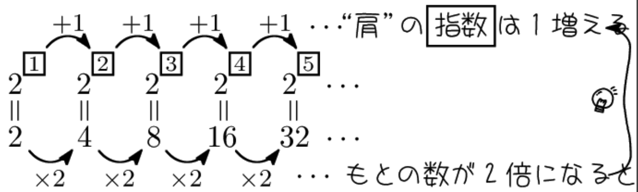
指数・対数関数

2009/5/5 更新

$\boxed{\text{A}}$ $2^0,\ 2^{-3},\ 2^{\frac{1}{3}}$ とは？

中学で学んだ 2 の累乗には，次のような規則があった．

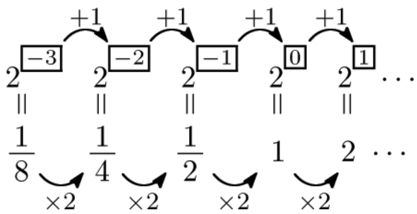


〈注〉法則💡は，次のようにも言い表せる．

「もとの数が等比数列」をなすとき

肩の $\boxed{\text{指数}}$ は「等差数列」をなす．

指数が 0 以下の整数の場合にも上記💡の法則が成り立つと便利だから，次のように定める．

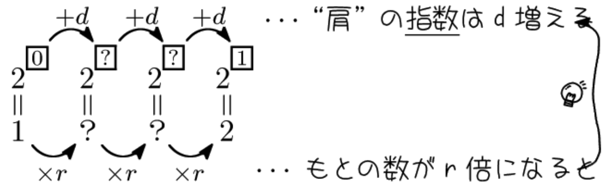


つまり

$$2^0 = 1, \qquad \leftarrow \text{0 乗は 1}$$

☆ $2^{-3} = \dfrac{1}{2^3}$. ← −n 乗は n 乗の逆数

さらに，指数が 0 と 1 の間の数のときにも💡が成り立つようにしてみよう．

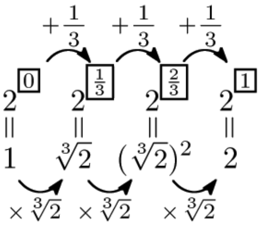


上図において

$r^3 = 2$ より $r = \sqrt[3]{2}$. ← 2 の 3 乗根 (3 乗したら 2 になる数)

$3d = 1$ より $d = \dfrac{1}{3}$.

よって，次のように約束する．



つまり

★ $2^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{2}$, ← 3 乗根は 1/3 乗

$2^{\frac{2}{3}} = (\sqrt[3]{2})^2$. ←その 2 乗は 2/3 乗

以上のように約束すると，中学で学んだ指数法則

$$a^pa^q = a^{p+q}, \qquad \cdots ①$$

$$(a^p)^q = a^{pq}, \qquad \cdots ②$$

$$(ab)^p = a^pb^p \qquad \cdots ③$$

が，$p,\ q$ が自然数以外のときもそのまま使える．

たとえば☆のとき

$$2^5{\cdot}2^{-3} = 2^5{\cdot}\frac{1}{2^3} = 2^2.$$

$\therefore\ 2^5{\cdot}2^{-3} = 2^{5+(-3)}$. ←①が成立！

また，★のとき

$$\left(2^{\frac{1}{3}}\right)^3 = (\sqrt[3]{2})^3 = 2.$$

$\therefore\ \left(2^{\frac{1}{3}}\right)^3 = 2^{\frac{1}{3}\cdot 3}$. ←②が成立！

〈注〉指数法則①〜③が成り立つように，☆や★の定義をしていると見ることもできる．

$\boxed{\text{B}}$ 指数の計算

$\boxed{\text{A}}$で述べたことを理解したら，**指数法則①〜③**を用いて次のような計算がほとんど無意識にこなせるように反復練習しよう．

〈問〉（$\square$にはあてはまる数を入れよ．）

(1) $\sqrt[3]{4}{\cdot}\dfrac{1}{\sqrt{2}} = 2^{\square}$.

(2) $2^{\frac{5}{2}}{\cdot}3^{-\frac{3}{2}} = \sqrt{\square}$.

