2007/5/28 更新

場合の数

A 場合の数における約束

異なるものの個数を求めること．

〈注〉何を区別し，何を区別しないかが重要である．

B 求め方

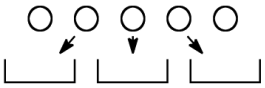
(1) **すべての場合を書き出し**，「1コ, 2コ, 3コ...」と数える．　幼児になった気分で！

(2) **法則を発見**し，上手く計算する．

〈注〉(1) の作業を通して (2) に気付くことが多い．

〈(1) の例〉

区別のつかない 5 個の玉を，区別のつかない 3 個の箱に入れる仕方を考える．



3 個の箱に入る玉の個数の組合せを考えて

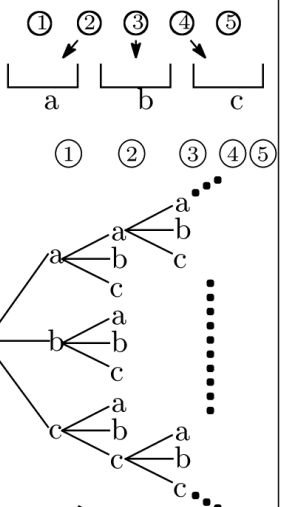
$\{0, 0, 5\}$, $\{0, 1, 4\}$, $\{0, 2, 3\}$,
$\{1, 1, 3\}$, $\{1, 2, 2\}$

の5 通り．

〈(2) の例〉

1, 2, 3, 4, 5 と区別のついた 5 個の玉を，a，b，c と区別のついた 3 個の箱に入れる仕方を考える．1, 2, 3, 4, 5 の各玉ごとに，a，b，c のどの箱に入れるかを選んで

$3^5 = 243$(通り).



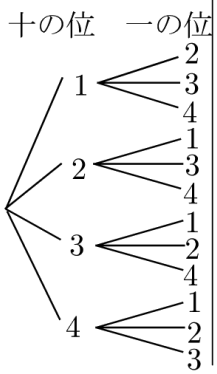
〈注〉一般に，次のようになっていることが多い．

何かを区別しない	少ない	個数	多い	何かを区別する
	発見しにくい	法則	発見しやすい	
↓				↓
(1)が使いやすい				(2)が使いやすい

C 法則

(1) **積の法則**

1, 2, 3, 4 の 4 枚のカードから 2 枚を並べて 2 桁の整数を作る．すべての場合を樹形図に書き出すと，右図のようになる．この図からわかるように，十の位の 4 本の枝に対して，一の位の枝がそれぞれ 3 本ずつ伸びている．このように**均等に枝分かれする樹形図**が描けるときは

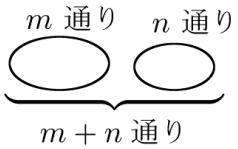


$4 \cdot 3 = 12$(通り)

と，掛け算で求まる．(B〈(2) の例〉でも用いた.)

(2) **和の法則**

2 つのケースに場合分けできて，しかもそれらのケースにダブリがないとき，右図のように

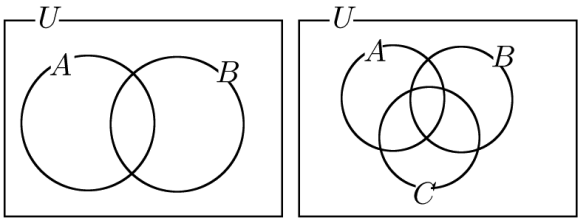


$m + n$(通り)

と，足し算で求まる．(3 つ以上のケースに場合分けする場合も同様である．)

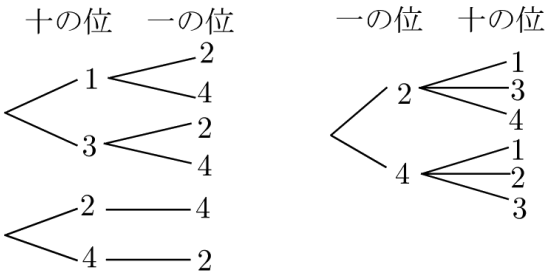
〈注〉ダブリがあるときには，次の**包除原理**を用いることになる．(少しメンドイ)

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B),$$
$$n(A \cup B \cup C) = n(A) + n(B) + n(C) - n(A \cap B) - n(B \cap C) - n(C \cap A) + n(A \cap B \cap C)$$



