自然数を定義域とする**関数**である.」

$$n \xmapsto[\text{一意対応}]{} a_n$$

〈補足〉「関数」とは,「一意的な対応関係」のこと.

〈例〉$a_n = 2n-1$ は「1 次関数」，$b_n = 3^n$ は「指数関数」である．

また，$c_n = (2^n \text{の桁数})$ とすると，任意の自然数 n に対して c_n の値は一つに定まる．よってこの (c_n) も 1 つの数列である．

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	$\cdots$
2^n	2	4	8	16	32	64	128	256	512	$\cdots$
c_n	1	1	1	2	2	2	3	3	3	$\cdots$

〈注意〉数列 (c_n) は，“同じ数が 3 つずつ並ぶ” 数列ではない．c_{13} まで求めてみればわかる．

B 数列の 2 つの定め方

(1) 一般項

n 番目の項を n で表し，**一気に** n 番を決める．

〈例〉$a_n = 2n-1 \ (n = 1, 2, 3, \ldots)$

(2) 帰納的定義

a_1 から a_2，a_2 から a_3，a_3 から a_4，$\cdots$ と，前から順に一つずつ，**ドミノ式**に項を定める．

〈例〉
$$\begin{cases} a_1 = 1, \\ a_{n+1} = a_n + 2 \ (n = 1, 2, 3, \ldots) \end{cases}$$

〈注意〉その数列の特性を手っ取り早く知りたいときは，項を羅列してみるのが一番．

(例)

n	1	2	3	4	5	6	7	$\cdots$
a_n	1	3	5	7	9	11	13	$\cdots$

+2 +2 +2 +2 +2 +2

ただし，A〈注意〉のようなこともあるので，**項をいくつか並べてみただけでは数列を定めたことにはならない.**

C 等差数列

B〈注意〉の (例) で見たような数列である.

(1) 帰納的定義

$$\begin{cases} a_1 = a, \\ a_{n+1} - a_n = d \ (n = 1, 2, 3, \ldots) \end{cases}$$

この定数 d を公差という

(つまり d ずつ増えるってこと)

(2) 一般項

n 番は 1 番より $n-1$ 番後ろにあるから，

$$a_n = a_1 + (\underbrace{n-1}_{\text{番号の差}})d.$$

(3) (a, b, c) がこの順に等差数列をなす条件は

$$b - a = c - b \quad \text{i.e.} \quad a + c = 2b.$$

どちらも公差

(4) 和

〈例〉
$$\begin{aligned} S &= 1 + 3 + 5 + 7 + 9 \\ +)\ S &= 9 + 7 + 5 + 3 + 1 \\ \hline 2S &= 10 + 10 + 10 + 10 + 10. \end{aligned}$$

逆順に並べて辺々加える

はじめ　おわり

$$\therefore \ S = \frac{1+9}{2} \cdot 5.$$

個数

公式は,「意味」で覚えること！

D 等比数列

↓こんな数列.

$a_n: 3, 6, 12, 24, 48, \ldots$

×2 ×2 ×2 ×2

(1) 帰納的定義

$$\begin{cases} a_1 = a, \\ a_{n+1} = a_n \cdot r \ (n = 1, 2, 3, \ldots) \end{cases}$$

この定数 r を公比という

(つまり次々 r 倍になるってこと)

(2) 一般項

n 番は 1 番より $n-1$ 番後ろにあるから，

$$a_n = a_1 \cdot r^{n-1}.$$

(3) (a, b, c) がこの順に等比数列をなす条件は

$$\frac{b}{a} = \frac{c}{b} \quad \text{i.e.} \quad ac = b^2.$$

どちらも公比

(4) 和

〈例〉
$$\begin{aligned} S &= 3 + 3\cdot 2 + 3\cdot 2^2 + 3\cdot 2^3 + 3\cdot 2^4 \\ -)\ 2S &= \qquad 3\cdot 2 + 3\cdot 2^2 + 3\cdot 2^3 + 3\cdot 2^4 + 3\cdot 2^5 \\ \hline (1-2)S &= 3 - 3\cdot 2^5 \end{aligned}$$

公比倍して辺々差をとる

個数

$$\therefore \ S = 3 \cdot \frac{1-2^5}{1-2}.$$

はじめ　公比

このように「公比 > 1」のときは，$3 \cdot \dfrac{2^5-1}{2-1}$ とする方がよい．

〈注意〉この公式は，公比が 1 のときは使えない．

つまり定数数列

$\boxed{\text{E}}$ 階差と和の関係 ♦

$a_{n+1}-a_n=b_n$ ⋯ $\boxed{b_n \text{ は } a_n \text{ の階差}}$

のとき，n に $1,\ 2,\ 3,\ \dots,\ n-1$ を代入して辺々加えると，

$$\begin{array}{rl} & a_2-a_1=b_1 \\ & a_3-a_2=b_2 \\ & a_4-a_3=b_3 \\ & \quad\vdots \\ +) & a_n-a_{n-1}=b_{n-1} \\ \hline & a_n-a_1=b_1+b_2+\cdots+b_{n-1}. \end{array}$$

