確率分布（数学C）

（数学Aの確率にない数学C固有のテーマで，かつ入試でそこそこ出るものを並べてみました．）

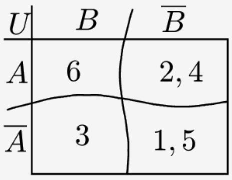
A 確率とは？

確率 $P(A)$ とは，事象 A の全事象(標本空間) U に対する起こりやすさの割合である．

B 条件付確率

たとえばサイコロ1個を投げる試行において，次の2つの事象を考える．

A :「2の倍数の目が出る」
B :「3の倍数の目が出る」



	A		A		A
1	2	3	4	5	6
		B			B

事象 A が起きた(つまり2, 4, 6のどれかが出た)という前提のもとで，事象 B も起きる(つまり6が出る)確率は $\dfrac{1}{3}$ である．これを

「A が起きたときに B が起きる**条件付確率**」

といい，$\boldsymbol{P_A(B)}$ と表す．

詳しく述べると，条件付確率 $P_A(B)$ とは，全事象 U における事象 A を新たな全事象と考えたときに，事象 $A\cap B$ が起きる確率である．よって次が成り立つ．

$$\boxed{P_A(B)=\frac{P(A\cap B)}{P(A)}.} \qquad \cdots(*)$$

$$\left(\text{実際,}\ \frac{P(A\cap B)}{P(A)}=\frac{\frac{1}{6}}{\frac{3}{6}}=\frac{1}{3}=P_A(B)\ \text{である}\right)$$

〔例〕

昨年度の受験生全体の $\dfrac{1}{3}$ はK塾生であり，大学受験における合格率は，K塾生は80%，K塾生以外は60%であった．昨年度の受験生全体から無作為に1人を選ぶとき，以下を求めよ．

(1)　選んだ1人がK塾生であるときに，その人が合格者である条件付確率．

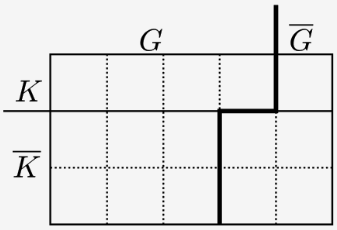
(2)　選んだ1人がK塾生であり，しかも合格者である確率．

(3)　選んだ1人が合格者であるときに，その人がK塾生である条件付確率．

【解説】　この試行における2つの事象 K, G を

K :「選んだ1人が K 塾生である」
G :「選んだ1人が合格者である」

と定める．



（長方形全体の面積が，全事象の確率1を表し，各事象に対応する部分の面積が，その確率に正比例するように描いてある．）

(1)　求める条件付確率 $P_K(G)$ は，**直接求めることができる**．（ていうか問題文に書いてある）

$$P_K(G)=\frac{80}{100}=\frac{4}{5}.$$

(2)　求める確率 $P(K\cap G)$ を，すでに求まっている条件付確率 $P_K(G)$ を用いて計算するため，$(*)$ の分母を払って得られる等式を用いる．

$$\begin{aligned}P(K\cap G)&=P(K)P_K(G)\\&=\frac{1}{3}\cdot\frac{4}{5}=\frac{4}{15}.\end{aligned} \qquad \cdots①$$

(3)　求める条件付確率 $P_G(K)$ は，**直接求めることができない**．そこで，$(*)$ を用いて

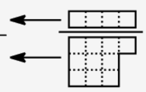
$$P_G(K)=\frac{P(K\cap G)}{P(G)}. \qquad \cdots②$$

ここで，選んだ1人がK塾生である場合とそうでない場合に分けて考えて

$$\begin{aligned}P(G)&=P(K\cap G)+P(\overline{K}\cap G)\\&=P(K)P_K(G)+P(\overline{K})P_{\overline{K}}(G)\\&=\frac{1}{3}\cdot\frac{4}{5}+\frac{2}{3}\cdot\frac{3}{5}\\&=\frac{4}{15}+\frac{6}{15}.\end{aligned}$$

これと①，②より

$$\begin{aligned}P_G(K)&=\frac{\frac{4}{15}}{\frac{4}{15}+\frac{6}{15}}\\&=\frac{4}{4+6}=\frac{2}{5}.\end{aligned}$$



〈注〉(1)の $P_K(G)$ は，「K(原因) → G(結果)」の向きだから考えやすい．

(3)の $P_G(K)$ は，G(結果) → K(原因) の向きだから考えにくい．(これを俗に「原因の確率」という)

C 分散

分散 $V(X)$ は確率変数 X の散らばり具合を表す．

X	x_1	x_2	x_3	$\cdots$	x_n	計
P	p_1	p_2	p_3	$\cdots$	p_n	1

上表に示した確率分布をもつ確率変数 X の平均(期待値)：$E(X)=\displaystyle\sum_{k=1}^{n}x_kp_k$ ($=m$ とおく) をもとにして，X の分散は，次の2通りの方法で求まる．

(1) 定義による求め方

$$V(X)=\sum_{k=1}^{n}(x_k-m)^2p_k.$$

(2) 定理による求め方

$$V(X)=\underbrace{E(X^2)}_{2\text{ 乗の平均}}-\underbrace{\{E(X)\}^2}_{\text{平均の 2 乗}}.$$

〈注〉分散を実際に数値計算する際には，x_k-m の値がキレイなら (1) が速く，キタナイなら (2) が速い (ことが多い).

