●○ 立体図形

2010/5/1 更新

A 心構え

(1) 解答の手順

1° ザクザクっと「見取り図」をかいて，立体の全体イメージを大雑把に把握．→次の B 参照

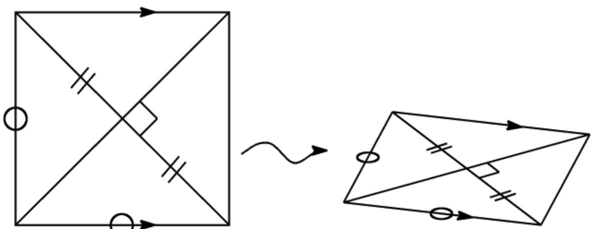
2° その中から注目すべき点や線を**抽出**し，**それ含む断面図**をかいて「平面図形」に帰着させる．

3° 断面図 (平面図) を描くときには，長さ，角を**ビシッと正確に，気持ちを込めて**．さすれば“解法”は自然と頭に浮かんでくる．

(2) 図を描くときの注意

- 大きく描く←気持ちが萎縮しちゃダメ
- フリーハンドで←コピーより写経の方が頭が働く

B 立体見取り図の描き方



(実物)　　　　(見取り図)

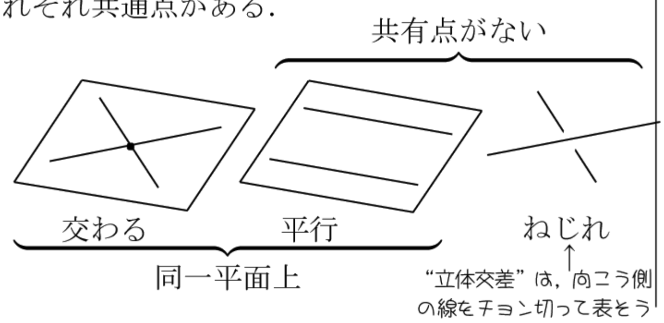
(私の趣味では)「平行投影」が基本である．すなわち，図形上の各点に太陽光のような平行光線を当てたときスクリーン (平面) に映る影を，そのままキャンバスに描く．このとき …

- 平行な 2 直線の影はやはり平行である．同一方向の線分比は保存される．
- 角度は (一般には) 変化してしまう．異なる方向の線分比は (一般には) 保存されない．

C 2 直線の位置関係

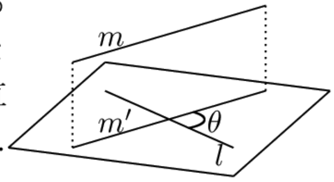
(1) 位置関係の種類

以下の 3 種類があり，左の 2 つ，右の 2 つにそれぞれ共通点がある．



(2) 2 直線のなす角

m と平行で l と交わる直線 m' を考える．l と m' が作る角 θ を，2 直線 l, m の**なす角**という．(ただし $0° \leqq \theta \leqq 180°$)



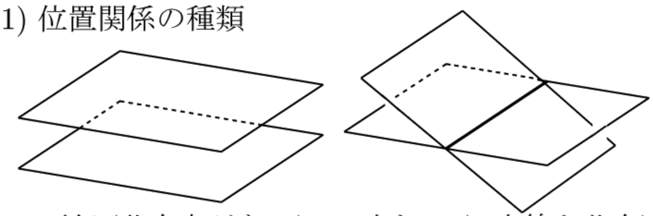
$\theta = 90°$ のとき，l と m は**垂直**であるという．2 直線が垂直でしかも交わるとき，これらは**直交**するという．

〈参考〉 2 直線 l, m が平行であることを $l \parallel m$，垂直であることを $l \perp m$ と表す．

以下において，平面どうしや平面と直線についても同じ記法を用いる．

D 2 平面の位置関係

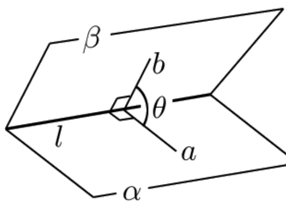
(1) 位置関係の種類



平行 (共有点がない)　　交わる (1 直線を共有)

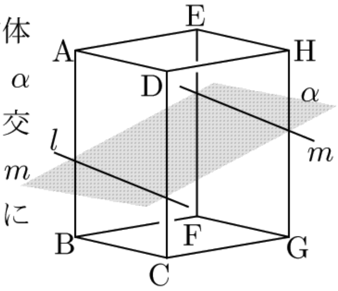
(2) 2 平面のなす角

2 平面 α, β の交線 l と垂直な直線 a, b を右図のように引くとき，a, b のなす角 θ を 2 平面 α, β の**なす角**という．



$\theta = 90°$ のとき，α と β は**垂直**である，または**直交**するという．

〈例〉 右図のように直方体 ABCD-EFGH と平面 α が 2 つの直線 l, m で交わっているとき，$l \parallel m$ であることが次のようにして示される．