←“ パタパタ ”消える！

よって，$n \geqq 2$ のとき，

$$a_n=a_1+\sum_{k=1}^{n-1}b_k. \quad \cdots \boxed{a_n \text{ は } b_n \text{ の (ほぼ) 和}}$$

また，

$$S_n=a_1+a_2+\cdots+a_n \quad \cdots \boxed{S_n \text{ は } a_n \text{ の和}}$$

のとき，$n \geqq 2$ なら，

$$a_n=S_n-S_{n-1}. \quad \cdots \boxed{a_n \text{ は } S_n \text{ の (ほぼ) 階差}}$$

(和と階差は表裏一体！)

〈参考〉数列 (a_n) の増減，つまり a_n と a_{n+1} の大小関係は,「階差数列 $a_{n+1}-a_n$ の符号」によって調べるのが基本．($a_n>0$ なら，比：$\dfrac{a_{n+1}}{a_n}$ と 1 の大小を考える手もある)

$\boxed{\text{F}}$ 和の求まる数列 5 タイプ

二項係数の和を二項定理でまとめるとかもあるが

(1) 等差数列

(2) 等比数列

(3) 等差数列 × 等比数列

$$\begin{array}{rl} S := & 1\cdot1+2\cdot2+3\cdot2^2+\cdots+n\cdot2^{n-1} \\ -)\ 2S = & \qquad 1\cdot2+2\cdot2^2+\cdots+(n-1)2^{n-1}+n\cdot2^n \\ \hline -S = & \underbrace{1+2+2^2+\cdots+2^{n-1}}_{\text{等比数列の和}}-n\cdot2^n \end{array}$$

←例

公比倍して辺々差をとる

(4) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}k^2=\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$ ← $\boldsymbol{k=1}$ からでないと使えない

などの公式を用いる．

(5) 階差の形に分解する．($\boxed{\text{E}}$の利用)

(例) → $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+1)}=\sum_{k=1}^{n}\Bigl(\underbrace{\frac{1}{k}}_{a_k}-\underbrace{\frac{1}{k+1}}_{a_{k+1}}\Bigr)$

=パタパタパタ ⋯

〈参考〉じつは (4) の公式も，

$$\underbrace{(k+1)^3-k^3}_{\text{階差の形}}=3k^2+3k+1$$

の両辺を $k=1,\ 2,\ 3,\ \dots,\ n$ について加えることによって示される．

$\boxed{\text{G}}$ 漸化式 → 一般項

1° 基本型

差に注目 $\begin{cases} a_{n+1}-a_n=d & \cdots \text{等差数列} \\ a_{n+1}-a_n=f(n) \end{cases}$

比に注目 $\begin{cases} \dfrac{a_{n+1}}{a_n}=r & \cdots \text{等比数列} \\ \dfrac{a_{n+1}}{a_n}=g(n) \end{cases}$

2° 適切な置換により，1° に帰着させる．
(様々なパターンがある．徐々に覚えよう)

3° $a_1,\ a_2,\ a_3,\ a_4$ あたりまで求めてみることにより，一般項を予測する．そして，数学的帰納法によって証明する．

$\boxed{\text{H}}$ 数学的帰納法

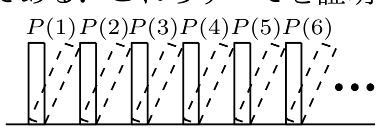
n を含んだ命題，たとえば

$$P(n): \sum_{k=1}^{n}k^2=\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1) \quad (n=1,\ 2,\ 3,\ \dots)$$

とは，実際には

$$\begin{aligned} &P(1): 1^2=\frac{1}{6}\cdot1\cdot2\cdot3, \\ &P(2): 1^2+2^2=\frac{1}{6}\cdot2\cdot3\cdot5, \\ &P(3): 1^2+2^2+3^2=\frac{1}{6}\cdot3\cdot4\cdot7, \\ &\qquad\vdots \end{aligned}$$

という無限個の命題である．これらすべてを証明するためには，



1° $P(1)$ を示す．

2° $P(n)$ を仮定すれば $P(n+1)$ も成り立つことを，$n=1,\ 2,\ 3,\ \dots$ について示す．

の 2 つの作業を行えばよい．このように**無限個の命題** $P(1),\ P(2),\ P(3),\ \cdots$ を，**ドミノ倒しの要領で証明する**手法を**数学的帰納法**という．

〈注目〉 ドミノ式の定め方

帰納的に定義された数列に関する命題の証明には，数学的帰納法が有効なことが多い．

ドミノ式の証明法