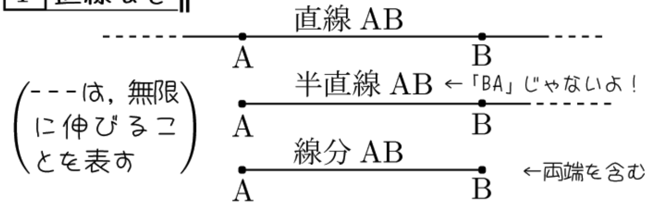
平面図形

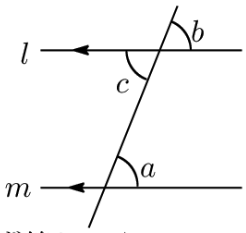
2010/6/17 更新

1 直線など



〈参考〉3 点が同一直線上にあることを「**共線**である」という.

2 平行線と角



右図において

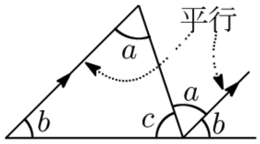
$l \parallel m$

$\Longleftrightarrow a=b$ (同位角が等しい)

$\Longleftrightarrow a=c$ (錯角が等しい)

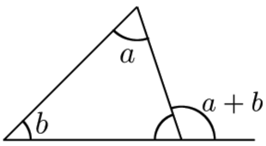
(b と c は対頂角であり, 必ず等しい.)

3 三角形の内角の和



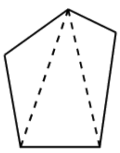
平行線における同位角, 錯角の性質より, 任意の三角形の内角の和は

$a+b+c=180°$.



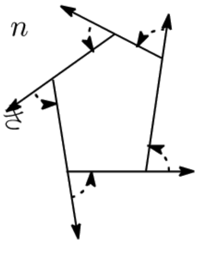
この関係は, しばしば右図のようにも使われる.

「2 つ足したら残りの外角」



〈参考〉n 角形の内角の和は, 三角形に分割して考えると

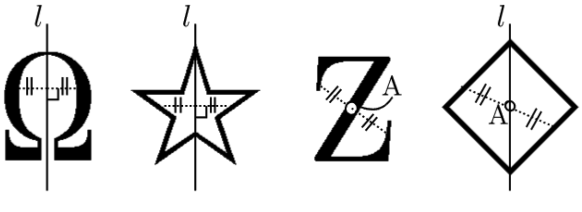
$180° \times (n-2)$.



正 n 角形の 1 つの内角は, これを n で割って得られる.

外角の和は, 右図で「→」の向きの変化を考えて, 360°.

4 図形の対称性



(1) 線対称

前図において, Ω, ☆, ◇は直線 l を折り目として折り返すとぴったり重なる, すなわち l に関して**線対称**である. このとき l を**対称軸**という.

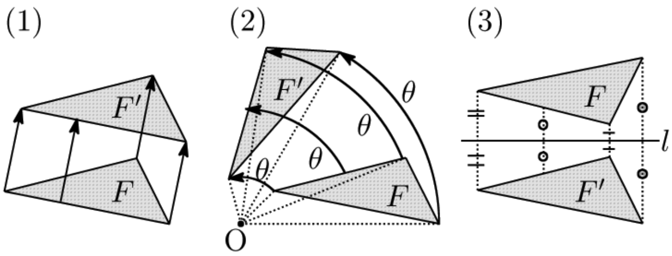
なお, ☆は l 以外に 4 本の対称軸をもつ. 同様に, ◇は, l 以外に 3 本の対称軸をもつ.

(2) 点対称

前図において, Z, ◇は点 A を中心として 180° 回転するともとの図形にぴったり重なる, すなわち A に関して**点対称**である. このとき A を**対称の中心**という.

5 図形の移動

平面上の図形 F を, 線分の長さや角の大きさを変えずに移動して図形 F' を得る方法として, 次の 3 つが代表的である.



(1) 平行移動

図形上のすべての点を, 一定の向きに一定の距離だけ移動する. 移動を表すベクトルがすべて等しい

(2) 回転移動

図形上のすべての点を, ある定点 O のまわりに一定の角 θ だけ回転する.

O を**回転の中心**, θ を**回転角**という.

(3) 対称移動

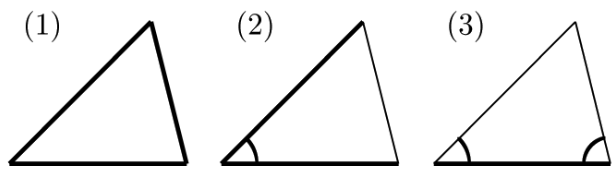
図形上のすべての点を, 定直線 l に関して対称な点に移動する. l を対称軸という.

〈注目〉2 つの図形 F, G があり, F を上記 (1)〜(3) のような移動を (繰り返し) 行うと G にぴったり重ねることができるとする. このように, F, G が形も大きさも同じとき, F と G は**合同**であるといい,

$F \equiv G$ ←世界標準は「≅」

と表す.