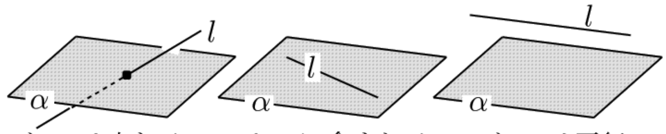
1° 2 つの平面 ABCD と EFGH は平行であり，共有点をもたない．そして l は前者に，m は後者に含まれるから，2 直線 l, m は共有点をもたない．

2° l, m は同一な平面 α に含まれる．

3° 1°, 2° より，$l \parallel m$.□ ← C (1) を参照

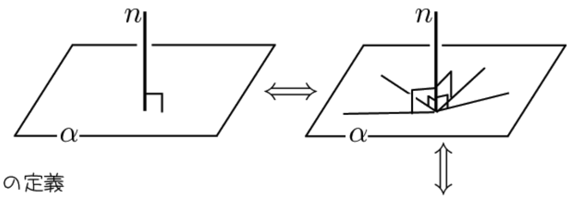
E 直線と平面の位置関係

(1) 位置関係の種類



l と α は交わる　　l は α に含まれる　　l と α は平行

(2) 直線と平面の直交



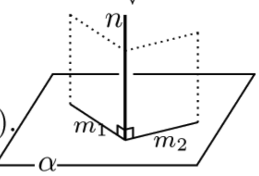
「垂直」の定義

直線 $n \perp$ 平面π

$\Longleftrightarrow n \perp (\alpha$上の<u>任意の</u>直線$)$

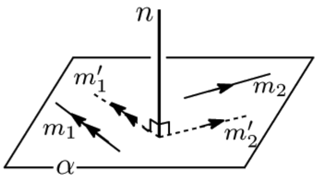
$\Longleftrightarrow n \perp (\alpha$上の<u>2</u>直線 $m_1,\ m_2)$.

ただし，$m_1 \not\parallel m_2$



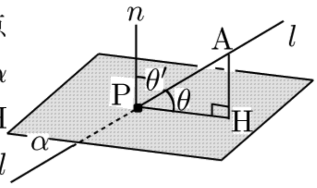
このような直線 n を，平面 α の**法線**という．

〈注意〉 右図のように，n が m_1 や m_2 と交わっていなくとも，$n \perp m_1$, $n \perp m_2$ であれば，$n \perp \alpha$.



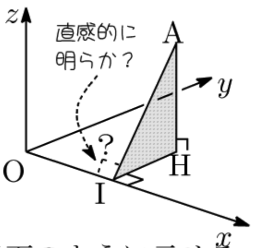
(3) 直線と平面のなす角

直線 l と平面 α の交点を P，I 上の点 A から α へ下ろした垂線の足を H とするとき，$\angle$APH を l と α のなす角という．



〈注目〉 α の法線を n として，2 直線 l, n のなす角 $\theta'(=90^\circ-\theta)$ を考える方が簡単なことが多い．

〈例〉 xyz 空間において，点 A から xy 平面に下ろした垂線の足を H，さらに H から x 軸に下ろした垂線の足を I とする．このとき，直線 AI と x 軸 が垂直であることが以下のように示せる．



x 軸が，直線 AI を含む平面 AHI と垂直であることを示せばよい．そのために，x 軸が平面 AHI 上の (平行でない)2 直線と垂直であることを示す．

まず，x 軸 $\perp$ HI.

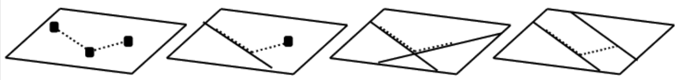
次に，AH $\perp$ xy 平面 だから，AH は xy 平面上のすべての直線と垂直である．よって，x 軸 $\perp$ AH.

HI と AH は平行ではないから

x 軸 $\perp$ 平面 AHI.