〔解〕

(1)
$$\begin{aligned}\sqrt[3]{4}{\cdot}\frac{1}{\sqrt{2}} &= (2^2)^{\frac{1}{3}}{\cdot}\frac{1}{2^{\frac{1}{2}}} \\ &= 2^{\frac{2}{3}}{\cdot}2^{-\frac{1}{2}} && \leftarrow (a^p)^q = a^{pq} \\ &= 2^{\frac{2}{3}-\frac{1}{2}} && \leftarrow a^p{\cdot}a^q = a^{p+q} \\ &= 2^{\boxed{\frac{1}{6}}}.\end{aligned}$$

(2)
$$\begin{aligned}2^{\frac{5}{2}}{\cdot}3^{-\frac{3}{2}} &= \left(2^5\right)^{\frac{1}{2}}{\cdot}\left(3^{-3}\right)^{\frac{1}{2}} && \leftarrow (a^p)^q = a^{pq} \\ &= (32)^{\frac{1}{2}}{\cdot}\left(\frac{1}{27}\right)^{\frac{1}{2}} && \leftarrow 3^{-3} = \frac{1}{3^3} \\ &= \left(32{\cdot}\frac{1}{27}\right)^{\frac{1}{2}} && \leftarrow a^p{\cdot}b^p = (ab)^p \\ &= \sqrt{\boxed{\mathbf{\frac{32}{27}}}}. && \leftarrow ○^{\frac{1}{2}} = \sqrt{○}\end{aligned}$$

C $\log_2 8$ とは？

$$\log_2 8 = \square$$

とは

$$2^{\square} = 8 \qquad \cdots 🍃$$

とまったく同じ関係を別の形で表現したものである．よって $\log_2 8$ の値を求める際には，🍃を思い浮かべながら□にあてはまる数を考える．

といっても，対数の値を求めるためにいちいち🍃を書くのはメンドウだから，次のようにする．

真数
対数→ $\log_{2}\square\, 8$ $\qquad\cdots$ ❀
底
$2^{\square}=8$
この□に入る数は？

要するに**対数 $\log_2 8$** とは，底 2 の“右肩”に小さな□をイメージし，

これが対数の値

底:2 を $\boxed{\text{何}}$ 乗すれば真数:8 に等しくなるか

を表す数と考える．こうして値を求めることにより，**対数の定義**に対する理解が深まっていく．

〈注〉$\log_2 8$ の値を，後述する対数の公式を使って

$$\log_2 8 = \log_2 2^3 = 3\log_2 2 = 3\cdot 1 = 3$$

なんて求めてはいたら，「対数とは何か」は一生わかるようにならない．

〈問〉 次の□に入る値を求めよ．

(1) $\log_{10} 10000 = \square$　(2) $\log_2 \dfrac{1}{4} = \square$

(3) $2 = \log_3 \square$　(4) $2^{\log_2 3} = \square$

〔解〕 (1) $\log_{10}\square 10000 = 4.$
この□に入る数

(2) $\log_{2}\square \dfrac{1}{4} = -2.$
この□に入る数

(3) $2 = \log_{3}\square \boxed{9}.$
ここに入る数が 2

この□に入るのが $\log_2 3$

(4) $2^{\square} = 3$

$$\therefore 2^{\boxed{\log_2 3}} = 3. \qquad \leftarrow あたりまえ!?$$

〈注 1〉もちろん，対数の値がいつもきれいに求まる訳ではない．たとえば，$\log_2 5 = 2.3219\cdots$ である．

〈注 2〉(4) の値がスッと出ないと，とくに理系の人は数IIIですごく苦労する．

D 対数の性質

$\boxed{\text{A}}$ ①〜③の指数法則から，次の対数の性質が即座に導かれる．(教科書を見ながらでいいから，1 度は証明を理解しておこう)

$$\log_a P + \log_a Q = \log_a PQ, \qquad \cdots ④$$

$$\log_a P - \log_a Q = \log_a \frac{P}{Q}, \qquad \cdots ④'$$

$$\log_a P^k = k\log_a P, \qquad \cdots ⑤$$

$$\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}. \qquad \cdots ⑥$$

$$\left(とくに \quad \log_a b = \frac{\log_b b}{\log_b a} = \frac{1}{\log_b a}. \right)$$

指数と同様，次のような計算が“息をするように”自然にできるよう反復練習しておこう．

〈問〉□にあてはまる数を答えよ．

$$\log_9 16 + 3 = \log_3 \square$$

〔解〕 $\log_9 16 + 3$

$$= \overset{⑥}{\frac{\log_3 16}{\log_3 9}} + \overset{❀}{\log_3 27}$$

(❀より $\log_3 9 = 2$ であるから)

$$= \log_3 (16)^{\frac{1}{2}} + \log_3 27 \qquad \leftarrow ⑤$$

$$= \log_3 (4\cdot 27) \qquad \leftarrow ④$$

$$= \log_3 \boxed{108}.\ (= \log_3 4 + 3)$$

(慣れたらこのくらいは暗算！)

(つづく)