D 数える順序

C(1) において，2 桁の偶数の個数を数える．



C(1) と同様，上左図のように十の位→一の位の順に数えようとすると，一の位を考える際

$$\begin{cases} \text{偶数しか使えない} \\ \text{十の位で用いた数が使えない} \end{cases}$$

という 2 つの条件が重なってしまい，十の位が奇数か偶数かで一の位の枝の本数に差異が生じる．したがって，和の法則も用いて

$2 \cdot 2 + 2 \cdot 1 = 6$

と求めることになってしまう．

そこで，偶数しか使えないという条件をもった一の位を先に数えてみると，前右図のような均等に枝分かれする樹形図になり

$$2\cdot 3 = 6$$

と積の法則だけで求まる．

上記の比較からわかるように

条件のキビシイ所から数える

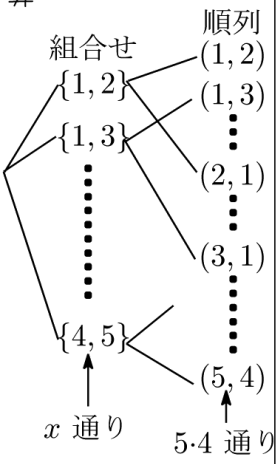
のが原則である．

何事にも例外はあるよ

E 法則の応用

(1)「積の法則」の応用：割り算

1, 2, 3, 4, 5 の 5 つの数字から，異なる 2 つの数字を選んで作る**組合せ**の数 $x\,(=\,{}_5\mathrm{C}_2)$ は，直接には求めにくい．そこで，直接求めやすい**順列**との関係に注目する．x 通りの組合せ各々に対し，並べ方も考えると 2! 通りずつの順列が対応するから，樹形図を参照して



求めたいけど求めにくい　求めやすい

$$x\cdot 2! = 5\cdot 4. \qquad \cdots\text{積の法則}$$

対応関係に注目！

5 から 2 個並べる

$$\therefore\ x = {}_5\mathrm{C}_2 = \frac{5\cdot 4}{2!}. \qquad \cdots\text{割り算}$$

〈注〉たとえば「a，a，a，b，b」の 5 個の文字を並べる仕方の数は

合計個数

$$\frac{5!}{3!\,2!}. \qquad \leftarrow\text{同じものを含む順列の数}$$

a の個数　b の個数

これも上記と同じ考え方によって示される．

(2)「和の法則」の応用：引き算

$\begin{cases} 1,\ 3,\ 5,\ 7 \\ 2,\ 4,\ 6,\ 8 \end{cases}$ の 8 つの数字から，異なる 3 つの数字を選ぶとき，少なくとも 1 つの数が偶数であるような組合せの数 x を数えてみよう．

選んだ 3 つのうちの偶数の個数 N は

$$N = 0,\ 1,\ 2,\ 3 \qquad \cdots ☼$$

求めやすい　求めたいけど求めにくい

のいずれかである．よって求める x は

$N=0$　$N=1,\ 2,\ 3$

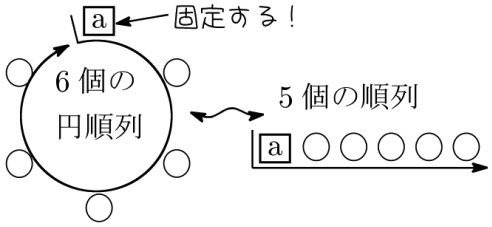
$$\underbrace{{}_4\mathrm{C}_3}_{\text{奇数から 3 つとも選ぶ}} + x = \underbrace{{}_8\mathrm{C}_3}_{\text{全体}}. \qquad \cdots\text{和の法則}$$

$$\therefore\ x = {}_8\mathrm{C}_3 - {}_4\mathrm{C}_3. \qquad \cdots\text{引き算}$$

F 円順列

a，b，c，d，e，f の 6 文字を円周上に並べてできる**円順列**の数は

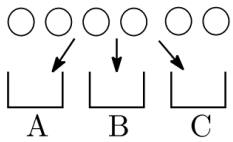
1 文字を固定し，残り 5 文字の順列と考える．



G ○を|で仕切る

←「重複組合せ」と呼ぶ先生が多いかも

区別のつかない 6 個のボールを区別のつく 3 個の箱 A，B，C に入れる仕方を考える．ただし，空の箱があってもよいとする．



A1コ,B3コ,C2コ　A4コ,B0コ,C2コ　A0コ,B5コ,C1コ

↕　↕　↕

○|○○○|○○　○○○○||○○　|○○○○○|○

上の例からわかるように

$\begin{cases} \text{「題意の入れ方」と} \\ \text{「6 個の○と 2 本の|を並べる仕方」} \end{cases}$ …☠

は **1 対 1 対応**．よって☠の個数を求めて

$\begin{cases} \dfrac{8!}{6!\,2!}\text{通り．} \leftarrow\text{同じものを含む順列} \\ \text{or} \\ {}_8\mathrm{C}_2\ \text{通り．} \leftarrow \text{○と|合わせて 8 個の置き場所のうち，左から何番目に|を置くか} \end{cases}$

次に，空箱があってはならないときを考える．前述した 3 例のうち，真ん中と右側の○|○ ○ ○|○ ○ 例は許されなくなる．そこで，右上図のような“スキマ”

A1コ,B3コ,C2コ

↕

○ ○ ○ ○ ○ ○

1 2 3 4 5

1〜5を考えると，たとえば「A1コ,B3コ,C2コ という分け方」と「1と4の 2 箇所に|を入れること」が対応するから

$\begin{cases} \text{「題意の入れ方」と} \\ \text{「1〜5のうち 2 箇所に|を 1 本ずつ入れる仕方」} \end{cases}$

は **1 対 1 対応**．よって答は ${}_5\mathrm{C}_2$ 通り．

〈注〉“スキマ”を用いたこの手法は，「何かが隣り合わない」ような場合の数を求める際にも有効である．