$\therefore x$ 軸 $\perp$ AI.□←「三垂線の定理」という

F 平面の決定

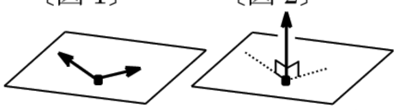


共線でない 3 点　　1 点とそれを通らない直線　　交わる 2 直線　　平行な 2 直線

上図のような点や直線を含む平面は，それぞれ一意的に定まる．

これら決定条件をベクトルで表す際には，けっきょく右の〔図 1〕のように「平面が通る 1 点と，平面に平行な 2 ベクトル」に帰着される．

〔図 1〕　〔図 2〕



1 点と，平面と平行な 2 ベクトル　　1 点と法線ベクトル

互いに平行ではダメ

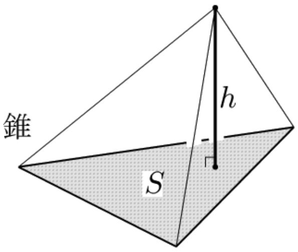
この 2 ベクトルの選び方は何通りもあるが，平面を〔図 2〕のように「1 点と法線ベクトル」で定める場合，この法線ベクトルは (実数倍の違いを除いて) 一意的である．

G 四面体 (三角錐)

(1)　体積

底面積 S，高さ h の三角錐の体積 V は

$$V=\frac{1}{3}Sh.$$



円錐や四角錐などの体積も，同様に

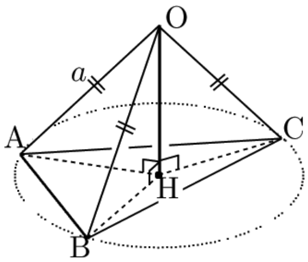
$$\frac{1}{3}(\text{底面積})\cdot(\text{高さ})$$ ←証明は数学Ⅲの積分法による

垂直！！

で求まる．

(2)　垂線の足

右図のように，3 本の母線 OA, OB, OC の長さが等しいときを考える．頂点 O から底面 ABC へ下ろした垂線の足を H とすると，



$\triangle$OHA，$\triangle$OHB，$\triangle$OHC はいずれも直角三角形であるから，三平方の定理より

$$\mathrm{HA}=\mathrm{HB}=\mathrm{HC}\ \left(\text{いずれも}\sqrt{a^2-\mathrm{OH}^2}\right)$$

よって H は $\triangle$ABC の「外心」である．

(四角錐などにおいても，母線の長さが等しければ底面の各頂点は H を中心とする円周上にある.)

〈注〉 四面体 OABC が正四面体であるとき，底面の三角形 ABC は正三角形である．そして正三角形において外心は重心と一致するから，垂線の足 H は三角形 ABC の重心でもある．

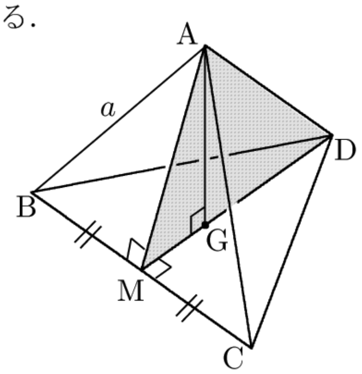
H 正四面体 ←全ての面が正三角形

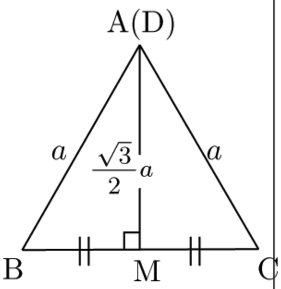
(1) 体積

1 辺の長さが a である正四面体 A-BCD の体積 V を求めてみよう．まず，正三角形 BCD の面積は

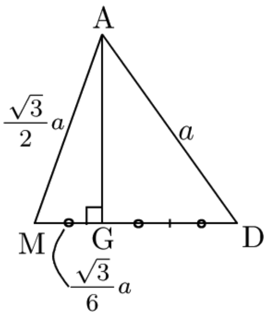
$$\triangle\mathrm{BCD}=\frac{1}{2}\cdot a\cdot a\cdot\sin 60^\circ=\frac{\sqrt{3}}{4}a^2.\qquad\cdots①$$

次に，△BCD を底面と見たときの高さを求める．





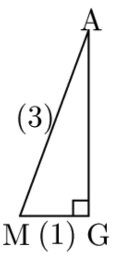
1 辺の長さが a である正四面体 ABCD において，辺 BC の中点を M，A から底面 BCD へ下ろした垂線の足を G とする．前記〈注〉により G は正三角形 BCD の重心だから，中線 DM 上にある．



そこで，この四面体の高さである AG および DM を含む平面 MAD による断面を描く．△MAD は

$$\mathrm{MA}=\mathrm{MD}\left(=\frac{\sqrt{3}}{2}a\right)$$

の二等辺三角形であり，重心 G は中線 DM をを 2 : 1 に内分するから，△AMG の 3 辺比は



$$\begin{aligned}\mathrm{AM}:\mathrm{MG}:\mathrm{GA}&=3:1:\sqrt{3^2-1}\\&=3:1:2\sqrt{2}.\end{aligned}$$

$$\therefore\text{高さ AG}=\frac{2\sqrt{2}}{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}a=\frac{\sqrt{6}}{3}a.\qquad\cdots②$$

