2007/4/23 更新

整式・整方程式

A 展開

たとえば

$$\underbrace{(2x^2+3x+4)}_{㋐}\underbrace{(5x+6)}_{㋑}$$

の展開式は，♦ 因数㋐，㋑からそれぞれ**項を 1 個ずつ抜き出して作られる積**を，すべての抜き出し方について加えることによってできる．←3・2=6 通り

よって，たとえば展開式における x^2 の係数は，線を引いて示し**た抜き出し方**のみ考えて

$$2{\cdot}6+3{\cdot}5=27.$$

〈注💀〉この程度の展開において

$$10x^3+12x^2+15x^2+18x+20x+24$$

と紙に書いてから同類項をまとめていたのでは，式の次数に対する感覚が磨かれて行かない．

B 因数分解

2 つ以上の文字を含んだ式の因数分解では

低次の文字について整理する

のが原則である．

〈例〉

$$
\begin{aligned}
&x^3+x^2\underline{y}+3x^2-9\underline{y} && \leftarrow x \text{ については 3 次},\ y \text{ については 1 次}\\
=&\underline{y}(x^2-9)+x^2(x+3) && \leftarrow y \text{ について整理}\\
=&y(x+3)(x-3)+x^2(x+3)\\
=&(x+3)\left\{y(x-3)+x^2\right\}\\
=&(x+3)(x^2+xy-3y).
\end{aligned}
$$

C 展開・因数分解の公式

(1) 2 項展開

$$
\begin{aligned}
(a+b)^2 =& a^2+2ab+b^2\\
(a+b)^3 =& a^3+\underline{3}\,a^2b+3ab^2+b^3 && \cdots①\\
&\vdots\\
(a+b)^n =& a^n+na^{n-1}b+{}_n\mathrm{C}_2a^{n-2}b^2+\cdots+b^n\\
=&\sum_{k=0}^{n}{}_n\mathrm{C}_k a^{n-k}b^k && \cdots(\textbf{二項定理})②
\end{aligned}
$$

〈注 1♧〉①における a^2b の係数が $\underline{3}$ となることは，A の考え方から理解できる．

$$\underbrace{(a+b)}_{㋐}\underbrace{(a+b)}_{㋑}\underbrace{(a+b)}_{㋒}$$

因数㋐，㋑，㋒のそれぞれから a, b のうち一方を抜き出して作る積のうち，「a^2b」の項になるものは，前図で線を引いて示した 3 つである．これは，

3 つの因数㋐，㋑，㋒のうち，b の方を抜き出す 1 つの因数の選び方の数

に他ならない．よって a^2b の係数は

$${}_3\mathrm{C}_1=\underline{3}$$

となる．

このような考え方が理解されていれば，「二項定理」②や“3 項展開”の公式

$$(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ca$$

も自然に覚えられる．

〈注 2〉 $(a-b)^3=a^3-3a^2b+3ab^2-b^3$

などは，上記の b を $-b$ に置き換えれば得られるので，覚えてもよいし覚えなくてもよい．

(2) 累乗の差の因数分解

$$
\begin{aligned}
a^2-b^2 =& (a-b)(a+b)\\
a^3-b^3 =& (a-b)(a^2+ab+b^2) && \cdots①\\
&\vdots\\
a^n-b^n =& (a-b)(a^{n-1}+a^{n-2}b+a^{n-3}b^2+\cdots\\
&+ab^{n-2}+b^{n-1}) && \cdots②
\end{aligned}
$$

a の次数は 1 ずつ下がり，b の次数は 1 ずつ上がる

〈注 1〉証明は，右辺を展開することによってできる．

〈注 2〉① において，b を $-b$ に置き換えると

$$a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2)$$

となる．これも覚えておいてもよい．

一般に，n が奇数のとき

$$a^n+b^n=a^n-(-b)^n$$

と表せ，②を用いて因数分解できる．

D 対称式

(1) 2 文字の対称式

$\alpha^2+\beta^2$ や $\alpha^2\beta+\alpha\beta^2$ のように，2 文字 ←α，β が対等に現れる

α, β の整式 $f(\alpha,\beta)$ で，

$$f(\beta,\alpha)=f(\alpha,\beta) \quad \leftarrow \alpha,\ \beta \text{ を入れ替えても不変}$$

