http://homepage3.nifty.com/yakuikei

●○ **確率**

2014/4/19 更新

●○●○●○●○●○●○●○●○●○●○●○●○●○●○●○

A 確率 $P(A)$ とは?

P :「Probability」

サイコロを1つ投げる試行において，目の出方は

$$\underbrace{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6}_{\text{全事象 } U} \quad \cdots ㋐$$

の6通りであり，このうちのどれかが必ず起こる．

この試行における「5の目が出る」という事象 A の確率 $P(A)$ とは，

事象 A の，全事象 U に対する

起こりやすさの割合←つまり，全体を「1」とする

であり，㋐ の6つの事象の起こりやすさはすべて等しいから，A の起こりやすさは，全事象の起こりやすさの $\frac{1}{6}$ 倍である．すなわち

$$P(A)=\frac{1}{6}.$$

B 確率の基本性質

(1) $\underbrace{0}_{P(\emptyset)} \leqq P(A) \leqq \underbrace{1}_{P(U)}$.　($\emptyset$: 空事象)

(2) A，B が**排反**なとき

└同時には起こらないってこと

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B).$$

A，B が排反とは限らないときは，

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B).$$

〈注〉$A\cup\overline{A}=U$ であるから

$$P(A)+P(\overline{A})=1.$$

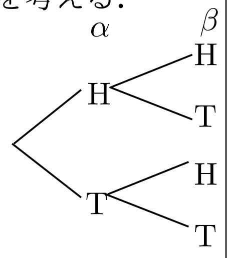
C 確率の求め方

(1) $P(A)=\dfrac{n(A)}{n(U)}$.　←**A** もこの1例

〈注〉
- ☆ : $n(U)$ 通りの事象が**等確率**なときに限る．
- ★ : $n(A)$ は $n(U)$ と**同じ基準**で数える．

〈例〉コイン2枚を同時に投げるとき，表 (H) と裏 (T) が1枚ずつ出る事象 A の確率を考える．

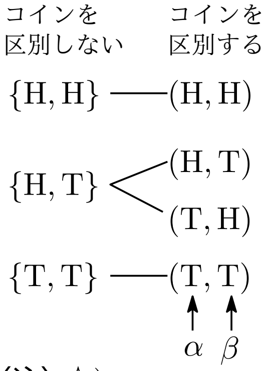
コインを α,β と区別したとき，α のコインで H，T のいずれが出るかは等確率．また，前記の各々の場合について，コイン β で H，T のいずれが出るかも等確率．よって右の4通りの場合は，すべて等確率．



このうち条件をみたすものは2通り．よって

$$P(A)=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}.$$

〈注1〉



2枚のコインを区別しない場合，目の組合せは図の左側の3通りであるが，図の右側の等確率な4通りとの対応関係を見ればわかるように，この3通りは等確率ではないから，$\cancel{P(A)=\frac{1}{3}}$ は誤り！(〈注〉☆)

コインやサイコロのように重複がある (同じものが繰り返し出る) 場合には,「組合せ」の数を用いて確率を求めることはできない！

〈注2〉この〈例〉を見ればわかるように,「確率」の問題では，問題文中に「区別のある～」と明言されていなくても，解答する側が**自ら積極的に～を区別しなければならない** (そうしないと等確率な $n(U)$ 通りが得られない) ことが多い．つまり,「～を区別するか否か」の決定権を持つ人物は，次の通りである．

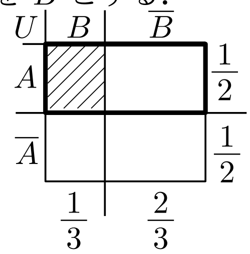
- 場合の数の問題 ⋯ 作問者 (大学のセンセイ)
- 確率の問題 ⋯ 解答者 (アナタです！)

(2) $P(A\cap B)=P(A)\cdot P(B)$.