①，②より，求める体積は

$$V=\frac{1}{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{4}a^2\cdot\frac{\sqrt{6}}{3}a=\frac{\sqrt{2}}{12}a^3.$$

〈注意〉 この結果はできれば記憶しておきたいが，「公式」として使用することは，“過程”を重んずる大学入試では避けた方が無難かも．

(2) 断面 AMD

直線 BC ⊥ 平面 AMD を示そう．

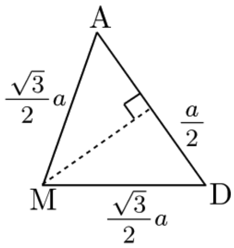
平面 ABC 上で考えると，線分 AM は正三角形の中線だから，BC ⊥ MA．平面 DBC 上で同様に考えて，BC ⊥ MD．

すなわち，BC は平面 AMD 上の 2 直線 MA，MD のいずれとも垂直だから

直線 BC ⊥ 平面 AMD.□

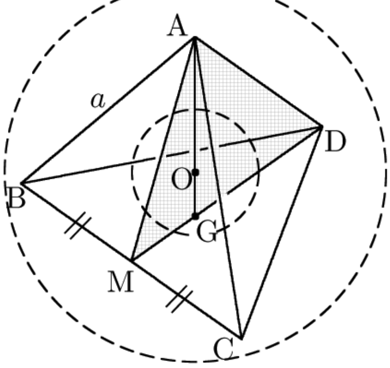
これを利用して体積 V を求めることもできる．四面体 ABCD を 2 つの四面体 B-AMD，C-AMD に分けて考えることにより

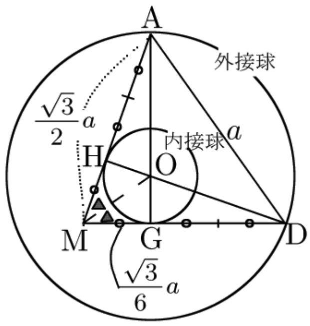
$$\begin{aligned}V&=\frac{1}{3}\cdot\triangle\mathrm{AMD}\cdot\mathrm{MB}+\frac{1}{3}\cdot\triangle\mathrm{AMD}\cdot\mathrm{MC}\\&=\frac{1}{3}\cdot\triangle\mathrm{AMD}\cdot(\mathrm{MB}+\mathrm{MC})\\&=\frac{1}{3}\cdot\underbrace{\triangle\mathrm{AMD}}_{\text{共通底面}}\cdot\underbrace{\mathrm{BC}}_{\text{高さの和}}.\end{aligned}$$



あとは二等辺三角形 AMD の面積を，右図のように中線を引いて求めればよい．

(3) 内接球・外接球





H を △ABC の重心とすると，正四面体 ABCD の内接球，外接球の中心 O は 2 直線 AG，DH の交点である．(O を正四面体 ABCD の重心という．)△AMG で角の二等分線の性質を用いると

$$\mathrm{AO}:\mathrm{OG}=\mathrm{MA}:\mathrm{MG}=3:1.$$

これと (1)②式より

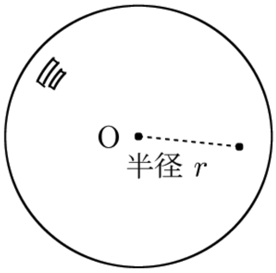
$$\text{内接球の半径}=\mathrm{OG}=\frac{1}{4}\cdot\frac{\sqrt{6}}{3}a=\frac{\sqrt{6}}{12}a,$$

$$\text{外接球の半径}=\mathrm{OA}=\frac{3}{4}\cdot\frac{\sqrt{6}}{3}a=\frac{\sqrt{6}}{4}a.$$