を満たすものを，α, β の**対称式**という．

任意の α, β の対称式は，**基本対称式**

$$\underbrace{\alpha+\beta}_{和},\ \underbrace{\alpha\beta}_{積}$$

だけで表すことが可能である．←証明は難

〈汎用公式〉

① $\alpha^2+\beta^2=\underbrace{(\alpha+\beta)^2}_{\alpha^2+\beta^2+2\alpha\beta}-2\alpha\beta$

② $\alpha^3+\beta^3=\underbrace{(\alpha+\beta)^3}_{\alpha^3+\beta^3+3\alpha^2\beta+3\alpha\beta^2}-3\alpha\beta(\alpha+\beta)$

(2)　3 文字の対称式

α，β，γが対等に現れる

$\alpha^2+\beta^2+\gamma^2$ や $\alpha^3+\beta^3+\gamma^3-3\alpha\beta\gamma$ などを α, β, γ の対称式といい，基本対称式

$$\alpha+\beta+\gamma,\ \alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha,\ \alpha\beta\gamma$$

だけで表すことが可能である．

〈汎用公式〉

① $\alpha^2+\beta^2+\gamma^2$

$=(\alpha+\beta+\gamma)^2-2(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)$

② $\alpha^3+\beta^3+\gamma^3-3\alpha\beta\gamma$

$=(\alpha+\beta+\gamma)(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2-\alpha\beta-\beta\gamma-\gamma\alpha)$

〔②の証明〕

右辺を展開すればできるが，味気ないので左辺を因数分解してみる．

$\underline{\alpha^3+\beta^3}+\gamma^3-3\alpha\beta\gamma$

$=\underline{(\alpha+\beta)^3-3\alpha\beta(\alpha+\beta)}+\gamma^3\ \ -3\alpha\beta\gamma$

$=\{(\alpha+\beta)+\gamma\}\{(\alpha+\beta)^2-(\alpha+\beta)\gamma+\gamma^2\}$

いい練習になるでしょ！　$-3\alpha\beta(\alpha+\beta+\gamma)$

$=(\alpha+\beta+\gamma)(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2-\alpha\beta-\beta\gamma-\gamma\alpha)$. □

E 整式の除法

$f(x)=x^3+4x^2+5x+1$ を $g(x)=x^2+2x-2$ で「割る」ことの意味を説明しよう．

$$\begin{array}{rrrrrl}
 & \underline{x} & +2 & & & \leftarrow Q(x)\\ \hline
x^2+2x-2\,) & x^3 & +4x^2 & +5x & +1 & \leftarrow f(x)\\
 & x^3 & +2x^2 & -2x & & \leftarrow g(x)\cdot\underline{x}\\ \hline
 & & 2x^2 & +7x & +1 & \leftarrow f(x)-g(x)\cdot\underline{x}\\
 & & 2x^2 & +4x & -4 & \leftarrow g(x)\cdot 2\\ \hline
 & & & 3x & +5 & \leftarrow f(x)-g(x)\cdot\underline{x}-g(x)\cdot 2=R(x)
\end{array}$$

まず，$f(x)$ から $g(x)$ の $\underline{x}$ 倍を**取り除き**，残った $f(x)-g(x)\cdot\underline{x}$ からさらに $g(x)$ の 2 倍を**取り除く**．すると残りが 1 次式：$3x+5$ となり，2 次式 $g(x)$ より次数が低くなったので，もうこれ以上 $g(x)\times$(整式) を**取り除く**ことはできなくい．つまり $f(x)$ を

$$f(x)=\underset{\text{高次}}{\underline{g(x)}}\cdot(x+2)+\underset{\text{低次}}{\underline{(3x+5)}} \qquad \cdots ☼$$

の形へと**式変形**することができた．このとき，$Q(x):=x+2$, $R(x):=3x+5$ を，それぞれ $f(x)$ を $g(x)$ で割ったときの**商**，**余り**という．

このように，整式 $f(x)$ から整式 $g(x)$ の整式倍を**取り除けるだけ取り除き**，$f(x)$ を

$$f(x)=\underset{\text{高次}}{\underline{g(x)}}\cdot\overbrace{Q(x)}^{\text{商}}+\underset{\text{低次}}{\underline{\overbrace{R(x)}^{\text{余り}}}} \qquad \cdots ☁$$