6 三角形の決定条件 (合同条件)



〔3 辺の長さ〕 〔2 辺夾角〕 〔2 角夾辺〕

↑「夾」=「その間の」

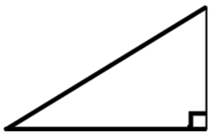
「三角形」は, 次の 3 通りの仕方で**決定**される. すなわち, (1), (2), (3) のどれかが与えられれば,

他の辺や角も決まる．

〈参考〉2 つの三角形が**合同**であるための条件は，それらが同じ“決定条件”を満たしていることである．

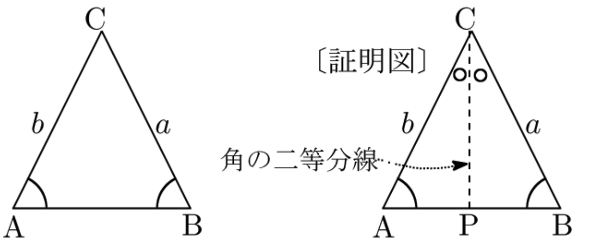
〈注意〉

直角三角形の場合，2 辺の長さが決まれば三平方の定理 (→$\boxed{20}$) により他の辺の長さも決まる．



よって上記の (2) と異なり，2 辺とその間でない直角によっても三角形は決定される．

$\boxed{7}$ 二等辺三角形



上図右の三角形の辺と角について，次が成り立つ：

$$\underbrace{a=b}_{\text{二等辺三角形}} \Longleftrightarrow \underbrace{A=B}_{\text{底角が等しい}}.$$

〔**証明**〕「$\Longrightarrow$」「$\Longleftarrow$」とも，$\triangle\mathrm{CAP} \equiv \triangle\mathrm{CBP}$ を用いて示せばよい．

〈**参考**〉$a=b$ のとき，上の証明図において

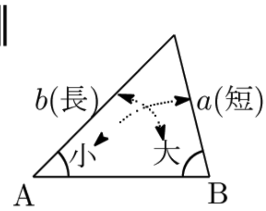
$$\mathrm{AP}=\mathrm{BP},\ \mathrm{CP}\perp\mathrm{AB}.$$

$\boxed{8}$ 向かい合う辺と角の大小

右図において

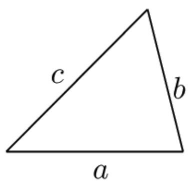
$$\underbrace{A<B}_{\text{(角の大小)}} \iff \underbrace{a<b.}_{\text{(辺の長短)}}$$

一致する



〔**証明**〕 上記 $\boxed{7}$ および転換法を用いる．余力があるなら，「三角形の辺と角の大小関係 証明」でググる．

$\boxed{9}$ 3 辺の長さの関係



3 角形の 2 辺の和は他の 1 辺より長い．よって，$a, b, c\ (>0)$ が 3 角形の 3 辺の長さを表すならば，次が成り立つ．(逆も成り立つ)

$$\begin{cases} b+c>a, & \cdots ① \\ c+a>b, & \cdots ② \\ a+b>c & \cdots ③ \end{cases}$$

$$\text{i.e. } \overbrace{|b-c|}^{2\text{ 辺の差}} < a < \overbrace{b+c}^{2\text{ 辺の和}}. \qquad \cdots ④$$

②，③より　①より

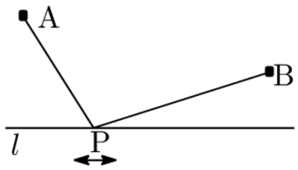
(④のとき，$a,\ b,\ c>0$ も成り立つ)

〈**例：最短経路**〉

平面上で，定直線 l に関して同じ側に 2 定点 A，B がある．l 上の動点 P に対して定まる折れ線の長さ

$$L := \mathrm{AP}+\mathrm{PB}$$

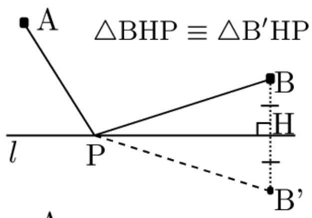
が最小となるような点 P の位置を求めよう．



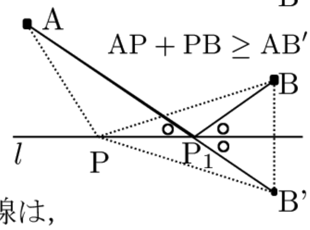
l に関して B と対称な点を B' とすると

$$\begin{aligned} L &= \mathrm{AP}+\mathrm{PB} \\ &= \mathrm{AP}+\mathrm{PB}' \\ &\leq \mathrm{AB}'(\text{定数}). \end{aligned}$$

△AB'P に注目



等号は，A，P_1，B が共線となるときに成立し，このとき L は最少になる．

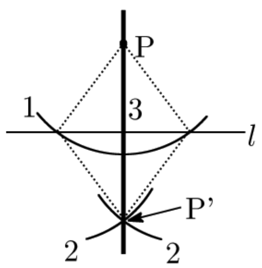


なお，このときの折れ線は，反射の法則に従う光の進路と一致している．

$\boxed{10}$ 作図

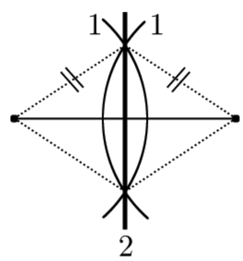
定規で 2 点を通る直線を引き，**コンパス**で円をかいて図形を描くことを**作図**という．以下に，代表的な作図例を挙げる．(数字は作図の順序を表す．太線が最終結果．)