I 球

(1) 球とは？

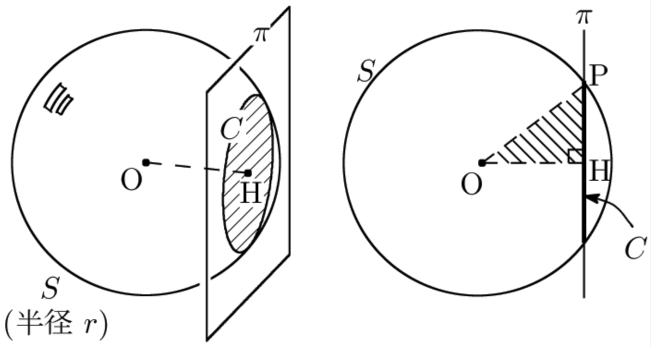
空間内で，定点からの**距離が一定**である点の集合が球である．



$$体積 = \frac{4}{3}\pi r^3,$$
$$表面積 = 4\pi r^2.$$

〈参考〉　とくに球の表面だけを考えることを強調したい場合に,「球面」と呼ぶことがある．内部も詰まった立体を考える場合には,「球体」と呼んだりする．

(2) 球と平面の交わり



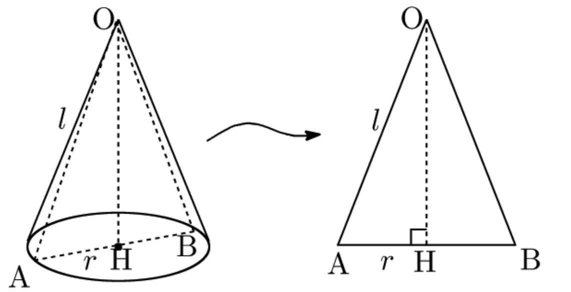
球面 S と平面 π の交わりは円周 C.

C の中心は O から π へに下ろした垂線の足 H であり，半径は直角三角形 OPH に注目して求めるとよい．

J 直円錐

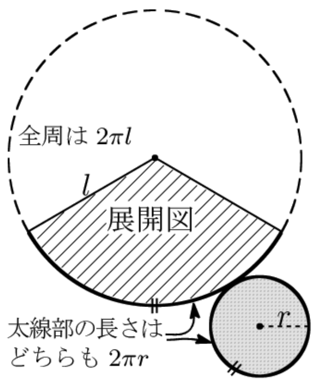
(1) 断面図

〔見取り図〕　〔断面図〕



母線の長さが l，底面の半径が r の直円錐の，軸：OH を含む平面による断面は上図右のような二等辺三角形である．直角三角形 OAH に注目すれば，直円錐の高さは $\sqrt{l^2 - r^2}$ と求まる．

(2) 展開図



側面の展開図は，右のような扇形である．これは，半径 l の円全体の

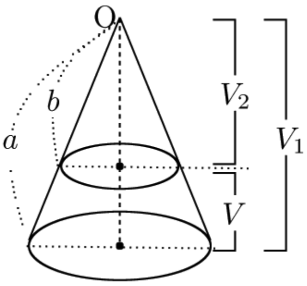
$$\frac{2\pi r}{2\pi l} = \frac{r}{l}$$

であるから，直円錐の側面積は

$$\pi l^2 \cdot \frac{r}{l} = \pi l r. \leftarrow 円周率 \times 母線 \times 底円半径$$

〈注意〉　これは，ふつう公式として使う．

(3) 円錐台と体積比



右図のように O を頂点とする 2 つの直円錐があるとき，これらは O を中心として相似の位置にあり，相似比は $a : b$ である．相似な立体どうしの体積比は相似比の 3 乗に等しいから

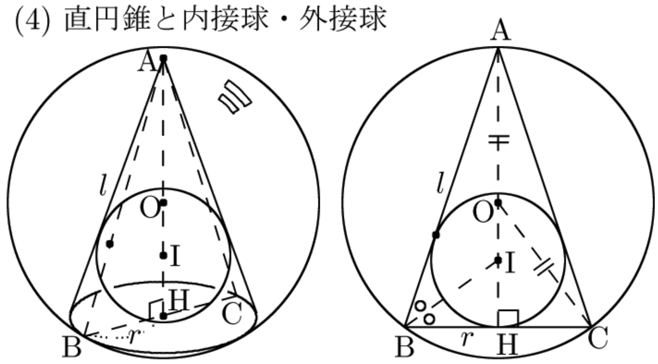
$$V_1 : V_2 = a^3 : b^3.$$

また，円錐台の体積を V とすると

$$V : V_1 = \left(a^3 - b^3\right) : a^3.$$

(体積比に関するこのような考え方は，三角錐などにおいても同様に用いることができる．)

(4) 直円錐と内接球・外接球



外接球，内接球の中心 O，I は，いずれも頂点 A から底面に下ろした垂線 OH 上にある．

○　I は ∠ABH の 2 等分線上にあるから

$$\mathrm{AI} : \mathrm{IH} = l : r.$$

内接球の半径　母線　底円の半径

○　A，C は外接球上の点だから

$$\mathrm{OA} = \mathrm{OC}.$$