の形へと**式変形**するのが**整式の除法**である．

$R(x)$ が 0 のとき，「$f(x)$ は $g(x)$ で割り切れる」という．

余りがない

〈注意〉☁ 中の「=」は，**「両辺が式として一致する」**という意味である．つまり「整式の除法」とは

「割る」と言い表してしまうが…

掛け算　足し算

◆ 「·」「＋」を用い，次数の関係を考慮した一種の**式変形**

展開や因数分解もそう

である．(**決して「÷」は用いない！**)

☼の右辺を計算・整理し，左辺の $f(x)$ とまったく同じ式であることを確かめてみるとよい．

このような除法の仕組みが理解できたなら，実際に計算を行う際には次のように係数のみ抜き出して計算する方が**はるかに速い**．(その分，除法の仕組みは理解しづらくなる)

$$\begin{array}{rrrr|rrrr}
 & & & & 1 & 2 & & \\ \hline
1 & 2 & -2 &) & 1 & 4 & 5 & 1\\
 & & & & 1 & 2 & -2 & \\ \cline{5-7}
 & & & & & 2 & 7 & 1\\
 & & & & & 2 & 4 & -4\\ \cline{6-8}
 & & & & & & 3 & 5
\end{array}$$

マイナスだよ！(x+2 なら x−(−2) とみなす)

1 次式 $x-\alpha$ で割る際には，**組み立て除法**が速い．たとえば $x^3-3x^2-4x+15$ を $x-2$ で割るときは，次のようにする．

$$\begin{array}{r|rrr|r}
2 & 1 & -3 & -4 & 15\\
 & & 2 & -2 & -12\\ \hline
 & \underbrace{1\quad -1\quad -6}_{\text{商の係数}} & & & \underbrace{3}_{\text{余り}}
\end{array}$$

$\therefore$ 商 $=x^2-x-6$, 余り $=3$.

この計算法は，とりあえず暗記しておこう．

F 剰余定理・因数定理

整式 $f(x)$ を 1 次式 $x-\alpha$ で割ったときの余りは，それより低次なので定数 r とおける．よって

$$f(x)=(x-\alpha)Q(x)+r \quad (Q(x)\text{ は整式}) \quad \cdots 🎀$$

と表せる．E〈注〉で述べたように，🎀は任意の x について成り立つから，x に定数 α を代入して

$$f(\alpha)=r. \qquad \cdots\textbf{剰余定理}$$

また，とくに余り r が 0 のときを考えて

$$f(\alpha)=0$$
$$\Longleftrightarrow f(x)\text{ は } x-\alpha \text{で割り切れる．} \quad \cdots\textbf{因数定理}$$

（つまり $f(x)=(x-\alpha)(\cdots\cdots)$ と因数分解できる）

〈注〉♦ 剰余定理の**証明過程**からもわかるように，整式を扱う際には ☼,🎀などの $\boxed{\text{式変形}}$ をベースにして，状況に応じて x に何か $\boxed{\text{上手い数値を代入}}$する．

整式=0 の形の方程式

G 整方程式の解とは？ ♦

x の方程式

$$\underbrace{x^2+x-6}_{f(x)\text{ とおく}}=0 \qquad \cdots(*)$$

の解について，次の 2 つの見方がある．

(1) $f(2)\overset{\text{数値として等しい}}{=}4+2-6=0$ より，$\cdots\boxed{\textbf{数値代入}}$
「2」は $(*)$ の **1 つの解**である．
（このとき因数定理より $f(x)=(x-2)(\cdots)$）

(2) $f(x)\overset{\text{式として一致}}{=}(x-2)(x+3)$ より，$\cdots\boxed{\textbf{因数分解}}$
$(*)$ の**すべての解**は「2，−3」である．
（$\underbrace{(x-2)(x+3)=0}_{\boxed{\textbf{積}=\mathbf{0}}\text{ の形}}\Leftrightarrow x-2=0$ or $x+3=0$より）