D 平均の性質

平均・分散に関する諸公式の中で，もっとも確実に使え，しかも使用頻度が比較的高いのが次の 2 つ.

$E(aX+b)=aE(X)+b.$ (a, b は定数) $\cdots$ ⓐ

$\Big(V(aX+b)=a^2V(X).\Big)$ ←おまけ

$E(X+Y)=E(X)+E(Y).$ $\cdots$ ⓑ

〈注〉ⓑは，X，Y が独立でなくても使える．(確率変数の「独立」がよくわからなければ，とにかくいつでも成り立つと思っておこう)

他にも $E(XY)=E(X)E(Y)$, $V(X+Y)=V(X)+V(Y)$ などの公式があるが，これらには“使用上の制限”があり，使えないときもある.

E 二項分布

たとえばサイコロを 600 回投げるとき，1 の目が出る回数 X の平均を考えてみよう.

$$P(X=k)={}_{600}\mathrm{C}_k\left(\frac{1}{6}\right)^k\left(\frac{5}{6}\right)^{600-k}$$

であるから，平均の定義によれば

$$E(X)=\sum_{k=0}^{600}k\cdot{}_{600}\mathrm{C}_k\left(\frac{1}{6}\right)^k\left(\frac{5}{6}\right)^{600-k}$$

となる．これを二項係数に関する公式：$k_n\mathrm{C}_k=n_{n-1}\mathrm{C}_{k-1}$ と二項定理を用いて計算することもできるが，ここでは $E(X)$ を“ダミー変数”(私は“カウンター変数”と呼んでいる) を用いた方法で求める．(この手法自体が入試問題解法として役立つ)

確率変数 X_k を

$$X_k=\begin{cases}1 & (\text{第 }k\text{ 回の目が 1 のとき})\\ 0 & (\text{第 }k\text{ 回の目が 1 以外のとき})\end{cases}$$

$(k=1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ 600)$

と定めると

$$X=X_1+X_2+\cdots+X_{600}.$$

(1 の目が出るたびに，X に 1 ずつ加算されるっていうカンジ…)

前項の公式ⓑは 3 つ以上の確率変数についても成り立つから

$$E(X)=E(X_1)+E(X_2)+\cdots+E(X_{600}).$$

ここで

X_k	1	0	計
P	$\frac{1}{6}$	$\frac{5}{6}$	1

$$E(X_k)=1\cdot\frac{1}{6}+0\cdot\frac{5}{6}=\frac{1}{6}$$

$(k=1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ 600)$

であるから

$$E(X)=600\cdot\frac{1}{6}=100.$$

〔二項分布の一般論〕

○ 1 回の試行 T において，

$$\begin{cases}\text{事象 }A\text{ が起きる確率は }p,\\ \text{事象}\overline{A}\text{が起きる確率は }q(=1-p).\end{cases}$$

○ T を独立に（無関係に）n 回反復する.

このとき，「事象 A が起きる回数」を確率変数 X とすると，X は

二項分布 $B(n,p)$ に従う

反復回数 (n)　1 回毎の A の確率 (p)

といい，次の性質をもつ.

$E(X)=np.$ $\cdots$ ⓒ

$V(X)=npq.$ $\cdots$ ⓓ

(ⓓはおまけ．証明は教科書参照)

これを知っていれば，前述の例題の“**【解答】**”は次の 2 行で終わる.

「X は二項分布 $B(600,\ \frac{1}{6})$ に従うから
$E(X)=600\cdot\frac{1}{6}=100.$」

↑必ず書くこと!!

〔例〕

数直線上の動点 P は，はじめ原点にあり，サイコロを投げて 3 の倍数の目がでたら正の向きに 2 進み，3 の倍数以外の目が出たら負の向きに 1 進む．このような試行を 10 回繰り返したときの P の座標 X の平均を求めよ.

【解説】

もちろん，X の確率分布を求めて期待値の定義にあてはめるのが正攻法であるが，あまりにも大変である．そこで，次のようにする.

10 回のうち 3 の倍数が出た回数を確率変数 Y とすると

$$X=Y\cdot2+(10-Y)(-1)=3Y-10.$$

$\therefore\ E(X)=E(3Y-10)$

$=3E(Y)-10.$ (公式ⓐより)

ここで，Y は二項分布 $B(10,\ \frac{1}{3})$ に従うから

$E(Y)=10\cdot\frac{1}{3}=\frac{10}{3}.$ (公式ⓒより)

$\therefore\ E(X)=3\cdot\frac{10}{3}-10=0.$