〔点 P を通る l の垂線〕



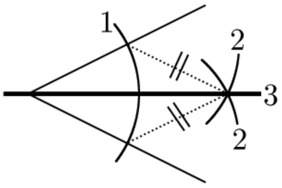
円 1，2 の半径が同じとき，P' は l に関する P の対称点．

〔垂直 2 等分線〕

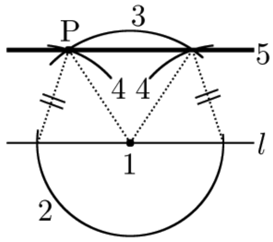


これを用いて三角形の外心が作図できる．

〔角の2等分線〕



〔点Pを通るlの平行線〕

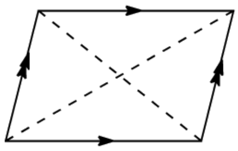


これを用いて三角形の内心が作図できる．

〈注目〉上記作図において，合同な三角形が随所に現れている．

11 有名四角形の性質

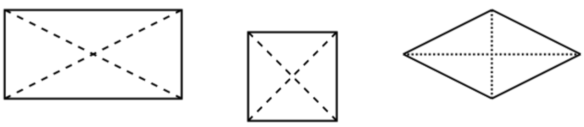
(1) 平行四辺形の性質

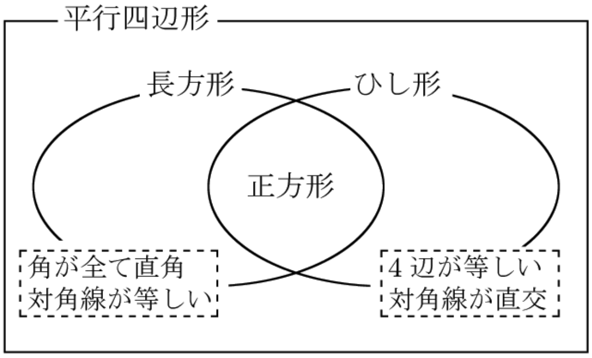


① 2組の対辺が平行.（定義）
② 2組の対辺が等しい.
③ 2組の対角が等しい.
④ 対角線がそれぞれの中点で交わる.
⑤ 1組の対辺が平行かつ等しい.

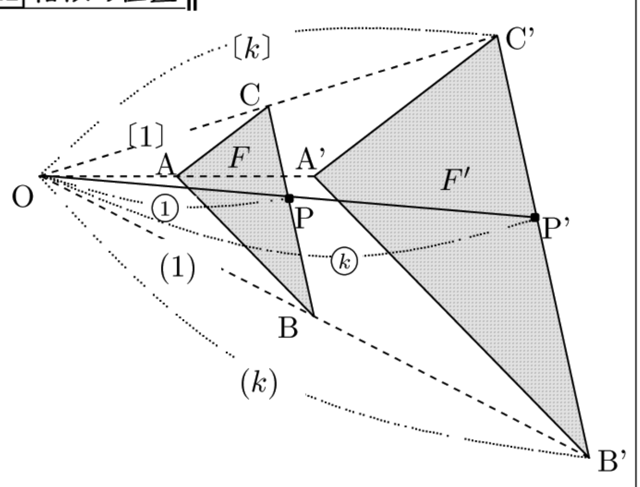
（逆に，上記①〜⑤のいずれかを満たす四角形は平行四辺形である.）

(2) 特殊な平行四辺形





12 相似の位置



平面上に定点Oと図形Fがある．F上の任意の点Pに対して，点P' を

$$\begin{cases} \text{P}'\text{は半直線 OP 上}, \\ \text{OP}' = k\cdot\text{OP} \end{cases}$$

を満たすようにとる．この点P' が作る図形をF'とするとき

「FとF'は点Oを**中心**として**相似の位置**にあり，*相似比は$1:k$である」

という．また，このようにしてPにP' を対応付けることを「伸縮写像」という．

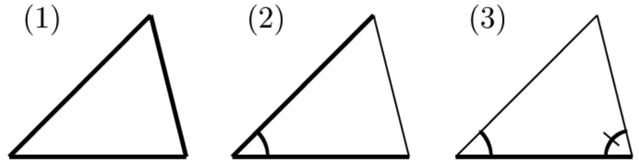
〈注目〉2つの図形F, Gがあり，Fに対して伸縮写像や5(1)〜(3)のような移動を(繰り返し)行ってGにぴったり重ねることができるとする．このように，F, Gが同じ形をしているとき，FとGは**相似**であるといい，

$F \backsim G$ ←世界標準は「〜」

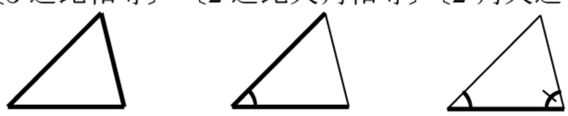
と表す.

13 三角形の相似条件

2つの三角形が相似となるための条件は，次の(1)〜(3)のいずれかが成り立つことである．



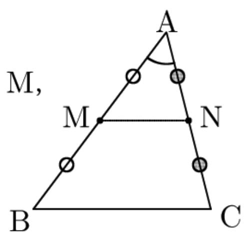
〔3辺比相等〕〔2辺比夾角相等〕〔2角夾辺相等〕



〈注目〉相似な三角形においては，対応する角はすべて等しい． また，対応する辺どうしの比はすべて等しく，この比のことを⋆**相似比**という．この「⋆**相似比**」は，∗の方の意味での相似比と一致する．

14 有名な相似三角形

(1) 中点連結定理



辺AB，ACの中点をそれぞれM，Nとすると

$\triangle\text{AMN} \backsim \triangle\text{ABC}$

であり，相似比は$1:2$だから

$\text{MN} \parallel \text{BC},\ \text{MN} = \dfrac{1}{2}\text{BC}.$

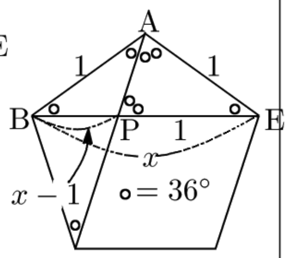
(2) 正五角形

対角線の長さを x とすると，
$\mathrm{EA}=\mathrm{EP}$，$\triangle\mathrm{PAB}\backsim\triangle\mathrm{ABE}$
より