H 解と係数の関係

(1) 「2 次方程式 $f(x):=ax^2+bx+c=0$ の 2 解が$\alpha,\ \beta$.」

$$\Longleftrightarrow f(x)=a(x-\alpha)(x-\beta)$$
式として一致
$$\Longleftrightarrow f(x)=a\left\{x^2-(\alpha+\beta)x+\alpha\beta\right\}$$
$$\Longleftrightarrow -a(\alpha+\beta)=b,\ a\cdot\alpha\beta=c$$
$$\Longleftrightarrow \alpha+\beta=-\frac{b}{a},\ \alpha\beta=\frac{c}{a}.$$

(2) (1) と同様に

「3 次方程式 $f(x):=ax^3+bx^2+cx+d=0$ の 3 解が$\alpha,\ \beta,\ \gamma$.」

$$\Longleftrightarrow f(x)=a(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)$$
$$\Longleftrightarrow f(x)=a\left\{x^3-(\alpha+\beta+\gamma)x^2+(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)x-\alpha\beta\gamma\right\}$$
$$\Longleftrightarrow \begin{cases}-a(\alpha+\beta+\gamma)=b\\ a(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)=c\\ -a\cdot\alpha\beta\gamma=d\end{cases}$$
$$\Longleftrightarrow \qquad \vdots$$
結果はワザと書かないよ

I 2 次方程式の解の公式

2 次方程式

$$x^2-6x+14=0 \qquad \cdots①$$

について考える．①を平方完成すると

$$(x-3)^2-(\boxed{-5})=0. \quad \leftarrow x\text{ を集める} \qquad \cdots①'$$

ここで，左辺をG(2) の形に因数分解するために，2 乗 −2 乗の形を作りたいので，次の**虚数単位**「$\boldsymbol{i}$」を考える．

$$\begin{cases} i^2=-1.\\ \text{それ以外の演算の規則は通常の文字と同じ.}\end{cases}$$

すると

$$(\sqrt{5}\,i)^2=(\sqrt{5})^2\,i^2=5\,i^2=5\cdot(-1)=-5$$

だから，①'は

$$(x-3)^2-(\sqrt{5}\,i)^2=0. \quad \leftarrow 2\text{ 乗 }-2\text{ 乗の形を作る}$$
$$(x-3-\sqrt{5}\,i)(x-3+\sqrt{5}\,i)=0. \quad \leftarrow\text{積}=0\text{ の形}$$
$$x-3-\sqrt{5}\,i=0 \ \text{ or } \ x-3+\sqrt{5}\,i=0.$$
$$\therefore x=3+\sqrt{5}\,i,\ 3-\sqrt{5}\,i. \quad \leftarrow\boxed{\text{G}}\text{(2) を用いた}$$

実数係数の 2 次方程式

$$ax^2+bx+c=0 \qquad \cdots✩$$

を前記と同様に変形すると

$$⚘ \quad \left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{\boxed{b^2-4ac}}{4a^2}=0.$$

ここで $D=b^2-4ac$ とおくと，D の符号に応じて

$$\begin{cases}\text{たとえば } D=5 \text{ なら } D=(\sqrt{5})^2,\\ \text{たとえば } D=-5 \text{ なら } D=(\sqrt{5}\,i)^2\end{cases}$$

のようにすれば前記①'のようにして解ける．そして

$$\sqrt{-5}=\sqrt{5}\,i$$

のように定めておけば，D の符合に関らず✩の解は

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{\boxed{b^2-4ac}}}{2a}. \qquad \cdots\ \textbf{(解の公式)}$$

の $\sqrt{\ \ }$ 内: $\boxed{b^2-4ac}$ を2次方程式の**判別式**といい，この符号によって解が実数か虚数かが判定できる．

なお，$ax^2+2b'x+c=0$ (b'も実数) の解は

$$x=\frac{-b'\pm\sqrt{\boxed{b'^2-ac}}}{a}.$$

←この $\sqrt{\ \ }$ 内は 判別式/4.
←俗称：b' の解の公式

〈注 1〉 虚数単位 i を用いて $a+bi$ (a, b は実数) と表される数を**複素数**という．これは，$b=0$ なら実数，$b\neq 0$ なら**虚数**である．虚数については大きさを考えない．複素数どうしの相等については，a, b, a', b' を実数として

$$a+bi=a'+b'i\iff\begin{cases}a=a',\\ b=b'\end{cases}\qquad\cdots$$

と定める．

〈注 2〉 $\sqrt{-3}\cdot\sqrt{-2}=\sqrt{3}i\cdot\sqrt{2}i=-\sqrt{6}$,

$\sqrt{(-3)(-2)}=\sqrt{6}$.