E 常用対数

10 を底とする**常用対数**を用いると，ある数を十進法で表したときの桁数や首位 (一番上の位) をカンタンに求めることができる．

$\log_{10} 2 \fallingdotseq 0.3$，$\log_{10} 3 \fallingdotseq 0.48$ (概算値) が与えられたとすれば，右表のように，各 x に対する $\log_{10} x$ の値を，$\boxed{\text{D}}$を用いて容易に計算することができる．

x	$\log_{10} x$
1	0
2	0.3
3	0.48
⋮	⋮
9	0.96
10	1
20	1.3
30	1.48
⋮	
90	1.96
100	2
200	2.3
300	2.48
⋮	⋮
900	2.96
1000	3
2000	3.3
3000	3.48
⋮	⋮

〈例〉
$$\begin{aligned}\log_{10} 300 &= \log_{10} 3\cdot 10^2\\ &= \log_{10} 3 + 2\\ &\fallingdotseq 2.48\end{aligned}$$

この表からわかるように，常用対数 $\log_{10} x$ の値を見れば，

その<u>整数部分</u>から<u>桁数</u>がわかり，

その<u>小数部分</u>から<u>首位</u>がわかる．

〈例〉 $\log_{10} x = 3.39$ ここらへん

$= \underbrace{3}_{\text{整数部分}} + \underbrace{0.39}_{\text{小数部分}}$ なら …

↓　　↓

x は … 4 桁　　首位は 2

〈注〉概算値：$\log_{10} 2 \fallingdotseq 0.3$ は，次のようにしてカンタンに求まる．

$$\underline{2^{10} = 1024} \fallingdotseq 1000 = 10^3$$

暗記すべし！

の両辺の常用対数をとると

$$\log_{10} 2^{10} \fallingdotseq \log_{10} 10^3.$$
$$10 \log_{10} 2 \fallingdotseq 3.$$
$$\therefore \log_{10} 2 \fallingdotseq 0.3.$$

さらに $3^4 = 81 \fallingdotseq 80 = 2^3 \cdot 10$ を用いると $\log_{10} 3 \fallingdotseq 0.475$ も導かれる．自分でやってみよう．

F グラフ

次の関数①〜④のグラフを描いてみよう．

①：$y = 2^x$　　②：$y = \left(\dfrac{1}{2}\right)^x$

③：$y = \log_2 x$，　④：$y = \log_{\frac{1}{2}} x$

2 を底とする**指数関数**　　$\dfrac{1}{2}$ を底とする**対数関数**

このような基本的な関数のグラフについては，x に具体的な数値を代入して関数の値を求め，それをもとにグラフ上の点をいくつかとってみれば，およその形はわかる．

①：

x	-2	-1	0	1	2
2^x	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4

②：

x	-2	-1	0	1	2
$\left(\frac{1}{2}\right)^x$	4	2	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$

③：

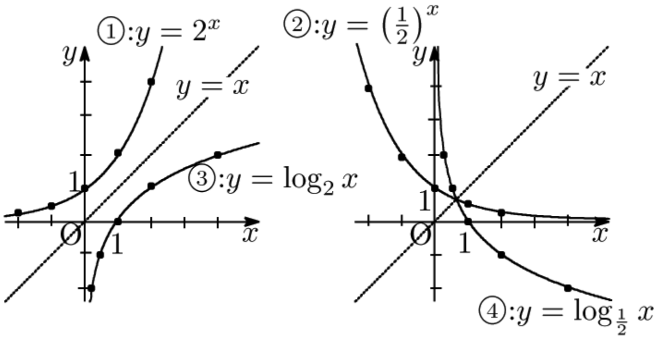
x	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4
$\log_2 x$	-2	-1	0	1	2

④：

x	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4
$\log_{\frac{1}{2}} x$	2	1	0	-1	-2

よって，次の図のようになる．

〔底：$2 > 1$〕　　〔底：$\dfrac{1}{2} < 1$〕



〈注 1〉いずれは全て瞬間で描けるように！

〈注 2〉これらのグラフを目に焼き付けてしまえば，指数関数 $y = a^x$，対数関数 $y = \log_a x$ に関する様々なことを想起できる．

(1)　x の範囲 (**定義域**)，y の範囲 (**値域**).
(底は 1 以外の正の数である．)

(2)　指数・対数関数の増加・減少は，底と 1 との大小関係で決まる．

(3)　①：$y = 2^x \iff x = \log_2 y$

直線 $y = x$ に関し対称な点

点 (1, 2), (2, 4) を通る

点 (2, 1), (4, 2) を通る

③：$y = \log_2 x$

x, y を互換した

底が等しい指数関数，対数関数のグラフは，

直線 $y = x$ に関して対称．

〈注 3〉数学Ⅲの微分積分では，**自然対数の底 e** (約 2.71 ⋯) を底とする指数・対数関数 $y = e^x$，$y = \log_e x$ が頻出である．

$\log x$ と表すことが多い