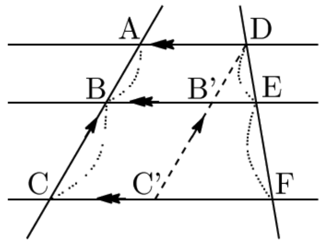
$(x-1):1=1:x.$

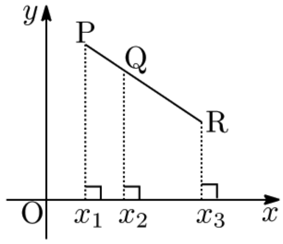
$x^2-x-1=0.$

$\therefore x=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}.$ 「黄金比」と呼ばれる



15 平行線と比





上図左において，$\triangle\mathrm{DB'E}\backsim\triangle\mathrm{DC'F}$ だから
$\mathrm{AB}:\mathrm{BC}=\mathrm{DE}:\mathrm{EF}.$←**平行線は比を保存する！**

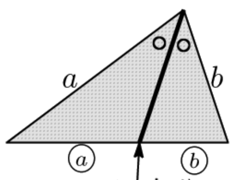
〈例〉 上図右で

$$\mathrm{PQ}:\mathrm{QR}=(x_2-x_1):(x_3-x_2).$$

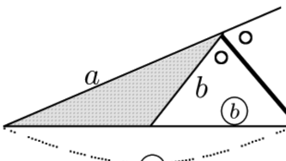
（線分比は，片方の座標のみでＯＫ！）

16 角の二等分線の性質

〔内角の二等分線〕 〔外角の二等分線〕



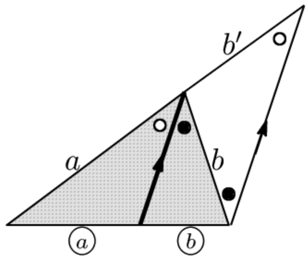
$a:b$ に内分



$a:b$ に外分

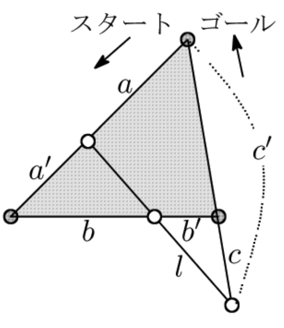
〈証明〉 (内角の方)

角の二等分線と平行な補助線を引く．錯角 ●，同位角 ∘ が等しいことから $b'=b$．あとは平行線の性質より導かれる．

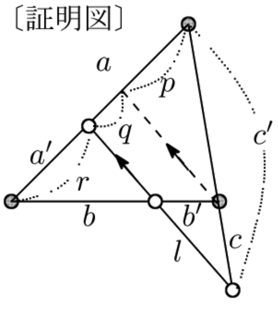


外角の二等分線に関しても同様に示せる．

17 メネラウスの定理



〔証明図〕



三角形と直線 l について，次が成り立つ．

$$\frac{a}{a'}\cdot\frac{b}{b'}\cdot\frac{c}{c'}=1.$$

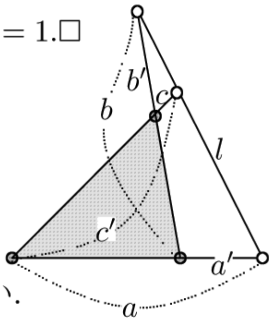
〈注目〉 頂点 l との交点 ●→∘→●→∘→⋯ と一周する順に，分子，分母，分子，分母，⋯ を書いていく．

三角形の 3 辺方向の線分比が現れる．

〈証明〉 上図右のように l の平行線を引くと

$$\text{左辺}=\frac{p+q}{r}\cdot\frac{r}{q}\cdot\frac{q}{p+q}=1.\square$$

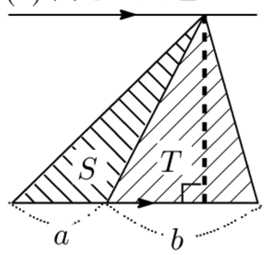
〈注意〉 右図の状況で使うこともある．



18 三角形の面積比

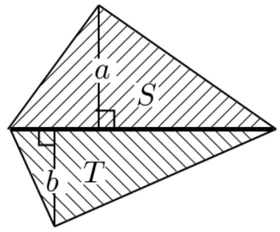
何かが共通だと比べやすい．

(1) 高さが共通



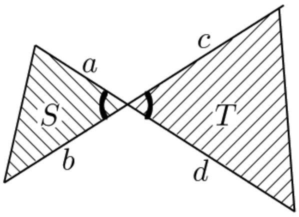
$S:T=a:b$

(2) 底辺が共通



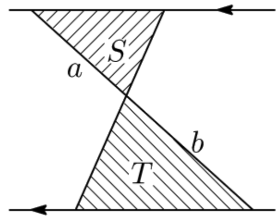
$S:T=a:b$

(3) 角が共通



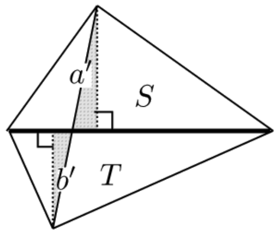
$S:T=ab:cd$

(4) 形が共通 (相似)