$\therefore\ \sqrt{-3}\cdot\sqrt{-2}\neq\sqrt{(-3)(-2)}$. ←注意!!

$\boxed{\text{J}}$ 高次方程式の解き方

3次方程式

$$\underbrace{x^3-x^2-8x+12}_{f(x)\text{ とおく}}=0 \qquad\cdots$$

を解いてみよう．まずは**1つの解**，つまり $f(\alpha)=0$ を満たす α を見つける．

←$\boxed{\text{G}}$(1)

$$\begin{aligned}f(1)&=1-1-8+12\neq 0,\\ f(-1)&=-1-1+8+12\neq 0,\\ f(2)&=8-4-16+12=0.\end{aligned}$$

よって $x=2$ は方程式の1つの解であり，因数定理により $f(x)$ は $x-2$ によって割り切れるハズ．

$$\begin{array}{r|rrr|r} 2 & 1 & -1 & -8 & 12\\ & & 2 & 2 & -12\\ \hline & 1 & 1 & -6 & 0\end{array}$$

上記の組み立て除法により，は

$$(x-2)(x^2+x-6)=0.$$
$$(x-2)(x-2)(x+3)=0.$$
$$(x-2)^2(x+3)=0.\qquad\cdots$$
$$\therefore x=2,\ -3.$$

←$\boxed{\text{G}}$(2) を用いた

〈注 1〉 において，の左辺 $f(x)$ は因数 $(x-2)$ を2乗の形で含んでいる．このとき，方程式は，$x=2$ を**重解**としてもつという．また，この重解を2つの解と数えて，「の3つの解は 2, 2, −3 である」と言い表すこともある．

〈注 2〉 $f(\alpha)=0$ を満たす α は，

$$\pm\frac{\text{定数項の約数}}{\text{最高次の項の係数の約数}}$$

←本問では 1, 2, 3, 4, 6, 12
←本問では 1

の中から見つかることがわりと多い．(見つかるとは限らない．ちゃんとした理論は「整数」で．)

$\boxed{\text{K}}$ 共役な解

次の $\boxed{\text{定理}}$ を覚えておくと便利なことがある．

「実数係数の整方程式

$$f(x)=0\qquad\cdots$$

が虚数 $\alpha:=a+bi$ (a, b は実数, $b\neq 0$) を**1つの解**としてもつとき，α と**共役**(きょうやく)な虚数 $\overline{\alpha}=a-bi$ もの解である．」

〔**証明**〕←「へぇ〜．うまいな」と感心しよう．

$f(x)$ を2次式

$$\begin{aligned}&(x-\alpha)(x-\overline{\alpha})\\ =&x^2-(\alpha+\overline{\alpha})x+\alpha\overline{\alpha}\\ =&x^2-2ax+(a^2+b^2)\end{aligned}$$

←実数係数

で割ったときの余りは，実数係数で1次以下だから

$px+q$ (p, q は実数)

とおける．商を $Q(x)$ とすれば

$$f(x)=(x-\alpha)(x-\overline{\alpha})\cdot Q(x)+(px+q).$$

$$\begin{aligned}\therefore\ f(\alpha)&=p\alpha+q=p(a+bi)+q=(pa+q)+pbi,\\ f(\overline{\alpha})&=p\overline{\alpha}+q=p(a-bi)+q=(pa+q)-pbi.\end{aligned}$$

したがって，α がの1つの解であるとき

$\boxed{\text{G}}$(1)

$$f(\alpha)=0 \text{ より } (pa+q)+pbi=0.$$

となり，$\boxed{\text{I}}$ **〈注 1〉** より

$$pa+q=0,\ b=0.$$

よって $f(\overline{\alpha})=0$ も成り立つから $\overline{\alpha}$ もの解である．□

←ふたたび $\boxed{\text{G}}$(1)

$\boxed{\text{L}}$ “解の配置”

(主に)2次方程式において，その実数解の大きさの範囲が与えられたとき，係数に含まれる文字に関する条件を問う問題を，俗に“解の配置”といい，グラフを用いて処理する．詳しくは「2次関数」の章で．