AとBが無関係なとき

(割合に割合を掛けるような感覚で使う．)

〈例〉コインを投げて表が出る事象を A，サイコロを振って2以下の目が出る事象を B とする．このとき，事象 $A\cap B$ の確率を求めてみよう．



まず，A(右図の□部) の全事象 U に対する起こりやすさの割合は

$$P(A)=\frac{1}{2}. \qquad \cdots \square=\underbrace{P(U)}_{1}\times\frac{1}{2}$$

そして，$A\cap B$(右上図の▨部) の A に対する起こりやすさの割合は

$$P(B)=\frac{1}{3}. \qquad \cdots ▨=\square\times\frac{1}{3}$$

したがって，$A\cap B$ の全事象 U に対する起こりやすさの割合は，これらの**割合どうしを掛けて**

$$P(A\cap B)=\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}=\frac{1}{6}.$$

D 独立反復試行

サイコロを5回投げるとき，1の目 (○で表す) が2回，他の目 (×で表す) が3回出る確率を考える．

○，×の順序は，○が何回目に出るかを考えて ${}_5\mathrm{C}_2$ 通り．これら各々の確率は，どれも $\left(\frac{1}{6}\right)^2\cdot\left(\frac{5}{6}\right)^3$．

$$
{}_5\mathrm{C}_2\ \text{通り}\left\{\begin{array}{l}○○×××\\○×○××\\○××○×\\\quad\vdots\\××○×○\\×××○○\end{array}\right.
$$

したがって，求める確率は

$$
{}_5\mathrm{C}_2\times\left(\frac{1}{6}\right)^2\cdot\left(\frac{5}{6}\right)^3.
$$

〈注〉公式として丸暗記するのは危険！必ず「○と×の並べ方」を思い浮かべて．(なんなら紙に書く)

$\boxed{\mathrm{E}}$条件付確率

たとえばサイコロ１個を投げる試行において，次の２つの事象を考える．

A :「2 の倍数の目が出る」

B :「3 の倍数の目が出る」

$$
\begin{array}{cccccc} & A & & A & & A\\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6\\ & & B & & & B\end{array}
$$

U	B	$\overline{B}$
A	6	2, 4
$\overline{A}$	3	1, 5

事象 A が起きた (つまり 2, 4, 6 のどれかが出た) という前提のもとで，事象 B も起きる (つまり 6 が出る) 確率は $\frac{1}{3}$ である．これを

「A が起きたときに B が起きる**条件付確率**」

といい，$\boldsymbol{P_A(B)}$ と表す．

詳しく述べると，条件付確率 $P_A(B)$ とは，全事象 U における事象 A を新たな全事象と考えたときに，事象 $A\cap B$ が起きる確率である．よって次が成り立つ．

$$
P_A(B)=\frac{P(A\cap B)}{P(A)}. \qquad \cdots(*)
$$

$$
\left(\text{実際},\frac{P(A\cap B)}{P(A)}=\frac{\frac{1}{6}}{\frac{3}{6}}=\frac{1}{3}=P_A(B)\ \text{である}\right)
$$

$(*)$ は，分母を払った次の形で使うことも多い．

$$
P(A\cap B)=P(A)\cdot P_A(B). \qquad \cdots(**)
$$

〔例〕

昨年度の受験生全体の $\frac{1}{3}$ は K 塾生であり，大学受験における合格率は，K 塾生は 80%，K 塾生以外は 60%であった．昨年度の受験生全体から無作為に１人を選ぶとき，以下を求めよ．

(1)　選んだ１人が K 塾生であるときに，その人が合格者である条件付確率．

(2)　選んだ１人が K 塾生であり，しかも合格者である確率．

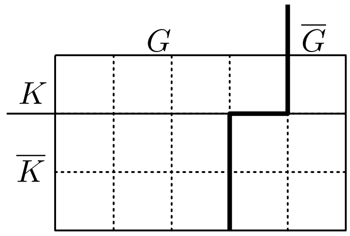
(3)　選んだ１人が合格者であるときに，その人が K 塾生である条件付確率．

【解説】　この試行における２つの事象 K, G を

K :「選んだ１人が K 塾生である」

G :「選んだ１人が合格者である」

と定める．



(長方形全体の面積が，全事象の確率 1 を表し，各事象に対応する部分の面積が，その確率に比例するように描いてある．)

(1)　求める条件付確率 $P_K(G)$ は，**直接求めることができる．** (ていうか問題文に書いてある)

$$
P_K(G)=\frac{80}{100}=\frac{4}{5}.
$$

(2)　求める確率 $P(K\cap G)$ を，すでに求まっている条件付確率 $P_K(G)$ を用いて計算するため，前述の等式 $(**)$ を用いる．

$$
\begin{aligned}
P(K\cap G)&=P(K)P_K(G)\\
&=\frac{1}{3}\cdot\frac{4}{5}=\frac{4}{15}. \qquad \cdots①
\end{aligned}
$$

(3)　求める条件付確率 $P_G(K)$ は，**直接求めることができない．** そこで，$(*)$ を用いて

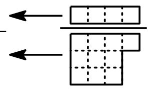
$$
P_G(K)=\frac{P(K\cap G)}{P(G)}. \qquad \cdots②
$$