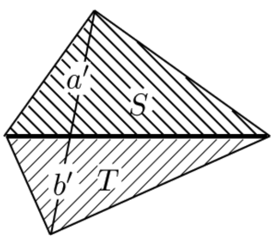
$S:T=a^2:b^2$

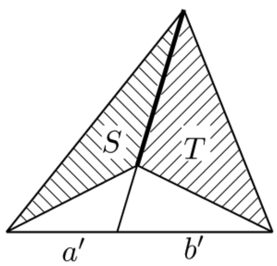
〈注目 1〉 (2) は，実際には右図の相似三角形を利用して $S:T=a':b'$ の形で使うことが多い．下図の左，右いずれにおいても



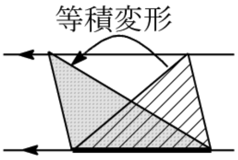
$$S:T=a':b'$$

が瞬時に見抜けるようにしておこう．





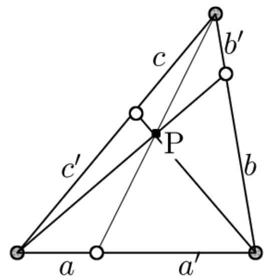
〈注目 2〉 (1) と同じ考え方を用いて三角形を面積一定のまま変形することができる．

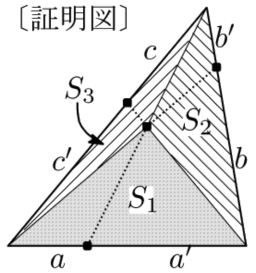


〈(3) の証明〉 共通な角を θ とすると

$$S:T=\frac{1}{2}ab\sin\theta:\frac{1}{2}cd\sin\theta=ab:cd.\square$$

$\boxed{19}$ チェバの定理





三角形と点 P について，次が成り立つ．

$$\frac{a}{a'}\cdot\frac{b}{b'}\cdot\frac{c}{c'}=1.$$

〈注目〉 $\overset{\text{頂点}}{\bullet}\to\overset{\text{Pを通る直線との交点}}{\circ}\to\bullet\to\circ\to\cdots$ と一周する順に，分子，分母，分子，分母，**…** を書いていく．

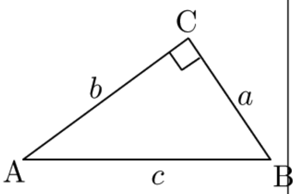
〈証明〉 上図右のように面積 S_1, S_2, S_3 をとると，前項目の**〈注目〉**の考え方により

$$\text{左辺}=\frac{S_3}{S_2}\cdot\frac{S_1}{S_3}\cdot\frac{S_2}{S_1}=1.\square$$

$\boxed{20}$ 三平方の定理 (ピタゴラスの定理)

右図の直角三角形において，次が成り立つ．

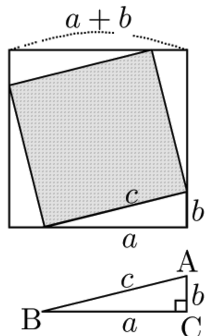
$$a^2+b^2=c^2.\quad\cdots(*)$$



〔証明〕 外側の正方形から 4 つの直角三角形を除いて内側の正方形の面積を表すことにより

$$(a+b)^2-4\times\frac{1}{2}ab=c^2.$$

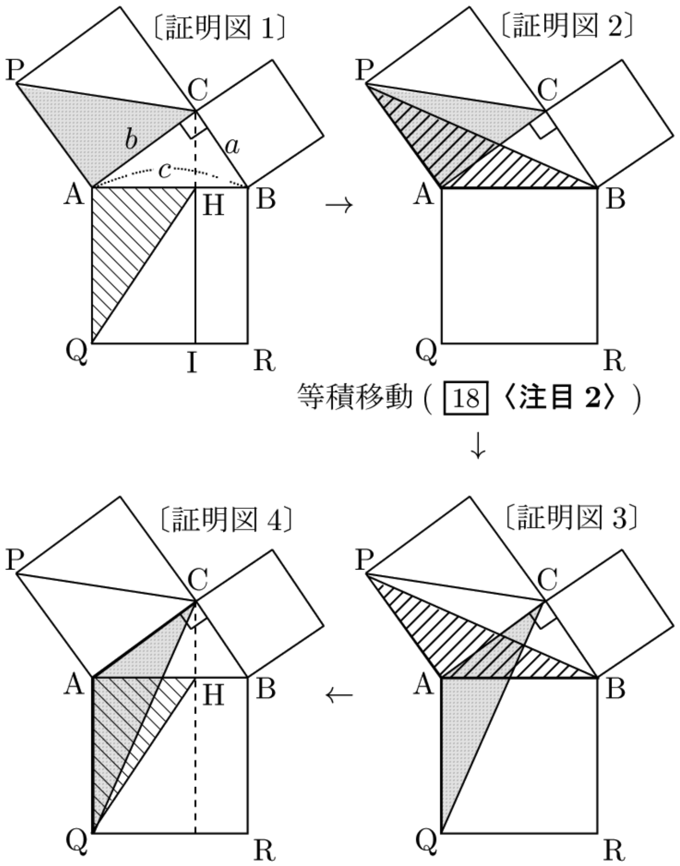
$$\therefore a^2+b^2=c^2.$$



〈注目〉 定理の逆も成り立つ．すなわち

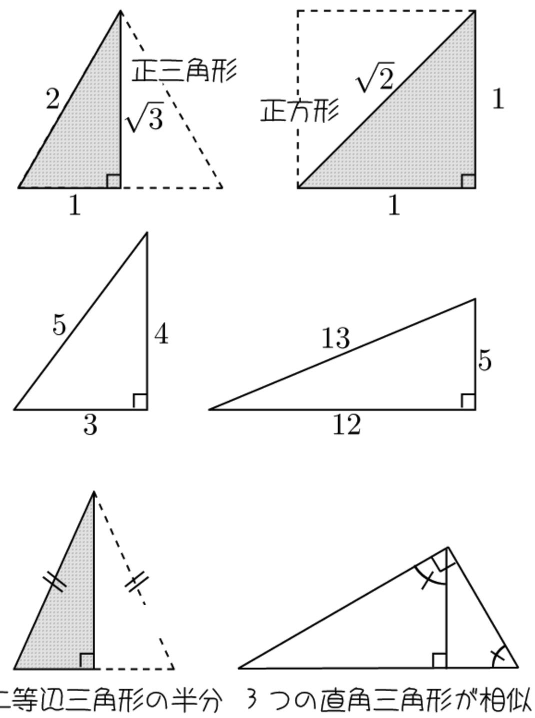
$$\angle\mathrm{C}=90^\circ\iff a^2+b^2=c^2.$$

〔別証明〕 〔証明図 1〕のように 3 つの正方形を作り，2 つの三角形 △ACP，△AQH の面積が等しいことを示す．そうすれば，四角形 AQIH の面積が $2\cdot\triangle\mathrm{ACP}=b^2$ となり，まったく同様にして四角形 BRIH の面積が c^2 となる．よって，正方形 AQRB の面積を 2 通りに表すことにより (∗) が示される．



点 A を中心に回転移動 ($\boxed{5}$(2))　　等積移動

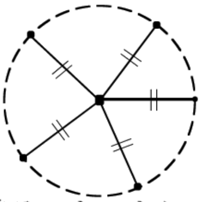
$\boxed{21}$ 有名直角三角形



22 円とは

平面上で，定点からの**距離が一定**である点の集合が円である．

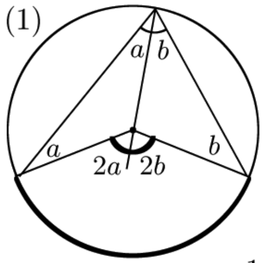
この一定値が半径



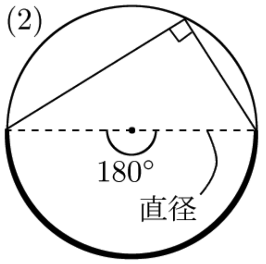
〈注目〉したがって，円という曲線そのものより，むしろ**直線・線分**を用いて考えることが多い．

〈参考〉　とくに円の周りだけを考えることを強調したい場合に,「円周」と呼ぶことがある．内部も含めた領域を考える場合には,「円板」と呼んだりする．

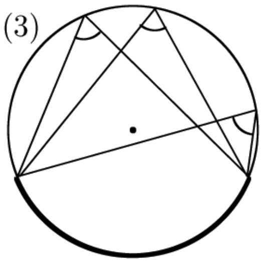
23 中心角・円周角



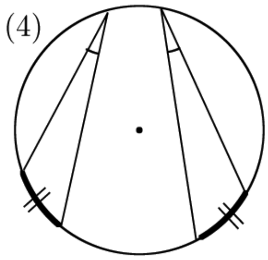
$\underbrace{\text{円周角}}_{a+b}$は$\underbrace{\text{中心角}}_{2a+2b}$の $\dfrac{1}{2}$



半円の円周角は 90°

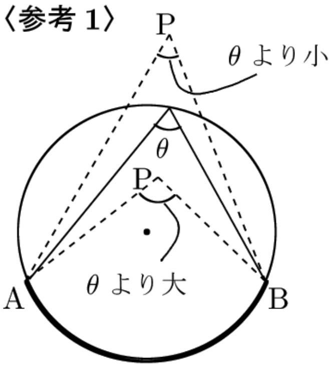


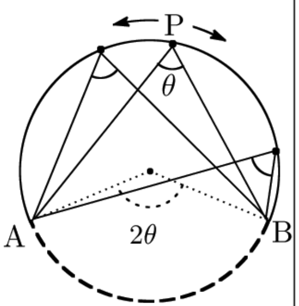
同一の弧に対する
円周角は一定



長さが等しい弧
でも同様

〈参考 1〉

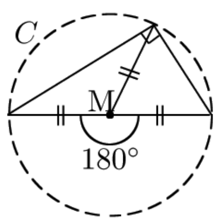




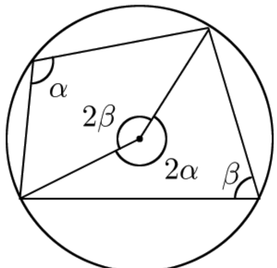
上図左において，弧 AB の円周角を θ とすると，平面上の任意の点 P に対して,「P から 2 点 A，B を見込む角」，すなわち $\angle$APB と θ の大小により，P が円の内部・外部のどちらにあるかが決まる．

また，$\angle\mathrm{APB} = \theta$ を満たす点 P の軌跡は，上図右のような円弧 (実線部) となる．

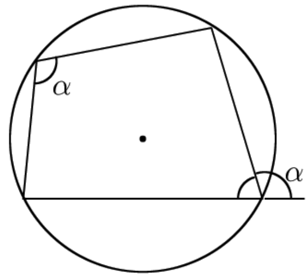
〈参考 2〉 直角三角形において，斜辺を直径とする円を C とすると，直角をなす頂点は C 上にある．よって，斜辺の中点 M から 3 頂点へ到る距離は等しい．