ここで，選んだ１人が K 塾生である場合とそうでない場合に分けて考えて

$$
\begin{aligned}
P(G)&=P(K\cap G)+P(\overline{K}\cap G)\\
&=P(K)P_K(G)+P(\overline{K})P_{\overline{K}}(G)\\
&=\frac{1}{3}\cdot\frac{4}{5}+\frac{2}{3}\cdot\frac{3}{5}\\
&=\frac{4}{15}+\frac{6}{15}.
\end{aligned}
$$

これと①，②より

$$
\begin{aligned}
P_G(K)&=\frac{\frac{4}{15}}{\frac{4}{15}+\frac{6}{15}}\\
&=\frac{4}{4+6}=\frac{2}{5}.
\end{aligned}
$$



〈注〉(1) の $P_K(G)$ は，「K(原因) $\to$ G(結果)」の向きだから考えやすい．

(3) の $P_G(K)$ は，G(結果) $\to$ K(原因) の向きだから考えにくい．(これを俗に」「原因の確率」とか「事後の確率」という)

F 余事象の確率

サイコロを n 回投げるとき，最大の目が6である事象を A とする．n 回のうち6の目が出る回数は

$$\underbrace{0}_{\overline{A}}\ ,\ \underbrace{1,\ 2,\ 3,\ \ldots,\ n}_{A}$$

求めやすい　　求めたいけど求めづらい

のいずれかであるから，A の**余事象**

$\overline{A}$:「6がまったく出ない」

i.e.「すべての目が5以下」

に注目して

$$P(A)=\underbrace{1}_{P(U)}-p(\overline{A})=1-\left(\frac{5}{6}\right)^n.$$

〈注〉　最大の目が5である事象 B は，

$\overline{A}$:「すべての目が5以下」

であることを前提として，このうち

「すべての目が4以下」でない

場合を考えて

$$P(B)=\left(\frac{5}{6}\right)^n-\left(\frac{4}{6}\right)^n.$$

(何でもかんでも「1」から引く訳じゃないよ．)

G 平均 (期待値)　(数学A範囲外だが，念のため)

サイコロを1個投げ，出た目を4で割った余りを得点 X とすると，出た目と X の対応関係は次のようになる．

目	1	2	3	4	5	6
X	1	2	3	0	1	2

よって，X の各値と，その値をとる確率 P の対応関係は次のようになる．

確率分布表という →

X	0	1	2	3	計
P	$\frac{1}{6}$	$\frac{2}{6}$	$\frac{2}{6}$	$\frac{1}{6}$	1

l

このとき X の**平均 (期待値)** は

確率変数という

$$\begin{aligned}E(X)&=0\cdot\frac{1}{6}+1\cdot\frac{2}{6}+2\cdot\frac{2}{6}+3\cdot\frac{1}{6}\\&=\frac{0\cdot1+1\cdot2+2\cdot2+3\cdot1}{6}\\&=1.5.\end{aligned}$$

H 補足

〔C (1) の例 (その2)〕

1, 2, 3と書かれたカードが2枚ずつ，計6枚ある．そこから2枚を選ぶとき，2つの数が連続自然数である事象 A の確率を求めよう．6枚のカードを

$1_a,\ 1_b,\ 2_a,\ 2_b,\ 3_a,\ 3_b$

とすべて区別して考えるとき，選ばれる2枚のカードの組合せ：

$\{1_a,\ 1_b\},\ \{1_a,\ 2_a\},\ \{1_a,\ 2_b\},\ \ldots,\ \{3_a,\ 3_b\}$

の各々は等確率であり，全部で

${}_6C_2=15$ (通り).

- 連続する2つの自然数の組合せは

  $\{1,\ 2\},\ \{2,\ 3\}$ の2通り．

- たとえば $\{1,\ 2\}$ のとき，a or b の区別を考えると

  $\{1_a,\ 2_a\},\ \{1_a,\ 2_b\},\ \{1_b,\ 2_a\},\ \{1_b,\ 2_b\}$

  1_a or 1_b

  の $2\cdot2$ 通りがある．

  2_a or 2_b

- よって，$P(A)=\dfrac{2\times2\cdot2}{15}$.　$\cdots$

〈注1〉 上式の分母：15通りは，「a or b」を区別して数えている．したがって，分子においても「a or b」を区別して数えなければならない．「$\times2\cdot2$」を忘れないように！(〈注〉★)