24 円に内接する四角形

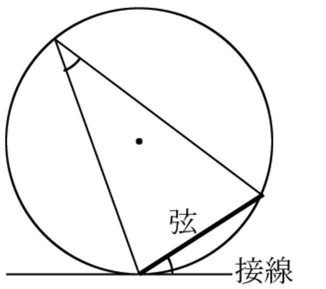


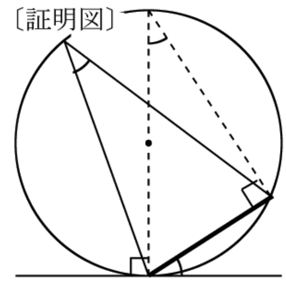
$2\alpha + 2\beta = 360°$.
$\therefore\ \alpha + \beta = 180°$



対角の外角と等しい

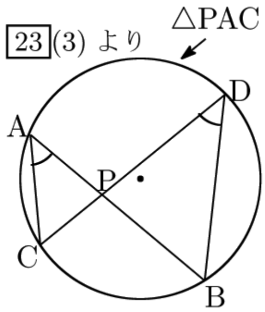
25 接弦定理



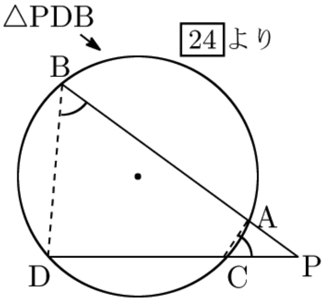


接線と弦が作る角は，弦の対角と等しい．

26 方べきの定理



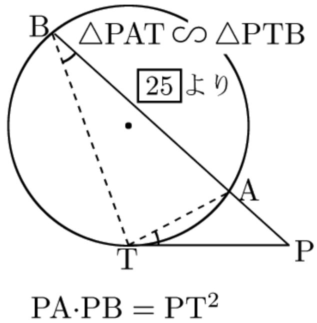
PA·PB = PC·PD



PA·PB = PC·PD

〈注目〉両辺に現れる線分は，すべて交点 P を端点とする．

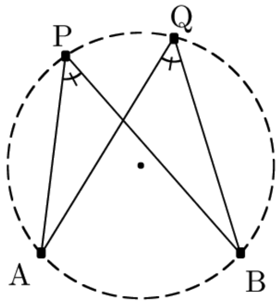
〈参考〉すべて三角形の相似から導かれる．



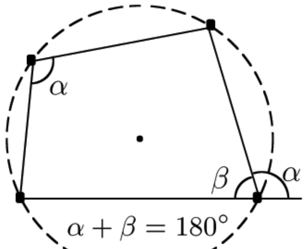
$\mathrm{PA \cdot PB} = \mathrm{PT}^2$

27 共円である4点

←「共円」=「同一円周上」



A，Bを見込む角が等しい

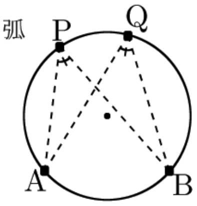


内対角の和が180°

〈注目〉 23の定理は，きっちり書くと

「2点P,QがA,Bを通る同一円周上にある」 $\overset{}{\Longrightarrow}$ ∠APB = ∠AQB
(∗)

↑しかも直線ABに関して同じ側の弧



が成り立つことを述べたものである．(右図参照)

それに対して上記左は

「2点P,QがA,Bを通る同一円周上にある」 ⟸ ∠APB = ∠AQB

という，定理 (∗) の**逆**も成り立つことを主張している．

同様に，23〜26の定理はすべて

「⋯が同一円周上にある」 ⟹ 「〜である」

という形になっているが，その**逆**：

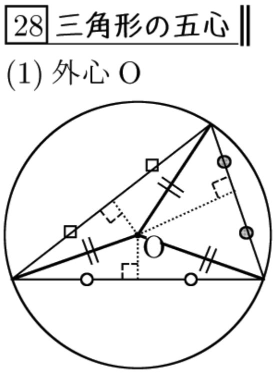
「⋯が同一円周上にある」 ⟸ 「〜である」

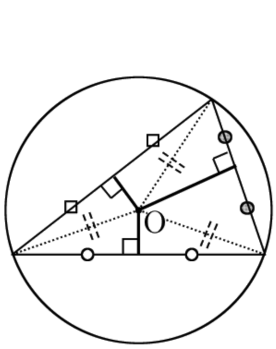
も成り立つ．(→「勝てるセンター試験ⅠA」第3章基本編解説参照」)

14(1)，15〜17，19〜20の定理も，すべて逆の形でも使える．

28 三角形の五心

(1) 外心O

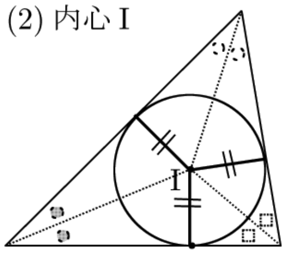


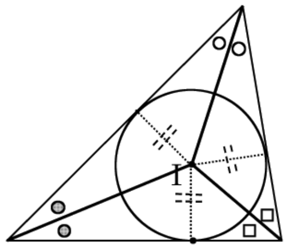


3頂点へ到る距離が等しい　垂直二等分線の交点

〈参考〉 外接円の半径 R が関与するときには，正弦定理と用いることも多い．

(2) 内心I

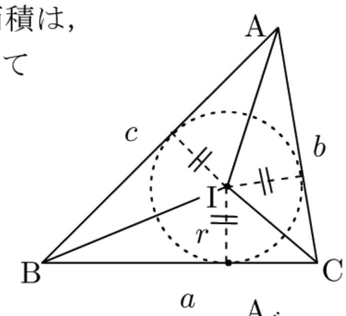




3辺への距離が等しい　角の二等分線の交点

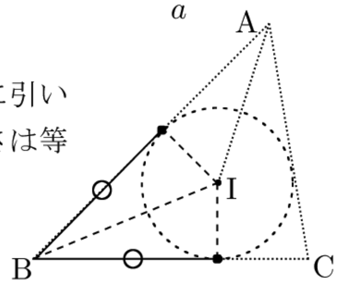
〈参考1〉 △ABC の面積は，内接円の半径 r を用いて

$$\triangle ABC = \frac{1}{2}ar + \frac{1}{2}br + \frac{1}{2}cr = \frac{1}{2}(a+b+c)r.$$

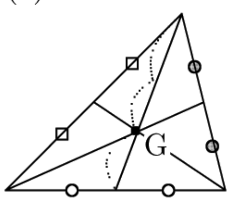


〈参考2〉

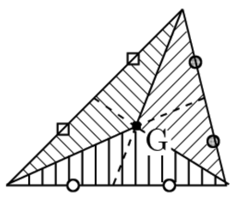
円外の1点から円に引いた2本の接線の長さは等しい．



(3) 重心G

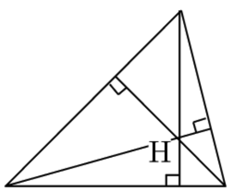


中線の交点
中線を2：1に内分する



3つの斜線部の面積は等しい

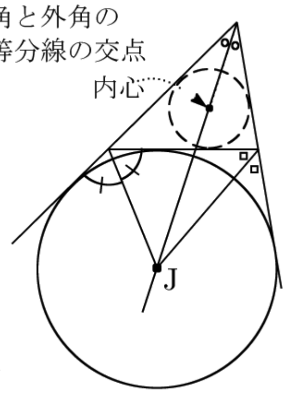
(4) 垂心H



垂線の交点

(5) 傍心J

内角と外角の二等分線の交点

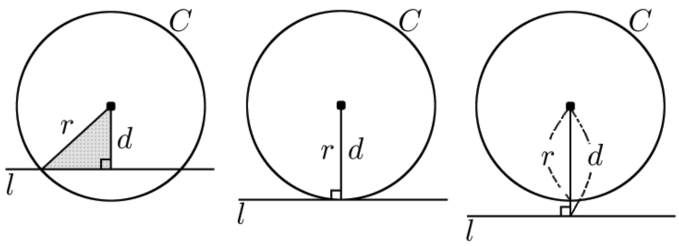


〈参考〉 たとえば(1)のにおいて，外心Oは2本の垂直二等分線の交点として定まる．
そして，第3の垂直二等分線もOを通ることが示せる．(2)〜(5)のについても同様である．

29 円と直線の位置関係

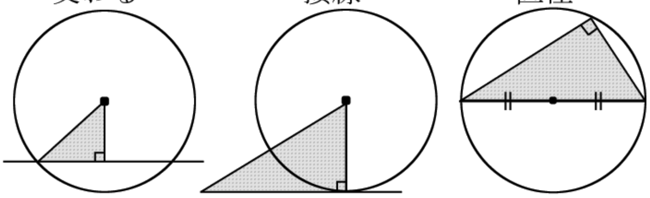
円 C と直線 l の位置関係は C の中心と l との距離 d と半径 r の大小関係によって，下図の3通りに分かれる．

〔交わる〕　〔接する〕　〔共有点なし〕



〈注目〉円に関連して得られる直角三角形として，次の3つが代表的である．

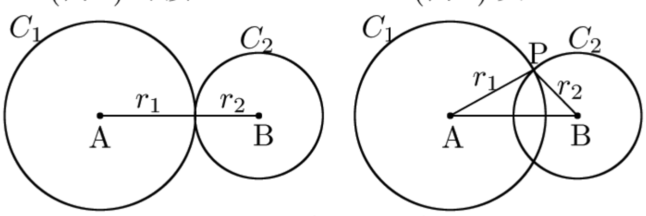
交わる　接線　直径



30 円と円の位置関係

中心A，半径 r_1 の円 C_1 と，中心B，半径 r_2 の円 C_2 の位置関係は，中心間距離 AB と r_1, r_2 によって決まる．

(例1) 外接　(例2) 交わる



$\mathrm{AB}=r_1+r_2$　$|r_1-r_2|<\mathrm{AB}<r_1+r_2$

〈注意〉このような関係を公式として暗記するのはよくない．その場の状況に応じて，図を描いて考えることが大切である．

〈参考〉2円が交わるとは，図のような三角形ABPができることに他ならない．したがって，「交わる」ための条件は，当然 8 の④式：「3辺の長さの関係」と同じ形の式になる．

31 重要ポイント

(1)　複雑な図形の中から**「基本型」**を見出し，それを**抽出**して考える！

(2)　とくに，その問題と深く関わる**三**角形に注目する．多くの場合その三角形は，6 の「決定条件」を満たしている．

(3)　「基本型」をしっかり目に焼き付ける．たとえば,「合格る計算」ⅠAⅡB ITEM50 など．

(4)　自分の手で，フリーハンドで，**心を込めて**図を描く．この作業を通して，**図形そのものがどのように決定されているか**が自然と頭にインプットされる．

(5)　何がわかっていて (仮定)，何を示せばよいのか (結論) を明確に把握しておく．

(6)　仮定から何が導けるか？結論に達するには何を示せばよいか？両方向から考える．

仮定→? …… ?→結論

(7)　適宜補助線を引く．

〈注意〉ただし，(2)(3) ができてないとトンチンカンな補助線をあっちこっち引っぱって眩暈をおこすことになる．

(8)　(セコイ話だが) センター試験では，空欄と対話しながら考える．